

# журнал© Квант СЕНТЯБРЬ 2007 №5 ОКТАБРЬ 2007

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипяна), ИФТТ РАН

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ  
РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

**Ю.А.Осипьян**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**С.С.Кротов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,  
А.Н.Виленин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин,  
Н.П.Долбиллин (*заместитель главного редактора*), В.Н.Дубровский,  
А.А.Егоров, А.В.Жуков,  
А.Р.Зильберман, В.В.Кведер (*заместитель председателя редколлегии*), П.А.Кожевников,  
В.В.Козлов (*заместитель председателя редколлегии*), С.П.Коновалов, А.А.Леонович,  
Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, Н.Х.Розов,  
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, В.М.Уровев,  
А.И.Черноуцан (*заместитель главного редактора*)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,  
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,  
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков,  
Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**А.Н.Колмогоров**

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,  
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,  
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,  
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,  
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллиончиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,  
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,  
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,  
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро  Квантум

© 2007, Президиум РАН,  
Фонд Осипяна, «Квант»

- 2 Современная математика, восходящая к Эйлеру. *В.Арнольд*  
10 Сюрпризы зеленого стекла. *В.Фабрикант*  
14 Парадокс стола на четырех ножках. *Г.Любарский*

## ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 18 Прокоп Дивиш и Янош Сегнер. *А.Васильев*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 19 Задачи М2056–М2065, Ф2063–Ф2072  
21 Решения задач М2036–М2040, Ф2048–Ф2057

## К М Ш

- 29 Задачи  
30 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»  
30 Три орешка путешествующего математика. *Н.Шилов*

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Реактивное движение

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 35 Практическая задача по механике. *Ю.Носов*  
36 Как молекулы столкнулись. *А.Стасенко*  
37 Как Студент магнитное поле измерял. *А.Стасенко*

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 39 Квантовые чудеса (продолжение). *М.Каганов*

## ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 42 Движение заряда в магнитном поле. *В.Дроздов*  
45 Инвариантность и задачи с параметрами. *Г.Фалин, А.Фалин*

## ОЛИМПИАДЫ

- 48 XXXIII Всероссийская олимпиада школьников по математике  
52 XLI Всероссийская олимпиада школьников по физике  
56 XIII Всероссийская заочная математическая олимпиада школьников

- 58 Ответы, указания, решения

Вниманию наших читателей (9, 28)

## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье В.Арнольда*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Физики и математики на монетах мира*

12 июня 2007 года выдающемуся математику современности академику  
Владимиру Игоревичу Арнольду исполнилось 70 лет.

На протяжении многих лет В.И.Арнольд является членом редакционного совета журнала «Квант». Он написал для нашего журнала много ярких, интересных статей. Мы желаем Владимиру Игоревичу крепкого здоровья и новых достижений во имя науки.

# Современная математика, восходящая к Эйлеру

В.АРНОЛЬД

## §1. Дзета-функция Эйлера и малая теорема Ферма

Дроби бывают сократимые и несократимые. Сопоставим дроби  $p/q$  точку  $r$  на плоскости с декартовыми координатами  $(p, q)$ . Если дробь сократима, то эта целая точка *делима*: на отрезке, соединяющем  $r$  с началом координат, есть и другие целые точки.

Нарисуем все неделимые целые точки в круге  $p^2 + q^2 \leq 5^2$  (рис.1; начало координат будем считать делимой точкой, так как ноль делится нацело на что угодно). Неделимых точек в этом круге 48, а всего в нем 81 целая точка. Неделимые точки составляют  $48/81 \approx 59\%$  от числа всех целых точек в этом круге.

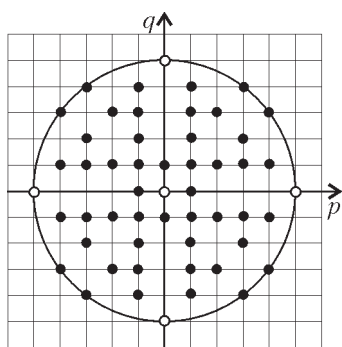


Рис.1. Неделимые целые точки в круге радиуса 5

Эйлер задал себе вопрос: а что будет, если увеличивать радиус круга? Будет ли доля неделимых целых точек стремиться при этом к какому-нибудь пределу, и к какому именно?

Он решил этот вопрос, доказав следующее:

**Теорема Эйлера 1.** Доля неделимых целых точек среди всех целых точек круга  $p^2 + q^2 \leq R^2$  стремится при  $R \rightarrow \infty$  к пределу, который равен

$$(1) \quad \frac{6}{\pi^2} \approx 0,608 \dots$$

Этот предел Эйлер выразил еще одной замечательной формулой:

$$(2) \quad \frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

Заметьте, что  $\pi^2/6 \approx 1,64$ , так что сумма первых двух

членов (1,25) еще далека от суммы этого не так уж быстро сходящегося ряда.

**Определение.** Сумма ряда (сходящегося при  $s > 1$ )

$$(3) \quad \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = \zeta(s)$$

называется значением в точке  $s$  *дзета-функции*  $\zeta$ .

Таким образом, теорема Эйлера выражает предельную долю неделимых целых точек плоскости  $\mathbb{R}^2$  (называемую также «вероятностью несократимости дроби  $p/q$ ») формулой

$$(4) \text{ (вероятность неделимости вектора } \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2) = \frac{1}{\zeta(2)}.$$

Его доказательство доставляет также и аналогичный результат о целых точках  $s$ -мерного пространства  $\mathbb{R}^s$ :

$$(5) \text{ (вероятность неделимости вектора } \mathbf{r} \in \mathbb{R}^s) = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Например, эта вероятность убывает при росте размерности  $s$ .

Доказательство приведенный выше теоремы Эйлера (и формул (2), (4), (5)) содержит ряд замечательных идей Эйлера, которые привели к созданию целых областей современной математики – вероятностной теории чисел, теории градуированных алгебр с их рядами Пуанкаре, «геометрии чисел» и т.д.

Но Эйлер начинал с совершенно понятных и элементарных рассуждений, которые я сейчас и опишу.

**Лемма 1.** Целочисленный вектор является делимым, если и только если существует простое число  $p$ , на которое делится каждая его компонента.

**Доказательство.** Делимость на произведение простых множителей вызывает делимость на каждый из них. Поэтому лемма 1 вытекает из разложимости каждого (большее 1) целого числа на простые множители.

**Лемма 2.** Вероятность делимости целочисленного вектора  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$  на 2 равна  $1/4$ .

**Доказательство.** Для делимости вектора с компонентами  $u$  и  $v$  на 2 необходима и достаточна делимость на 2 как целого числа  $u$ , так и целого числа  $v$ . Каждое из этих событий имеет вероятность  $1/2$ , и они независимы. Поэтому делящиеся на 2 целочисленные векторы составляют 25% всех целочисленных векторов плоскости.

**Лемма 3.** Вероятность делимости целочисленного вектора  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^s$  на  $p$  равна  $1/p^s$ .

**Доказательство.** Вероятность делимости целого числа  $u$  на  $p$  равна  $1/p$  (так как арифметическая прогрессия с разностью  $p$  составляет при большом  $R$  почти  $(1/p)$ -ю часть отрезка  $|u| \leq R$ ). Так как  $s$  компонент  $(u_1, \dots, u_s)$  вектора  $\mathbf{r}$  независимы, вероятность делимости вектора на  $p$  равна произведению вероятностей делимости на  $p$  всех  $s$  его компонент, т.е. равна  $(1/p)^s$ .

**Лемма 4.** Вероятность неделимости вектора  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^s$  на  $p$  равна  $1 - \frac{1}{p^s}$ .

**Доказательство.** Вектор  $\mathbf{r}$  либо делится на  $p$ , либо не делится. Зная вероятность делимости из леммы 3, получаем для неделимости дополняющую до 1 вероятность.

**Лемма 5.** Делимости на разные простые числа – события независимые.

Например, доля делящихся на 3 целых чисел среди всех четных чисел такая же, как и среди всех целых чисел (или среди всех нечетных чисел), – она составляет  $1/3$ . Это видно из того, что среди  $p_2$  остатков  $(1p_1) \dots (p_2 p_1)$  от деления на простое число  $p_2$  встречаются по разу все остатки  $(1, \dots, p_2)$  (каково бы ни было простое число  $p_1$ ). Ибо, если бы числа  $ip_1$  и  $jp_1$  (где  $1 \leq i < j \leq p_2$ ) давали при делении на  $p_2$  одинаковые остатки, то разность  $(j - i)p_1$  делилась бы на  $p_2$ , что при  $0 < j - i < p_2$  невозможно.

**Лемма 6.** Вероятность неделимости целочисленного вектора  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^s$  ( $s > 1$ ) на простые числа 2, 3, ...,  $p$  равна

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

**Доказательство.** Вероятность одновременного наступления независимых событий равна произведению вероятностей наступления каждого из них. Поэтому лемма 6 вытекает из лемм 4 и 5.

**Лемма 7.** Вероятность неделимости целочисленного вектора  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^s$  ( $s > 1$ ) ни на какое целое число равна бесконечному произведению по всем простым числам  $p$

$$(6) \quad \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) := \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \right].$$

Это – прямое следствие лемм 1 и 6, нужно только проверить, что указанный в формуле (6) предел существует (при  $s > 1$ ). Эта сходимости легко выводится из сходимости при  $n > 1$  ряда

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

$$\left(\text{или даже интеграла } \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}\right).$$

Детали доказательства леммы 7 я оставляю читателю.

Приведенные леммы Эйлера доставляют для вероятности несократимости выражение (6). Эйлер сумел получить для него и формулы (1), (2), (4), (5). Этот вывод основан на совершенно других идеях Эйлера (которые включены в современную математику под названием «теории рядов Пуанкаре градуированных алгебр»).

Начнем со следующих элементарных замечаний, помещенных Эйлером в его замечательном учебнике «Введение в анализ» (содержащем естественно предшествующие анализу положения, которые, к сожалению, в современных изложениях анализа обычно отсутствуют).

Степенью одночлена  $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_s^{m_s}$  от  $s$  переменных  $(x_1, \dots, x_s)$  называется целое число  $m = m_1 + \dots + m_s$ .

Например, при  $s = 2$  имеется 4 одночлена степени 3 (с коэффициентом единица):

$$\{x^3, x^2y, xy^2, y^3\}$$

(если обозначать  $x_1$  через  $x$  и  $x_2$  через  $y$ ).

Эйлер поставил вопрос: сколько существует одночленов (с коэффициентом единица) степени  $m$  от  $s$  переменных?

Эта задача элементарной комбинаторики допускает простое комбинаторное решение, но Эйлер придумал еще и другое рассуждение, доставляющее гораздо больше следствий.

Начнем с одночленов  $(1, x, x^2, x^3, \dots)$  от одной переменной  $x$ . В этом случае имеется ровно один (считая коэффициент одночлена равным 1) одночлен любой степени  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Чтобы записать ответ: «число (каких-либо объектов, зависящих от натурального числа  $m$ ) ровно  $p_m$ », Эйлер использует «производящую функцию» (сегодня называемую «рядом Пуанкаре», по следовавшему за Эйлером великому французскому математику):

$$(7) \quad P(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots$$

В этих терминах предыдущий ответ на вопрос о числе одночленов от одной переменной записывается так:

**Предложение 1.** Ряд Пуанкаре градуированной степенью алгебры многочленов от одной переменной есть рациональная функция

$$(8) \quad P(t) = 1 + t + t^2 + \dots = \frac{1}{1-t}.$$

Чтобы вывести отсюда формулу для числа многочленов от двух переменных, Эйлер предложил перемножить два ряда вида (8):

$$(9) \quad P(x)P(y) = (1 + x + x^2 + \dots)(1 + y + y^2 + \dots) = 1 + (x + y) + (x^2 + xy + y^2) + \dots$$

В стоящем в правой части формулы (9) ряду каждый

одночлен (с коэффициентом 1) от переменных  $x$  и  $y$  встречается ровно однажды. Поэтому, если заменить аргументы  $x$  и  $y$  на  $t$ , в правой части получится ряд, в котором коэффициент при  $t^m$  будет равен числу  $P_n$  одночленов степени  $m$  (с равными 1 коэффициентами) от переменных  $x$  и  $y$ .

Таким образом, мы получаем из формул (8) и (9) для ряда Пуанкаре градуированной степенью алгебры многочленов от двух переменных

$$P_0 + P_1 t + P_2 t^2 + \dots$$

выражение

$$P(t) = \frac{1}{(1-t)^2}.$$

Совершенно так же Эйлер доказал следующее:

**Предложение 2.** Ряд Пуанкаре градуированной степенью алгебры многочленов от  $s$  переменных является рациональной функцией

$$P(t) = \frac{1}{(1-t)^s}.$$

Явное выражение для чисел  $P_m$  (в виде чисел сочетаний) получается отсюда по формуле бинома Ньютона (с показателем  $-n$ ).

Вдохновляясь этими результатами абстрактной алгебры, Эйлер преобразовал доказанную им формулу (6) (леммы 7)) следующим образом. Заменим множитель

$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$  на обратный множитель

$$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots$$

При (формальном) перемножении таких рядов, соответствующих всем простым числам  $p$ , мы получим ряд, общий член которого имеет вид

$$\frac{1}{2^{a_2 s}} \cdot \frac{1}{3^{a_3 s}} \cdot \frac{1}{5^{a_5 s}} \cdot \dots = \frac{1}{n^s}, \text{ где } n = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5} \cdot \dots$$

Тем самым доказана (для формальных рядов, по проверке сходимости при  $s > 1$  несложная) замечательная формула Эйлера для  $\zeta$ -функции:

**Теорема Эйлера 2.** Следующее произведение по простым  $p$  равно (при  $s > 1$ ) следующей сумме по натуральным  $n$

$$\prod_{p \geq 2} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} \quad (:= \zeta(s)).$$

Так Эйлер получил формулы (4) и (5).

Вычисление значений  $\zeta$ -функции при фиксированном значении аргумента  $s$  не просто, но значение  $\zeta(2) = \pi^2/6$  Эйлер умел получать разными способами.

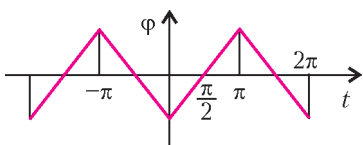


Рис.2. «Пи́ла»  $f$

«Пи́ла»  $f$  задается как  $2\pi$ -периодическая функция аргумента  $t$ , равная  $|t| - \frac{\pi}{2}$  при  $|t| \leq \pi$  (рис.2). Ищем

разложение в ряд Фурье

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt),$$

при четных  $k$  получаем  $a_k = 0$ , а при нечетных —

$a_k = \left(-\frac{4}{\pi}\right) \frac{1}{k^2}$ . Вычисляя  $f(0)$  при помощи (сходящегося) ряда Фурье, мы находим

$$-\frac{\pi}{2} = f(0) = -\frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2},$$

так что сумма обратных квадратов нечетных чисел есть

$$A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Вводя обозначение  $B$  для

$$\zeta(2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^2},$$

мы получаем  $B = A + B/4$ , откуда  $\zeta(2) = B = \frac{4}{3}A = \frac{\pi^2}{6}$ , что и доказывает теорему Эйлера 2.

#### Замечание: о равномерном распределении неделимых точек

Я предполагаю, что распределение неделимых целых точек на плоскости обладает некоторой асимптотической равномерностью (резко отличающей его от, например, набора целых точек полуплоскости, составляющего половину множества всех целых точек плоскости, но распределенную неравномерно).

Чтобы определить эту равномерность распределения, начнем, например, с (любой) гладкой функции  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , равной нулю всюду вне некоторого круга. Растягивая функцию  $h$  в  $K$  раз, определим новую функцию  $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  соотношением  $H(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) = h(\mathbf{r}/K)$  для всякого  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$  (где  $\mathbf{r}_0$  — некоторый фиксированный вектор). Сравним теперь сумму значений растянутой функции  $H$  во всех целых точках плоскости, обозначим эту сумму через  $SH$ , и сумму значений той же растянутой функции  $H$  во всех неделимых целых точках плоскости, обозначим эту сумму через  $\Sigma H$ .

Свойство равномерной распределенности состоит в том, что при больших  $K$  вторая сумма составляет приблизительно такую долю первой, какую долю составляют изучаемые (неделимые) точки среди всех целых точек,  $\lambda = 6/\pi^2 = 1/\zeta(2)$ :

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\Sigma H}{SH} = \lambda$$

(при любом векторе  $\mathbf{r}_0$ , сдвигавшем функцию  $H$ ).

Если бы суммирование в  $\Sigma$  происходило не по равномерно распределенным на плоскости неделимым точкам, а, например, по целым точкам полуплоскости, то функции  $h$  и  $H$  могли бы быть тождественно равными 0 в этой полуплоскости. Тогда  $(\Sigma H)/(SH) = 0$ ,



хотя целые точки полуплоскости составляют долю  $\lambda = 1/2$  от всех целых точек плоскости, так что целые точки полуплоскости распределены среди всех целых точек плоскости неравномерно.

Традиция приписывает изобретение дзета-функции Риману, жившему на сотню лет позже описанной выше работы Эйлера. Фурье тоже жил много позже Эйлера (но его ряды использовались задолго до него и Эйлером, и Лагранжем, и даже Ньютоном). Ньютон считал изобретение метода «параллелограмма Ньютона» (доставляющего своеобразный вариант теории преобразования Фурье, рядов Лорана и рядов Пуансо) своим самым важным вкладом в математику, позволяющим решать всевозможные уравнения: алгебраические и функциональные, дифференциальные и интегральные, обыкновенные и в частных производных.

В современном университетском образовании все эти важнейшие теории обычно не упоминаются, и даже работа Эйлера о дзета-функции незаслуженно забыта.

Сделанный Эйлером подсчет вероятности несократимости дробей доставляет также асимптотику замечательной функции Эйлера  $\varphi$  натурального аргумента  $n$ :

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\varphi$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4

Определяется значение  $\varphi(n)$  так: оно равно числу тех из остатков  $\{1, 2, \dots, n\}$  от деления на  $n$ , каждый из которых взаимно прост с  $n$  (так что его наибольший общий делитель с  $n$  равен 1).

**Пример.** Четыре взаимно простых с  $n = 12$  остатка от деления на 12 – это  $\{1, 5, 7, 11\}$ . Для простого числа,  $n = p$ , имеем, очевидно,

$$\varphi(p) = p - 1.$$

Для квадрата простого числа,  $n = p^2$ , не взаимно простых с  $n$  остатков имеется  $p$ , поэтому

$$\varphi(p^2) = p^2 - p = (p - 1)p.$$

Точно так же, для  $n = p^a$  получаем

$$\varphi(p^a) = (p - 1)p^{a-1}$$

(из-за  $p^{a-1}$  делящихся на  $p$  остатков).

Если  $n = ab$  – произведение двух взаимно простых чисел, то функция Эйлера, очевидно, мультипликативна,

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

Все это дает явную формулу для значения  $\varphi(n)$ , если разложение  $n$  на простые множители известно.

Но приведенная выше таблица показывает, что функция  $\varphi$  сильно осциллирует при изменении значения аргумента: то растет, то убывает (до малой доли значения аргумента).

**Теорема Эйлера 3.** Среднее арифметическое значение функции Эйлера  $\varphi$ ,

$$\hat{\varphi}(n) = \frac{\varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n)}{n},$$

ведет себя при  $n \rightarrow \infty$  как  $cn$ , где постоянная  $c$

есть

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{\varphi}(n)}{n} = \frac{6}{\pi^2} = \frac{1}{\zeta(2)} \approx 0,608 \dots$$

Этот результат вытекает из доказанной выше теоремы Эйлера 1, потому что взаимная простота остатка  $a$  с числом  $n$  эквивалентна неделимости целочисленного вектора  $(n, a)$ .

Функция Эйлера  $\varphi$  естественно возникла у него при попытке обобщения малой теоремы Ферма. Эта теорема Ферма состоит в сравнении по модулю простого числа  $p$

$$a^{p-1} \equiv 1(p)$$

для любого взаимно простого с  $p$  числа  $a$ . Она означает периодичность последовательности остатков от деления членов геометрической прогрессии  $a, a^2, a^3, \dots$  на  $p$  (с периодом  $T = p - 1$ ).

Рассмотрим, например, остатки от деления членов геометрической прогрессии  $\{2^t : t = 1, 2, \dots\}$  на  $p = 13$ :

$$\{2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7, 1\}.$$

Двенадцатый член прогрессии равен 1, поэтому тринадцатый равен первому и т.д. (период  $T = 12$ ).

Эйлер поставил себе вопрос: а как ведет себя геометрическая прогрессия из остатков от деления на натуральное число  $n$ , уже не являющееся простым?

**Теорема Эйлера 4.** Последовательность остатков от деления на  $n$  членов геометрической прогрессии  $\{a, a^2, a^3, \dots\}$ , знаменатель которой взаимно прост с  $n$ , периодична, и ее период  $T$  является делителем целого числа  $\varphi(n)$ :

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1(n), \quad \varphi(n) = T(n)N(n).$$

**Пример.** Остатки от деления членов геометрической прогрессии  $\{2^t : t = 1, 2, \dots\}$  на  $n = 15$

$$\{2, 4, 8, 1\}, \{2, 4, 8, 1\}, \dots$$

образуют последовательность периода  $T = 4$ . Значение функции Эйлера  $\varphi(15) = \varphi(3)\varphi(5) = 2 \cdot 4 = 8$  делится на 4.

**Доказательство теоремы 4.** Рассмотрим все  $\varphi(n)$  остатков от деления на  $n$ , взаимно простых с  $n$ . Эти остатки образуют (мультипликативную) группу: если  $a$  и  $b$  взаимно просты с  $n$ , то произведение  $ab$  тоже взаимно просто с  $n$ . Произведения  $a$  на все (взаимно простое с  $n$ ) остатки  $b$  различны (иначе произведение  $a(b_1 - b_2)$  делилось бы на  $n$ , а так как  $a$  взаимно просто с  $n$ , то  $b_1 - b_2$  делилось бы на  $n$ , будучи меньше  $n$ ).

Стало быть, одно из  $\varphi(n)$  произведений остатков  $ab$  равно 1 (так как эти  $\varphi(n)$  различных произведений все являются взаимно простыми с  $n$  остатками от деления на  $n$  и, значит, пробегает все  $\varphi(n)$  взаимно простых с  $n$  остатков, в том числе и остаток 1). Следовательно, для любого взаимно простого с  $n$  остатка  $a$  существует такой взаимно простой с  $n$  остаток  $b$ , что  $ab = 1$  (так что остаток  $b$  обратен остатку  $a$  в нашей мультипликативной группе).

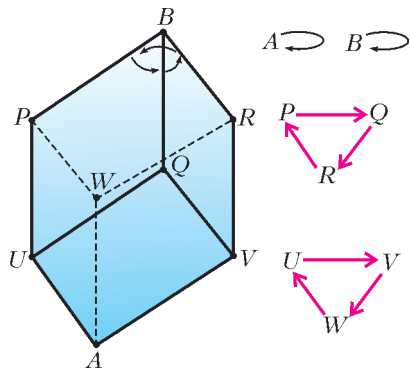


Рис.3. Вращение куба вокруг диагонали АВ

Рассмотрим теперь действие операции умножения на  $a$  на все элементы описанной группы из  $\phi(n)$  взаимно простых с  $n$  остатков. Эта операция переставляет  $\phi(n)$  элементов нашей группы (так как умножение на  $b = a^{-1}$  действует в обратную сторону).

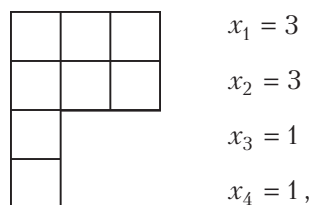
Любая перестановка элементов конечного множества разбивается на циклы. Например, поворот куба на угол  $120^\circ$  вокруг его главной диагонали АВ переставляет его 8 вершин. При этом две вершины (концы этой диагонали) остаются на месте, т.е. каждая из них уже является циклом, остальные же 6 вершин разбиваются на 2 цикла (рис.3).

Разбиение перестановки на циклы удобно описывать при помощи специальной картинке, называемой *диаграммой Юнга*. Диаграмма Юнга перестановки  $N$  элементов состоит из  $N$  единичных квадратиков, стоящих в столькох строках, сколько у перестановки циклов. При этом элементы каждого цикла заполняют соответствующую строку (в порядке прохождения цикла). В первой строке ставится самый длинный цикл, во второй – следующий по длине и т.д., так что длины всех  $y$  строк  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_y$  образуют разбиение

$$N = x_1 + x_2 + \dots + x_y$$

числа переставляемых элементов  $N$ .

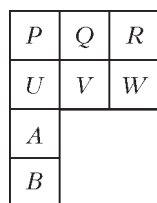
**Пример.** Диаграмма Юнга вращения куба (см. рис.3) имеет вид



соответствует разбиению 8 вершин куба:

$$8 = 3 + 3 + 1 + 1$$

и заполняется циклами вращения так:



Доказательство теоремы 4 основано на следующем факте:

**Лемма.** Диаграмма Юнга перестановки  $\phi(n)$  взаимно простых с  $n$  остатков от деления на  $n$ , умножающей каждый такой остаток  $b$  на фиксированный такой остаток  $a$ , является прямоугольником (т.е. все циклы этой перестановки имеют одинаковую длину).

**Доказательство.** Пусть  $\{ab, ab^2, \dots, a^T b = b\}$  – цикл длины  $T$ . Если  $c$  – какой-либо остаток, взаимно простой с  $n$ , то мы можем представить его в виде произведения  $c = bd$ , где  $d$  – взаимно простой с  $n$  остаток (а именно,  $d = cb^{-1}$ ).

Умножая  $c$  на  $a$  много раз, мы получим

$$ac = (ab)d, \quad a^2c = (a^2b)d, \quad a^3c = (a^3b)d, \dots$$

$$\dots, \quad a^Tc = (a^Tb)d = bd = c,$$

так что  $T$  является одним из периодов и для начинающегося в  $c$  цикла.

Стало быть, наименьший период начинающегося в  $c$  цикла является делителем наименьшего периода начинающегося в  $b$  цикла. Но  $b$  и  $c$  можно поменять местами – значит, наименьшие периоды начинающихся в  $b$  и в  $c$  циклов делят друг друга, т.е. совпадают (что и доказывает лемму).

**Следствие.** Период  $T$  циклов перестановки умножения на  $a$  взаимно простых с  $n$  остатков от деления на  $n$  является делителем числа  $\phi(n)$ .

**Доказательство.** Площадь прямоугольника равна произведению его основания на высоту, поэтому

$$\phi(n) = T(n)N(n),$$

где  $T$  – (наименьший) период операции умножения на  $a$ , а  $N$  – число циклов этой перестановки (всех  $\phi(n)$  взаимно простых с  $n$  остатков от деления на  $n$ ).

Тем самым теорема 4 доказана: ее топологический смысл выражает именно приведенная лемма о прямоугольности диаграммы Юнга операции умножения на остаток  $a$ .

Теорема 4 приводит к очень естественному (но все еще решенному не до конца) вопросу: как ведет себя наименьший период  $T(a, n)$  при  $n \rightarrow \infty$  (аргумент  $a$  вставлен потому, что операции умножения на разные взаимно простые с  $n$  остатки имеют, вообще говоря, разные (наименьшие) периоды)?

**Пример.** Для  $a = 2$  нетрудно найти следующие (наименьшие) периоды операции умножения на 2 остатков от деления на  $n$ :

$n$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
$T$	2	4	3	7	10	12	4	8	18	6

Последовательность значений  $T(n)$  ведет себя на вид довольно хаотическим образом. Средние арифметические

$$\hat{T}(2k+1) = \frac{\sum_{m=1}^k T(2m+1)}{k}$$

ведут себя более регулярным образом, но и их асимптотическое поведение изучено недостаточно.

Один из естественных подходов к этому вопросу состоит в следующем. Число делителей  $\tau$  большого целого числа  $n$  растет при росте  $n$  в среднем как  $\ln n$ . Это – только рост среднего арифметического, сама величина  $\tau(n)$  может сильно уклоняться от этого среднего: например, если  $n = p$  простое число, то  $\tau(p) = 2$ , а если  $n = m!$ , то величина  $\tau$  (при достаточно большом  $m$ ) сколь угодно велика.

Можно сосчитать и средний рост суммы делителей с ростом числа  $n$ :

$$\Sigma(n) \sim cn$$

(постоянная  $c$  здесь есть  $\zeta(2)$ , и это можно усмотреть из приведенных выше доказательств теоремы Эйлера о вероятности несократимости дроби).

Аналогичным образом доказывается (средняя) асимптотика суммы  $s$ -х степеней делителей числа  $n$ ,

$$\Sigma_s(n) \sim c_s n^s, \quad c_s = \zeta(s+1).$$

Исходя из этих средних асимптотик, можно было бы ожидать соответствующей асимптотики для среднего арифметического делителей числа  $n$ ,

$$D(n) = \frac{\Sigma(n)}{\tau(n)}.$$

Если бы среднее (по  $n$ ) от дроби равнялось отношению среднего от числителя к среднему от знаменателя, то мы получили бы для среднего арифметического по  $n$  значения среднего делителя выражение

$$\widehat{D}(n) \sim ? \frac{cn}{\ln n}.$$

Однако эксперимент показывает, что средние арифметические средних делителей гораздо больше, и ответ на самом деле имеет вид

$$\widehat{D}(n) \sim \frac{\tilde{c}n}{\sqrt{\ln n}}.$$

Возвращаясь к наименьшему периоду  $T(n)$  операции умножения на  $a$  остатков от деления на  $n$ , мы хотели бы использовать теорему Эйлера о том, что число  $T(n)$  является одним из делителей числа  $\varphi(n)$ .

Если бы выполнялись следующие предположения:

1) свойства делимости (средние асимптотики) для числа делителей  $\hat{\tau}(m)$ , для суммы делителей  $\hat{\Sigma}(m)$  и для среднего делителя  $\widehat{D}(m)$  чисел  $m$  вида  $\varphi(n)$  такие же, как для обычных чисел  $m$  такого же (в среднем) порядка величины,

2) выбираемый богом в качестве наименьшего периода  $T(n)$  делитель числа  $\varphi(n)$  ведет себя (асимптотически в среднем) как среднее арифметическое всех делителей этого целого числа,

то из предыдущих асимптотик можно было бы вывести предположительное среднее поведение периода  $T(n)$  вида

$$\widehat{T}(n) \sim \widehat{D}(\hat{\varphi}(n)) \sim \frac{\tilde{c}\hat{\varphi}(n)}{\sqrt{\ln \hat{\varphi}(n)}} \sim \frac{c'n}{\sqrt{\ln n}}.$$

Но эксперименты (доведенные сейчас Ф.Аикарди до  $n$  порядка  $10^{20}$ ) указывают, по-видимому, на другое поведение средних  $\widehat{T}$ . Значит, хотя бы одно из выписанных выше предположений 1 и 2 неверно. Было бы интересно узнать, как именно нарушаются предположения 1 и 2. Это интересно не только ради исследования средних  $\widehat{T}$ , но и само по себе.

## §2. Эйлера теория вращения твердого тела и эйлера гидродинамика

Моряки встретились к XVIII веку со следующей трудностью определения своего места на карте: для ориентирования измерялись координаты звезд на небесной сфере в момент измерения, и использовать эти измерения можно было, только зная точно, в какой именно момент измерения производились.

Сигналов точного времени по радио тогда еще не передавали, поэтому для определения времени приходилось пользоваться хронометрами. Но хронометр, особенно в длительном плавании, склонен начинать сильно врать. Сказываются и качка, и вращение Земли, и вариации поля тяготения, влияющие на период собственных колебаний маятника, и даже климатические условия (тропическая жара удлиняет маятник, а морозы укорачивают).

Английское адмиралтейство объявило поэтому большую премию за решение проблемы определения точного времени. Эйлер придумал остроумный путь решения этой проблемы: использовать в качестве часов Луну.

Движение четырех (открытых Галилеем) спутников Юпитера к тому времени уже пытались использовать вместо часов. Но для этого нужен, кроме хорошей теории вовсе не простого движения спутников, хороший телескоп, так как «циферблат» этих часов уж очень мал: Юпитер далеко, и спутники не всегда хорошо видны.

Луна гораздо ближе, наблюдать ее легко, так что задача была бы решена, если бы была построена достаточно точная теория малых колебаний Луны около своего центра тяжести (с учетом возмущений, вносимых прежде всего Солнцем и Землей в сложном орбитальном движении Земли вокруг Солнца и Луны вокруг Земли).

Вот эту-то теорию Эйлер и решил создать. Его замечательная работа на эту тему была опубликована в 1765 году – он рассматривал не только Луну, но и движение любого твердого тела вокруг своего центра тяжести прежде всего по инерции, а потом и вследствие возмущающих влияний других тел.

Замечательный результат этих исследований Эйлера доставляет, прежде всего, полное решение задачи об инерциальном движении произвольного твердого тела вокруг своего центра тяжести. Эта задача оказалась «вполне интегрируемой гамильтоновой системой», и Эйлер нашел нужную полную систему первых интегралов в инволюции.

Из его результатов вытекало, например, что стационарные вращения вокруг всех трех осей эллипсоида инерции твердого тела существуют, но вращение вокруг средней оси инерции неустойчиво, в то время как

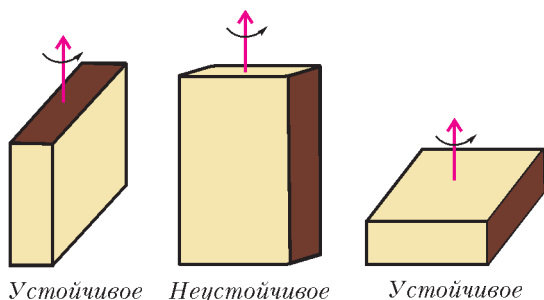


Рис.4. Устойчивое и неустойчивое вращение

и вращение вокруг большой оси инерции, и вращение вокруг малой оси инерции устойчивы (рис.4). Это значит, что, например, спичечный коробок, брошенный так, что он вращается вокруг длинной или вокруг короткой оси, так и будет вращаться, а если бросить его, закружив вокруг средней оси, то он будет кувыряться хаотически (что я не раз демонстрировал студентам на лекции – здесь лучше всего бросать упакованную книгу, а не кирпич, и шесть граней бросаемого тела лучше выкрасить по-разному, чтобы неустойчивость была сразу видна).

Топологическая причина различия состоит в разнице линий пересечения эллипсоида со сферами с центром в начале координат (рис.5).

Около конца  $A$  большой полуоси эллипсоида расстояние до центра эллипсоида максимально, и линии, где это расстояние немного меньше длины большей полуоси

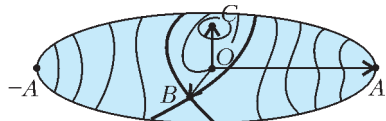


Рис.5. Линии уровня расстояний до начала координат на поверхности эллипсоида

$OA$ , являются окружающими точку максимума  $A$  замкнутыми кривыми на поверхности эллипсоида. При малом отклонении направления оси вращения от направления  $OA$  соответствующий вектор переходит от вектора  $OA$  на одну из таких замкнутых кривых, близких к точке  $A$ , и начинает совершать вблизи  $OA$  малые колебания, так что движение, хотя и перестает быть стационарным вращением, остается к нему близким.

Точно так же, около конца  $C$  малой оси расстояние до центра  $O$  достигает минимума, и линии, где оно лишь немного превышает минимальное расстояние  $|OC|$ , – замкнутые кривые на поверхности эллипсоида, близкие к точке  $C$ . Соответствующее возмущенное вращение остается близким к стационарному.

Напротив того, около конца  $B$  средней оси функция расстояния до центра эллипсоида  $O$  имеет седловую точку. Линия уровня, где расстояние точно равно  $|OB|$ , представляет собой две (пересекающиеся в точке  $B$ ) окружности, а линия уровня, близкого к  $|OB|$ , состоит из двух замкнутых кривых, далеко уходящих от точки  $B$  (вплоть даже до противоположного конца,  $-B$ , средней оси). При возмущении стационарного вращения вокруг оси  $OB$  возникает совершенно непохожее на него «кувыркание», в результате которого тело может даже перевернуться почти что вверх ногами.

Луна сейчас благополучно совершает малые колебания, будучи повернута к Земле всегда в основном одной

стороной и лишь немного колеблясь около этого «маятникового» положения. Напротив того, искусственные спутники Земли, в зависимости от того, как ими управляют, могут совершать все описанные Эйлером движения, так что теория Эйлера и сегодня является основой расчета борьбы с кувыранием спутников.

Теория Эйлера позволяет детально разобрать колебания Луны около своего обычного положения, так что, наблюдая фазу этих колебаний, можно использовать ее как стрелку часов и узнать момент наблюдения.

Адмиралтейство, однако, наградило не Эйлера, а часовщика, решившего проблему определения времени совершенно иным путем. А именно, он предложил подвешивать маятник  $AD$  трехзвенным подвесом  $ABCD$  (рис.6). Стержни  $AB$  и  $CD$  имеют вдвое меньший коэффициент теплового расширения, чем соединяющий их стержень  $BC$ . В результате тепловое удлинение стержней  $AB$  и  $CD$  опускает груз на столько же, на сколько поднимает его тепловое удлинение стержня  $BC$ . Поэтому эффективная длина маятника  $AD$  при тепловом расширении стержней не меняется, а потому не меняется и период колебаний этого маятника: хронометр стал нечувствительным к изменению температуры!

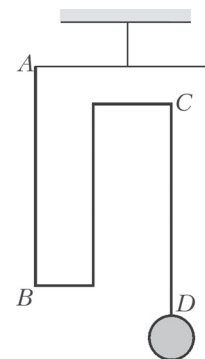


Рис.6. Компенсирующий тепловое расширение маятник

Разбирая к ее двухсотлетию статью Эйлера о вращении Луны, я заметил в 1965 году, что рассуждения Эйлера доказывают гораздо больше, чем он указал. А именно, вся теория Эйлера почти без изменений переносится на исследование геодезических линий на многообразиях групп Ли, снабженных левоинвариантной (или правоинвариантной) римановой метрикой.

Если начать с группы  $SO(3)$  вращений трехмерного евклидова пространства, то эти геодезические доставляют движения твердого тела относительно его центра тяжести, изученные Эйлером. Но теорию Эйлера можно применять и к другим группам, и получающиеся из его результатов заключения вовсе не очевидны.

В качестве очень простого примера можно взять двумерную группу аффинных преобразований прямой,  $x \mapsto ax + b$ . Считая преобразования сохраняющими ориентацию ( $a > 0$ ), мы можем отождествить эту группу с полуплоскостью  $\{a, b : a > 0\}$ . В этом случае левоинвариантная метрика Эйлера доставляет в точности модель Пуанкаре геометрии Лобачевского,

$$ds^2 = \frac{da^2 + db^2}{a^2},$$

так что теория Эйлера превращается в геометрию Лобачевского. Роль стационарных вращений Эйлера играют в этом случае те прямые и окружности евклидовой полуплоскости  $a > 0$  с декартовыми координатами  $(a, b)$ , которые перпендикулярны линии «абсолют»,  $a = 0$  (рис.7).

В качестве гораздо более богатого примера применения теории эйлера вращения твердого тела рассмот-



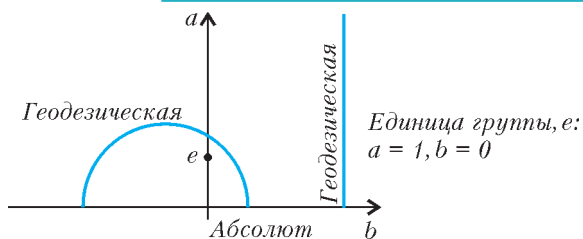


Рис.7. Геодезические модели Пуанкаре плоскости Лобачевского

рим группу  $SDiff M$  «несжимаемых» диффеоморфизмов многообразия  $M$  (т.е. диффеоморфизмов  $M \rightarrow M$ , сохраняющих некоторый элемент объема  $\tau$  на  $M$ ). Геодезические правоинвариантной метрики на этой группе представляют собой (эйлеровы) течения несжимаемой жидкости вдоль многообразия  $M$ .

Эйлерова теория устойчивости стационарных движений твердого тела превращается в этом случае в обобщение теоремы Рэля об устойчивости двумерных течений несжимаемой жидкости, когда профиль скорости не имеет точек перегиба (рис.8).

Течения с точками перегиба оказываются в этом

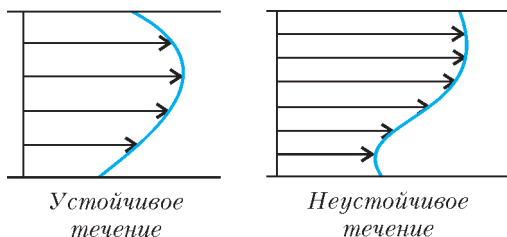


Рис.8. Теорема Рэля об устойчивости плоскопараллельных течений несжимаемой жидкости

случае аналогичными стационарным вращениям твердого тела вокруг средней оси инерции – общая теорема устойчивости Эйлера применяется в обоих случаях одинаково, но при переходе от трехмерной группы  $SO(3)$  к бесконечномерной группе  $SDiff M$  из теоремы Эйлера получается (обобщенная) теорема Рэля.

На устойчивость геодезических многообразия оказывает большое влияние его «секционные кривизны по двумерным направлениям». А именно, отрицательность кривизны вызывает экспоненциальное с течением времени разбегание геодезических (с близкими начальными условиями). Теория Эйлера позволяет вычислить эти секционные кривизны (для групп с левоинвариантными или правоинвариантными метриками).

Применив эти вычисления к группам несжимаемых диффеоморфизмов поверхностей, я получил много двумерных направлений сильно отрицательной кривизны.

Например, применяя эти оценки к двумерной гидродинамике на поверхности тора (и к течениям пассатного типа), я убедился, что первоначально малые возмущения начального поля скоростей вырастают примерно в  $10^5$  раз (от километрового размера грозы до изменений погоды планетарного масштаба) за время порядка месяца. Это означает, что динамический прогноз погоды на сильно превышающее неделю время будет оставаться невозможным, как бы сильно ни будут усовершенствованы и компьютеры, и методы вычислений, и регистрирующие исходное состояние погоды датчики. Действительно, слегка изменив начальные скорости в каждом кубическом километре (даже так, чтобы средние по соседнему десятку кубических километров при этом не менялись), мы приходим к такому новому начальному условию, которое датчики не отличат от старого, но которое приведет тайфун через пару недель не в Новый Орлеан, куда он должен был попасть по старому сценарию, а, скажем, в Бомбей.

Можно только поражаться, насколько значительными оказываются приложения фундаментальных теорий и идей Эйлера даже в тех случаях, когда сам он ограничился при их изложении первым содержательным случаем (группы  $SO(3)$  в нашем примере), а все далекие обобщения получены лишь недавно.

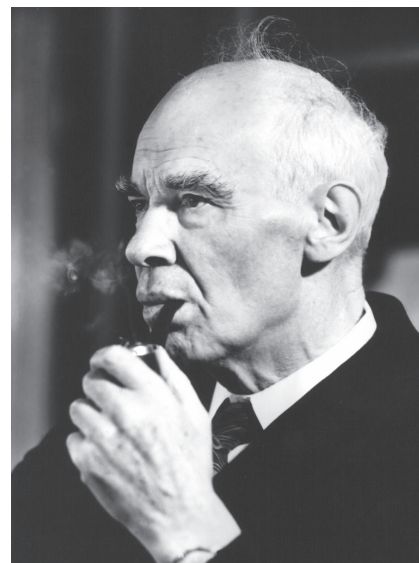
**Вниманию наших читателей!**


28 марта 2008 года исполняется сто лет со дня рождения выдающегося физика, академика Исаака Константиновича Кикоина. В связи с этим в нашей стране на высоком государственном уровне запланированы множественные специальные мероприятия. Для нас же Исаак Константинович Кикоин был прежде всего создателем и первым Главным редактором журнала «Квант».

Редакционная коллегия, редакционный совет и редакция журнала «Квант» объявляют ближайший год в журнале «Квант» – «годом Кикоина». И вот что под этим подразумевается.

Мы планируем в шести ближайших номерах журнала опубликовать разнообразные воспоминания об академике И.К.Кикоине, а в научных статьях и других материалах журнала уделить особое внимание тем областям физики и техники, в которых выдающимся образом раскрылся научный и организационный талант этого удивительного человека, в особенности – атомной и ядерной физике и энергетике. Нами готовится к изданию специальный, посвященный юбилею И.К.Кикоина выпуск серии «Библиотечка «Квант».

Те из нас, кто близко знали Исаака Константиновича, с благодарностью хранят в душе его незабываемый светлый образ. Мы очень хотим, чтобы этот образ был запечатлен в памяти и новых поколений наших читателей.





9 октября 2007 года исполнилось бы 100 лет известному ученому и педагогу Валентину Александровичу Фабриканту. За свою долгую творческую жизнь Валентин Александрович сумел многое – сделать замечательные открытия (он – автор работ по параметрическому усилению света, заложивших основу создания лазеров), воспитать плеяду учеников, написать прекрасные книги и статьи.

В.А.Фабрикант стоял и у истоков создания журнала «Квант». Являясь бессменным членом редакционной коллегии, он был большим другом читателей и редакции.

Мы рады предложить вашему вниманию статью В.А.Фабриканта, опубликованную в «Кванте» №7 за 1978 год и вошедшую в Приложение к журналу «Квант» №4/99, посвященное памяти Валентина Александровича.

# Сюрпризы зеленого стекла

**В.ФАБРИКАНТ**

---

## Какого цвета зеленое стекло?

Этот вопрос может вызвать чувство естественного недоумения. Читатель с раздражением скажет: зеленое стекло потому и называется зеленым, что оно... Однако не надо спешить со снисходительными разъяснениями. Нехитрый опыт покажет вам, что вопрос о цвете зеленого стекла совсем не так прост.

Если у вас есть кусок зеленого стекла, разбейте его осторожно на несколько не очень маленьких кусочков. Затем посмотрите сквозь один из них на нить лампы накаливания. Как вы и ожидали, нить будет казаться зеленой. Наложите на этот кусочек стекла второй и снова посмотрите на нить. Вероятно, вы не заметите изменения цвета нити, она будет зеленой по-прежнему. Но если наложить на два кусочка стекла третий и посмотреть сквозь все три кусочка на нить, вы увидите ее уже неокрашенной – белесоватого цвета. Сквозь четыре кусочка нить будет казаться красноватой, а сквозь пять кусочков – рубиново-красной!

Результат совершенно неожиданный и весьма поучительный. Оказывается, цвет стекла зависит от его толщины, и зеленое в тонком слое стекло становится красным при достаточно большой толщине слоя. Таким свойством обладает, конечно, не каждое зеленое стекло, но как раз наиболее распространенные дешевые сорта зеленых стекол.

Любопытно, что это же свойство присуще раствору самого важного красящего вещества на земле – хлорофилла. Как известно, хлорофилл окрашивает листья растений в зеленый цвет. Поместив листья в спирт, можно получить раствор хлорофилла в спирте и провести такой опыт. Поставьте на лист белой бумаги стакан и медленно наливайте в него раствор хлорофилла. Сначала дно стакана на просвет будет казаться

зеленым, а затем, при большой толщине слоя, раствор приобретет насыщенный темно-красный цвет.

Вернемся к зеленому стеклу. Можно еще сильнее запутать вопрос о цвете стекла, если после лампочки накаливания посмотреть сквозь кусочки стекла на раскаленный конец кочерги. Уже через три кусочка стекла он будет казаться рубиново-красным. Вот вам и второй неожиданный результат: видимый цвет стекла зависит не только от его толщины, но и от того, на какой светящийся предмет мы смотрим сквозь это стекло. Слой из трех кусочков стекла кажется бесцветным при наблюдении нити лампы накаливания и красным – при наблюдении конца раскаленной кочерги.

С кочергой можно сделать еще один опыт, из которого следует практически важный вывод. Вынутая из печи кочерга быстро остывает. Попробуйте проследить сквозь стекло за концом кочерги во время остывания. Как мы уже говорили, конец раскаленной кочерги виден красным сквозь три кусочка стекла. Конец несколько остывшей кочерги кажется красным уже через два кусочка. Подождя еще немного, вы увидите конец кочерги красным даже через один кусочек зеленого стекла. Из этого опыта следует, что чем выше температура раскаленного тела, тем толще должен быть слой стекла, чтобы произошло изменение его цвета. Значит, по толщине слоя стекла, необходимого для изменения цвета, можно судить о температуре раскаленного тела.

Опыты с кочергой делают понятным устройство чрезвычайно остроумного и простого прибора, служащего для определения температур раскаленных тел, – пирометрического клина. Он представляет собой действительно клин из зеленого стекла, толщина которого плавно возрастает от одного конца к другому. Клин

двигается в металлической оправке с отверстием для наблюдения раскаленного тела. По краю клина нанесена шкала температур, причем температура растет от тонкого конца клина к толстому. Наставив отверстие оправки на раскаленное тело, надо двигать клин в оправке до тех пор, пока не произойдет изменение видимого цвета тела. Тогда на шкале против указателя, соединенного с оправкой, можно прочесть температуру раскаленного тела. Пирометрическим клином особенно часто пользуются для определения температуры расплавленного металла, например в мартеновских печах. Несмотря на свое простое устройство, клин в опытных руках дает высокую точность.

Вы познакомились с принципом действия полезного прибора, использующего свойства зеленого стекла, но загадка самого стекла осталась загадкой.

### Опыт, не сделанный Ньютоном, и ландшафтная живопись

Наверное, многие из вас помнят знаменитый опыт Ньютона с разложением солнечного луча в разноцветный спектр при помощи стеклянной призмы. Этот опыт показал, что солнечный свет представляет смесь лучей различных цветов: красного, оранжевого, желтого, зеленого, голубого, синего и фиолетового. Ньютон почему-то не попытался несколько усложнить этот опыт: поставить на пути солнечного луча цветное стекло или сосуд с окрашенной жидкостью. Во всяком случае, в своих трудах Ньютон не описывает такого опыта.

Опыт с красным стеклом, собственно, ничего интересного и не дал бы. Вместо разноцветной полоски спектра остался бы только участок, соответствующий красным лучам. Результат можно было предсказать заранее: красное стекло потому и красное, что пропускает только красные лучи и поглощает все остальные.

Гораздо более интересен опыт с зеленым стеклом или сосудом, наполненным раствором хлорофилла. В этих случаях от спектра останутся уже не одна, а две полоски: зеленая и темно-красная. А это значит, что зеленое стекло и раствор хлорофилла пропускают не только зеленые, но и красные лучи.

По поводу хлорофилла очень интересны замечания знаменитого русского ботаника К.А.Тимирязева: «Убеждать в том, что хлорофилл пропускает красные лучи, можно очень легко: стоит на залитый ярким солнечным светом ландшафт посмотреть через особое синее стекло, которое пропускает красные и синие лучи, но задерживает зеленые, для того чтобы перед нашими изумленными взорами вся природа совершенно преобразилась – под обычным синим небом мы увидим кроваво-красную растительность <рис.1>. Не в этой ли особенности цвета хлорофилла лежат те трудности, с которыми, очевидно, приходится бороться ландшафтной живописи? На палитре живописца, по-видимому, нет тех зеленых тонов, которые представляет вблизи ярко освещенная зелень».

Оставим, однако, живопись пока в стороне и вернемся к пирометрическому клину. Несколько видоизменим описанный выше опыт. В качестве источника света



Рис. 1

используем нить лампы накаливания и между ней и призмой поместим пирометрический клин (рис.2). На стене мы опять увидим две полоски – зеленую и красную, причем соотношение яркостей этих полосок будет зависеть от толщины клина в месте прохождения светового луча. Если луч проходит сквозь тонкую часть



Рис. 2

клина, зеленая полоска значительно ярче, чем красная, при увеличении толщины клина яркость обеих полосок снижается, а начиная с некоторого момента красная полоска становится ярче зеленой. Когда зеленая полоска ярче красной, нить видна зеленой, при обратном соотношении яркостей полосок – красной. При равенстве яркостей полосок нить кажется бесцветной.

Как будто загадка зеленого стекла разъяснена. Однако остается еще объяснить, почему с ростом толщины стекла соотношение яркостей красной и зеленой полосок меняется на обратное. Оказывается, объяснение вытекает из важного закона оптики, открытого одним бравым моряком лет двести тому назад.

### Капитан дальнего плавания и геометрическая прогрессия

Капитан дальнего плавания француз Пьер Бугер, живший в первой половине восемнадцатого столетия, не был, пожалуй, простым моряком. Им написаны объемистые трактаты по конструкции судов, по навигации и другим отраслям морского дела. Французская Академия наук присудила Бугеру три премии за работы по морскому делу и избрала его своим членом. Вкус к морской науке Бугер унаследовал от своего отца, профессора гидрологии.

Если морем Бугер занимался по наследству, то оптикой он занялся по собственному почину. Бугер первый обратил внимание на проблемы, связанные с изменениями силы света и освещенности. Он придумал первые приборы для измерения силы света и установил, что сила света Солнца в 300 тысяч раз больше



силы света Луны, а в его «Оптическом трактате» содержался очень важный закон ослабления света в поглощающих телах.

Чтобы понять смысл этого закона (его называют законом Бугера), воспользуемся не очень правдоподобной, но наглядной аналогией из области спорта. Представим себе, что мы присутствуем на плохо подготовленном массовом состязании в беге на семь километров. Слабая тренировка участников стала сказываться сразу, и болельщики быстро установили следующий любопытный закон – лишь одна треть бегунов, начавших данный километр дистанции, добегают его до конца. Старт приняли 2187 участников, к концу первого километра на дистанции остались 729, к концу второго – 243, к концу третьего – 81, четвертого – 27, пятого – 9, шестого – 3 участника. Наконец, седьмой километр заканчивает только 1 бегун, объявленный победителем. Судьям даже не пришлось воспользоваться секундомером для определения того, кто первым коснулся финишной ленточки.

Выпишем в строку числа бегунов, пробежавших различные дистанции:

2187, 729, 243, 81, 27, 9, 3, 1.

Нетрудно видеть, что эти числа образуют убывающую геометрическую прогрессию, в которой каждое последующее число в три раза меньше предыдущего, стоящего слева от него.

Вернемся от спорта к оптике. Возьмем кусок окрашенного стекла. Допустим, что он пропускает одну треть падающего на него света. Добавим второй такой же кусок. Он пропустит одну треть светового потока, прошедшего через первый кусок, т. е. одну девятую часть светового потока, падающего на первый кусок. Поставив еще один кусок, получим одну двадцать седьмую часть и так далее. Ясно, что такой же результат получился бы просто при увеличении толщины куска стекла вдвое, второе и т.д. Когда толщина стекла растет, доля пропускаемого света падает по геометрической прогрессии.

Это и есть закон, открытый Бугером. В примере с бегунами мы уже видели, как быстро уменьшаются числа в геометрической прогрессии.

### Еще немного спорта

Вооруженные законом Бугера, мы можем смело броситься в атаку на загадку зеленого стекла. Однако прежде вспомним опять о спорте и представим себе такую ситуацию.

Новички, так неудачно пробежавшие дистанцию в семь километров, самоуверенно вызвали на соревнование команду опытных мастеров. Мастера приняли вызов и даже предложили весьма великодушные условия: на старт выходят все 2187 новичков и только 512 мастеров; победившей считается команда, в которой большее число бегунов добежит до конца седьмого километра.

На состязание обе команды явились в цветных майках: новички надели зеленые майки, мастера – красные. После первого километра сторонники новичков

приободрились. Из команды новичков осталось, как и в прошлый раз, 729 бегунов, а у мастеров – 256. Большой численный перевес сохранился на стороне новичков. Поклонники мастеров были несколько обескуражены тем, что в этой команде сразу вышли из строя половина бегунов. Но один из болельщиков, сделав карандашом нехитрые выкладки на папиросной коробке, уверенно заявил, что если дело пойдет так же и дальше, то выиграют наверняка мастера.

После второго километра «зеленых» осталось 243, а «красных» – 128. После третьего километра «зеленых» – 81, а «красных» – 64. Настроение сторонников новичков заметно стало падать. После четвертого километра «зеленых» – 27, а «красных» – 32. Все с почтением посмотрели на предсказателя с коробкой папирос. Оставшиеся три километра только усугубили поражение «зеленых». После пятого километра «зеленых» – 9, «красных» – 16, после шестого – 3 и 8. Наконец, к финишу в конце седьмого километра пришли один «зеленый» и четыре «красных».

Выпишем друг под другом числа бегунов в обеих командах:

2187, 729, 243, 81, 27, 9, 3, 1  
512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4.

Во второй строке отношение последующего числа к предыдущему равно одной второй, а в первой строке, как и раньше, – одной трети. Оказалось, что эта небольшая разница в числах не только была достаточна, чтобы компенсировать большой начальный численный перевес команды «зеленых», но и привела команду «красных» к победе. Нужна была только достаточно длинная дистанция, не менее четырех километров. На более коротких дистанциях победили бы «зеленые».

В поведении зеленых и красных лучей и «зеленых» и «красных» бегунов существует полная аналогия (рис.3). Зеленое стекло лучше пропускает темно-красные лучи, чем зеленые, причем, согласно закону Бугера, различие в пропускании этих лучей быстро растет с ростом толщины слоя стекла («длинная дистанция»).

Но тогда естественно возникает вопрос: почему в тонком слое стекло кажется зеленым, если оно пропускает темно-красные лучи лучше, чем зеленые? Объясняется это спектральной характеристикой источника света, с которым проводился опыт: зеленый участок спектра гораздо ярче, чем темно-красный (команда «зеленых» многочисленнее «красных»). В тонком слое стекла («короткая дистанция») разница в поглощении



Рис. 3



темно-красных и зеленых лучей еще не настолько велика, чтобы перекрыть перевес в начальной яркости зеленых лучей. Основную роль играют зеленые лучи, что и дает соответствующую окраску. С ростом толщины стекла, согласно закону Бугера, пропускание зеленых лучей падает несравненно быстрее, чем темно-красных (числа «зеленых» и «красных» бегунов на больших дистанциях). При достаточно большой толщине разница в пропускании уже так велика, что перекрывает начальный перевес в яркости зеленых лучей, и от всего спектра практически остается только темно-красная полоска.

Осталось только объяснить, какую роль играет температура раскаленного тела, на которое мы смотрим сквозь стекло. Известно, что чем сильнее мы раскалим любой металлический предмет, тем белее даваемый им свет. Недаром говорят: «довести до белого каления». Так, при недостаточном накале лампочка накаливания дает красноватый свет, при нормальном накале – гораздо более белый. Объясняется это тем, что с ростом температуры яркость зеленых и синих лучей растет гораздо быстрее, чем красных. Значит, при более высокой температуре разница в яркостях зеленой и темно-красной частей спектра больше, и ее труднее перекрыть поглощением в стекле. Вот почему при более высоких температурах раскаленного тела для изменения цвета наблюдаемого излучения нужно более толстое стекло.

#### Древнерусские иконы и наблюдения Леонардо да Винчи

На некоторых древнерусских иконах бросается в глаза необычная расцветка одеяний святых. Складки изображены краской, обладающей резко отличным цветом от цвета гладких частей одеяния. Например – красные складки на зеленом плаще (рис.4) или оранжевые складки на синем одеянии. Острый глаз древнерусского богомаза заметил, что некоторые ткани обладают двухцветностью и в складках приобретают другой цвет, чем на ровной поверхности. Причина двухцветности тканей та же, что и в опыте с пирометрическим клином.

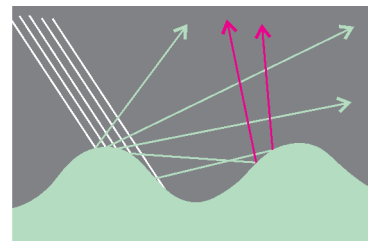
Если луч света, отраженный от двухцветной ткани, пропустить сквозь призму, то в спектре обязательно останутся две цветные полоски. Для зеленой двухцветной ткани картина будет той же, что с зеленым стеклом: останутся красная и зеленая полоски, остальные лучи поглотятся. Двухцветная зеленая ткань лучше отражает красные лучи, чем зеленые, но при однократном отражении от гладкой поверхности ткани сказывается большая яркость зеленых лучей в падающем свете. Поэтому в однократно отраженном свете все-таки преобладают зеленые лучи. В складках ткани свет испытывает по крайней мере два последовательных отражения. При втором отражении красные лучи отражаются опять сильнее, чем зеленые, и в результате двукратного



Рис. 4

отражения происходит то же, что и в зеленом стекле большой толщины: яркость красных лучей становится больше яркости зеленых лучей и ткань меняет цвет. Многократные отражения усиливают этот эффект.

Большинство обычных тканей обладает прямо противоположными свойствами. В



складках получается более насыщенный, но такой же цветовой тон, что и на ровной поверхности. Объясняется это опять-таки повторными отражениями. Свет, отраженный от таких тканей, после разложения призмой дает только одну полоску в спектре вместо двух полосок у двухцветных тканей. Например, свет, однажды отраженный от желтого бархата, дает в спектре широкую полосу с наибольшей яркостью в желтой части. Кроме желтых лучей в спектре присутствуют еще зеленые и голубые лучи. При двукратном отражении полоса в спектре становится уже, так как голубые лучи практически исчезают совсем, а зеленые сильно ослабевают. Это работает все тот же закон геометрической прогрессии. В результате желто-оранжевый отраженный свет делается более насыщенным.

Один из наиболее разносторонних гениев, живших когда-либо, – Леонардо да Винчи – не только заметил своим глазом художника эту особенность складок тканей, но и как ученый дал вполне правильное объяснение наблюдаемому явлению. В «Трактате о живописи» он пишет: «Отраженные цвета имеют гораздо большую красоту, чем природный цвет этих тел, как это видно на открывающихся складках золотых тканей... когда одна поверхность отражается от другой, стоящей напротив, а эта в ней, и так последовательно до бесконечности».

В том же «Трактате о живописи» сказано: «Рефлексы (отражения) от живого тела, получающего свет от другого живого тела, более красны и более превосходно телесного цвета, чем любая другая часть живого тела, какая только может быть у человека». Созерцая с наслаждением в залах «Эрмитажа» изумительные полотна Ван Дейка и Рубенса, нетрудно заметить, что и для этих великих мастеров эффект многократных отражений не был тайной.

# Парадокс стола на четырех ножках

Г. ЛЮБАРСКИЙ

**П**ОЧЕМУ АВТОР ПРЕДЛАГАЕТ ЧИТАТЕЛЯМ РАССКАЗ о таком незатейливом предмете, как деревянный стол? Забыл, что живет в двадцать первом веке? Нет, не забыл. Предлагаемый рассказ действительно не содержит ничего неизвестного специалистам. Тем не менее, он весьма поучителен, так как показывает, что даже в простейшем случае при решении физической задачи неизбежно принимаемые на веру те или иные казались бы правдоподобные предположения могут привести к самым парадоксальным выводам. Это будет показано на примере простого деревянного стола.

Первая попытка выяснить, как распределяется меж-

ду ножками стола нагрузка со стороны стоящих на столе предметов, приведет нас к некоторому парадоксу. Разрешив его, мы окажемся лицом к лицу с совершенно новой для нас картиной и новыми задачами. Такой этап исследования – обнаружение парадокса в процессе теоретического исследования и поиски выхода из него – присущ многим физическим задачам, в том числе и некоторым задачам современной физики. Это и побудило автора вспомнить описанную ниже историю.

В студенческие годы я прочел воспоминания одного известного русского механика. К сожалению, прошедшие с тех пор семь десятилетий стерли в памяти имя этого ученого. Остался только один рассказанный им яркий эпизод. Автор воспоминаний обнаруживает поразительную вещь – методы статики пасуют перед такой простой задачей, как расчет усилий ножек стола, на котором покоится гиря, если у стола четыре ножки. И это при том, что задача о столе с тремя ножками решается элементарно. В чем же дело?

Не нужно думать, что математическая задача о четырехногом столе является настолько сложной, что никто не может ее решить. Наоборот, задача элементарно проста, и, как скажет любой математик, найти ее полное решение не составляет никакого труда. Однако...

Приступим к решению задачи о столе о четырех ножках. Помимо сил тяжести (стола и стоящей на нем гири) на стол действуют еще четыре силы, которые не дают провалиться ни одной из четырех ножек. Это реакции опоры (пола), приложенные к ножкам стола в точках их соприкосновения с полом. Все эти силы направлены вертикально. Силы трения отсутствуют, поскольку стол неподвижен и никто не старается



Иллюстрация В.Иванюка



его сдвинуть. Задача состоит в том, чтобы вычислить все четыре реакции опоры.

Применим законы статики. Для равновесия стола сумма сил реакции должна уравновесить общую силу тяжести  $P$  гири и стола:

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = P.$$

Это, разумеется, еще не все условия равновесия. Силы должны быть так сбалансированы, чтобы не вызвать вращения вокруг ни одной из возможных осей. Возьмем в качестве двух осей две взаимно перпендикулярные горизонтальные прямые, соединяющие нижние концы каких-либо трех ножек стола. Воспользуемся правилом рычага, согласно которому для его равновесия сумма моментов сил, стремящихся повернуть рычаг вокруг оси в одну сторону, должна уравновешиваться суммой моментов сил, стремящихся повернуть рычаг в противоположную сторону. Это даст нам еще два уравнения. Вертикальную ось можно игнорировать, так как все приложенные силы вертикальны и потому не могут создать вращающего момента относительно этой оси. Конкретный вид уравнений мы приведем, когда он нам понадобится.

Итак, у нас есть три уравнения статики и четыре (по числу ножек) неизвестные силы. Возникшая ситуация настораживает, так как число неизвестных превышает число уравнений. Во всех подобных случаях, как правило, если существует хотя бы одно решение, то их существует бесконечно много. Более подробное исследование нашей системы трех уравнений показывает, что она всегда имеет бесконечно много решений и все они могут быть легко найдены. Одно из этих решений дает нам истинные реакции ножек стола, но, увы, статика не может однозначно указать это единственное решение. В этом и состоит неразрешимость задачи в рамках статики.

Что же дала нам статика? Очень многое. Она подсказала, что сделанная нами попытка перейти от конкретной физической задачи к задаче математической некорректна. Попросту говоря, мы оказались плохими физиками. Здесь мы подходим к самой интересной стадии исследования – поиску ошибки, или, лучше сказать, критическому анализу сделанных допущений. Ничего плохого нет в том, что, приступая к исследованию физической задачи, мы ввели ряд упрощающих предположений. Это неизбежный этап при решении всякой физической задачи, существенно отличающий ее от всякой математической задачи. Кстати сказать, это одно из обстоятельств, отличающих в общих чертах склад ума физика от склада ума математика.

Читатель, вероятно, уже догадался, в чем была наша ошибка. Мы воспользовались понятием «абсолютно твердое тело» в ситуации, когда это понятие приводит к парадоксу – невозможности вычислить реакции опоры. Конечно, ножки стола представляются очень твердыми, мысленная замена их идеализированными абсолютно твердыми кажется вполне законной, тем более что такая замена оказалась допустимой в случае стола на трех ножках и в многочисленных задачах, которые можно найти в задачниках по статике.

Парадоксальным представляется то обстоятельство, что сколь бы твердыми ни были ножки, их ни в коем случае нельзя считать абсолютно твердыми в смысле статики твердого тела. Дело в том, что под тяжестью груза ножки несколько укорачиваются, причем величины этих укорочений зависят от действующих на них сил. Для того чтобы стол опирался на плоский пол всеми четырьмя ножками, их нижние концы в нагруженном состоянии должны находиться в одной плоскости, или, как принято говорить, быть *компланарны*. Вспомним, что уравнения статики привели нас к множеству решений. Значит, из них нужно выбрать то, которое обеспечивает компланарность нижних концов ножек стола. Заранее не ясно, к чему приведет это предположение. Хорошо, если есть только одно решение, сохраняющее такое расположение концов ножек стола. Тогда парадокс неопределенности решения исчезает. А как быть, если таких решений несколько или, что еще хуже, нет ни одного?

Выходит, исследование продолжается, но объект исследования изменился. Теперь это стол, ножки которого могут укорачиваться под действием нагрузок. А столешница остается абсолютно твердой, так же как и крепления, соединяющие ее с ножками. Последнее означает, что ножки и после деформации остаются перпендикулярными плоскости столешницы. Можно подумать, что все стало только хуже – к четырем неизвестным силам добавились еще четыре неизвестные величины – длины ножек после деформации. Это верно, но легко исправимо. Нужно только иметь в виду, что, отказываясь от какой-либо идеализации, ее следует не отбрасывать, а заменять другой, более реалистичной. В нашем случае мы заменим понятие абсолютно твердого тела понятием *упругого тела, подчиняющегося закону Гука*. По отношению к стержню это означает, что изменение длины стержня под действием приложенных к нему двух равных по величине сжимающих или растягивающих сил прямо пропорционально длине стержня и величине одной из этих сил. Применяя закон Гука к каждой из четырех ножек, запишем

$$\delta z_i = \gamma_i F_i \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

где  $\gamma_i$  – коэффициент пропорциональности, а  $\delta z_i$  – уменьшение длины ножки под действием силы реакции пола  $F_i$  и уравновешивающей ее силы давления со стороны столешницы. Заметим, что чем жестче материал, из которого сделаны ножки, тем меньше коэффициент  $\gamma$ . Предел  $\gamma \rightarrow 0$  описывает абсолютно твердое тело.

С помощью закона Гука и можно получить недостающее четвертое уравнение. Оно выглядит особенно просто в том случае, когда точки крепления ножек к столешнице расположены в вершинах прямоугольника. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся именно этим случаем.

Пронумеруем ножки так, чтобы ножки с номерами 1 и 3 лежали на одной диагонали прямоугольника. Тогда условие компланарности будет выглядеть так:

$$\lambda_1 + \lambda_3 = \lambda_2 + \lambda_4,$$

где  $\lambda_k$  — длина ножки с номером  $k$  после ее деформации:

$$\lambda_k = l - \delta z_k.$$

Последние два соотношения вместе с законом Гука дают искомое четвертое соотношение между силами:

$$F_1\gamma_1 + F_3\gamma_3 = F_2\gamma_2 + F_4\gamma_4.$$

Итак, после учета сжимаемости ножек число уравнений сравнялось с числом ножек. Парадокс исчез. Более того, оказывается, что полученная система уравнений имеет единственное решение и его легко найти. Что ж, приходится согласиться с парадоксальным утверждением: сколь бы твердым ни был материал, из которого сделаны ножки, его нельзя считать абсолютно твердым. Если все ножки сделаны из одного и того же материала, то последнее уравнение принимает вид

$$F_1 + F_3 = F_2 + F_4.$$

Однако радоваться рано. Как это часто бывает, именно после того, как решение найдено, его анализ обнаруживает неполную завершенность теории. В нашем случае решение показывает, что при некоторых положениях центра тяжести одна из четырех сил реакции пола оказывается отрицательной. Но по физическому смыслу задачи это невозможно, так как силы, действующие на ножки со стороны пола, не могут быть направлены вниз (ни одна из ножек не приклеена к полу). Мы опять пришли к парадоксу, но на этот раз легко устранимому.

Если на предыдущем этапе нам нужно было избавиться от лишних решений, то теперь у нас нет ни одного физически разумного решения. Это означает, что мы неоправданно сузили область поиска, т.е. учли не все возможные положения стола с четырьмя ножками, когда он стоит на полу. И действительно, мы проявили небрежность, не подумав, что сжимаемость ножек позволяет столу стоять и на трех ножках даже тогда, когда в ненапряженном состоянии все его четыре ноги имеют строго одинаковую длину.

Возникает вопрос: как учесть это обстоятельство? А вот как: каждый раз, решая задачу о столе, мы должны независимо рассмотреть случай, когда он стоит на всех четырех ножках, и четыре случая, когда одна из ножек не касается пола.

И еще. Сделанное предположение о равенстве длин ножек никаких существенных упрощений не вносит и в то же время является нереалистичным. Поэтому в дальнейшем мы будем считать длины ножек в ненапряженном состоянии, вообще говоря, различными.

Не приходилось ли вам подкладывать под одну из ножек стола сложенный в несколько раз лист бумаги и добиваться того, чтобы стол перестал «переступать» с ноги на ногу? Успех этой маленькой хитрости показывает, что если длины ножек хотя и не равны, но отличаются друг от друга достаточно мало (на толщину подложенной бумажки), то стол твердо стоит на всех своих четырех ножках. Однако если разности между

длинами ножек достаточно велики, то одна из ножек не касается пола, и стол оказывается трехногим. Это позволяет говорить, что у стола имеется *пять фаз* — в одной из них он стоит на всех четырех ножках, в остальных фазах одна из ножек не касается пола. Возникает вопрос об устойчивости этих фаз и прежде всего первой фазы, так как именно таким каждый хотел бы видеть свой стол.

Повседневный опыт показывает, что первая фаза может быть устойчивой — при достаточно хорошей точности изготовления ножек стол может стоять на четырех ножках. Это подтверждается и расчетом, использующим ту же систему четырех уравнений, если внести очевидную поправку: вместо одинаковой у всех четырех ножек длины  $l$  ввести четыре индивидуальные длины  $l_1, l_2, l_3, l_4$  каждой из ножек в ненапряженном состоянии. При этом уравнение условие компланарности примет вид

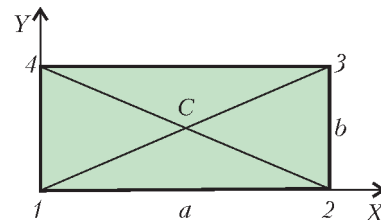
$$\Delta \equiv (l_2 + l_4) - (l_1 + l_3) = -F_1l_1\gamma_1 + F_2l_2\gamma_2 - F_3l_3\gamma_3 + F_4l_4\gamma_4.$$

Введенная величина  $\Delta$  равна нулю, если в ненагруженном состоянии концы ножек компланарны. Поэтому условимся называть  $\Delta$  *параметром некомпланарности*.

В отличие от полученного ранее четвертого соотношения между силами последнее уравнение не является однородным относительно коэффициентов  $\gamma_i$ , если  $\Delta \neq 0$ . Представим себе, что все четыре параметра  $\gamma_i$  умножены на одно и то же число. При этом смысл нашего уравнения не изменится, если  $\Delta = 0$ , и окажется другим в противном случае.

Как же происходит переход из одной фазы в другую и какие «фазовые переходы» возможны? Различные ситуации в нагрузке ножек названы фазами. Поэтому появился термин «фазовый переход». Единственное, что его роднит с термодинамическим фазовым переходом (без кавычек), это то, что и тот и другой происходят под влиянием внешних воздействий. Ниже мы получим довольно полную картину возможных фазовых переходов в нашем случае.

Начнем с некоторых предварительных соображений. Вообразим стол, у которого точки крепления ножек образуют прямоугольник со сторонами  $a$  и  $b$ . Его диагонали делят столешницу на четыре треугольника (см. рисунок). Пусть центр тяжести стола с



гирей находится над треугольником  $12C$ . В этом случае стол, очевидно, не может стоять на трех ножках с номерами  $1, 3, 4$  или  $2, 3, 4$ . Допустимыми остаются только фазы  $(1234)$ ,  $(123)$  и  $(124)$ . В какой именно из трех фаз окажется стол, зависит, конечно, от конкретного положения центра тяжести внутри рас-



смаатриваемого треугольника – условимся называть его *базовым*.

У каждой из этих фаз есть свой *ареал существования*, т.е. совокупность тех положений центра тяжести, которые допускают данную фазу. Ареал фазы (1234) обозначим символом  $\Gamma_0$ . Пусть  $\Gamma_3$  – это ареал фазы (123), а  $\Gamma_4$  – ареал фазы (124). Воспользуемся изображенными на рисунке осями координат  $X$  и  $Y$ . Обозначим через  $x$  и  $y$  прямоугольные координаты центра тяжести системы «стол + гиря». Пусть  $a$  – абсцисса точки 2, а  $b$  – ордината точки 3. Из законов статики сразу же получаем

$$(F_3 + F_4)b = Py,$$

$$(F_2 + F_3)a = Px,$$

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = P.$$

В действительности, из-за сжимаемости ножек, эти равенства являются приближенными. Тем не менее, ими можно пользоваться, если разности длин ножек как в ненагруженном, так и в нагруженном состоянии не превышают нескольких миллиметров, а стороны  $a$  и  $b$  прямоугольника, соединяющего точки крепления ножек стола, порядка одного метра. Так, например, если разность длин двух ножек, вызванная неточностью изготовления, составляет три миллиметра, то это изменит расстояние между их концами менее чем на одну двухсотую миллиметра. (В этом легко убедиться, воспользовавшись теоремой Пифагора.) Поэтому четырехугольник с вершинами в точках, в которых ножки касаются пола, можно с высокой степенью точности считать равным прямоугольнику 1234. Как следствие этого, отклонения ножек от вертикали оказываются порядка сотысячных долей радиана. Столь же мало и отличие полученных нами последних соотношений от точных соотношений, диктуемых механикой.

Предположение, лежащее в основе наших оценок, выполняется, если материал, из которого сделаны ножки стола, является достаточно жестким, а их длины в ненагруженном состоянии достаточно мало отличаются друг от друга. Поэтому в дальнейшем мы не будем интересоваться эффектами, связанными с изменениями расстояний между концами ножек стола.

Как найти ареалы возможных фаз? Вид законов статики не зависит от того, в какой фазе находится стол. Отличия сказываются в другом. Так, в фазе (1234) все четыре силы положительны, а в остальных фазах одна из сил равна нулю, поскольку только три ножки касаются пола. Например, в фазе (123)

$$F_i > 0 \text{ для } i = 1, 2, 3 \text{ и } F_4 = 0.$$

Другое отличие состоит в том, что для фазы (1234) условие компланарности  $\lambda_1 + \lambda_3 = \lambda_2 + \lambda_4$  выполняется обязательно, а для всех остальных фаз оно заменяется неравенствами, поскольку в каждой из фаз одна из ножек находится *над* полом. Скажем, для фазы (123) справедливо неравенство  $\lambda_1 + \lambda_3 > \lambda_2 + \lambda_4$ . Поясним его. Неравенство можно превратить в равенство, если

мысленно *нарастить* ножку 4 так, чтобы концы всех четырех ножек оказались в одной плоскости – плоскости пола. Наше неравенство означает, следовательно, что *до* наращивания нижний конец ножки 4 находился над полом. Это условие вместе с тремя уравнениями, полученными из законов статики, и позволяет найти ареал фазы (123).

Задача о столе показала, что в процессе исследования физического объекта иногда приходится существенно модифицировать описание его свойств, отказываясь от излишне упрощенной модели в пользу более реалистичной. В рассмотренном нами случае исходная простая модель оказалась неполной – она не позволила найти единственно правильное решение.

Однако, это только одна сторона медали. Если не посмотреть на другую ее сторону, то можно прийти к глубоко ошибочному убеждению, будто упрощенные представления (модели объектов) – это ловушки для неискушенных исследователей. Размеры статьи не позволяют развить эту мысль сколько-нибудь полно, поэтому ограничимся двумя примерами, чтобы не быть уж совсем голословными.

Законы Кеплера дают нам максимально простую картину движения планет вокруг Солнца: планеты движутся по эллипсам. Наличие других планет несколько затуманивает эту картину, но это интересует только астрономов. Если хотите, законы Кеплера очень демократичны. Действительно, если бы эти законы остались в рукописях ученого как сырой материал, как первое приближение обработки результатов наблюдений, а в журналы и учебники попали только уточненные формулы, что бы знала широкая публика о нашей Солнечной системе? Да и самим ученым «пришлось бы не сладко». Вспомним, что планета Нептун была открыта благодаря наблюдаемым *отклонениям от законов Кеплера* в движении Урана, которые (отклонения) нельзя было объяснить влиянием всех остальных известных к тому времени планет.

Второй пример – это теория малых колебаний. Наука и техника обязаны ей такими фундаментальными понятиями, как собственные частоты и колебания, кратность частот и их расщепление, спектры, обертоны и т.п.. Между тем, все эти понятия невозможно или, по крайней мере, очень трудно, определить, не обращаясь к заведомо приближенной теории малых колебаний. Сама же эта теория возникла в результате линеаризации относящихся к делу систем дифференциальных уравнений, т.е. «бесцеремонного» отбрасывания квадратов, кубов и всех более высоких степеней искомого малых отклонений изучаемой системы от ее равновесного состояния.

Вывод – сознательное обращение к приближенным моделям бывает очень плодотворным.

Автор признателен профессору М.И.Каганову за оказанную помощь в процессе работы над статьей.

# Прокоп Дивиш и Янош Сегнер

А. ВАСИЛЬЕВ

**В**О ВСЕМ МИРЕ ИЗОБРЕТАТЕЛЕМ ГРОМООТВОДА считается американский ученый Бенджамин Франклин. И это действительно так. Однако изобретателей громоотвода было, как минимум, двое. Независимо от Франклина в 1754 году чешский священник *Прокоп Дивиш* сконструировал и установил громоотвод в монастыре Лука близ селения Приметице.

Родился будущий изобретатель неподалеку от этих мест в 1698 году, а высшее образование получил в иезуитской латинской школе в Зноймо. После принятия монашеского обета Дивиш сам преподавал философию в церковно-приходской школе, а в 1733 году защитил степень доктора теологии в Зальцбургском университете. Одно время Дивиш был настоятелем монастыря Лука, но уже с 1742 года он стал священником маленькой церкви в Приметице, где и оставался до своей кончины в 1765 году.

Обязанности деревенского священника оставляли Дивишу достаточно времени для научных занятий, которыми он интересовался еще с юношеских лет. Вначале он занялся, как говорят теперь, прикладными исследованиями и построил в своем приходе несколько водоводов. Затем его интересы обратились к конструированию музыкальных инструментов, результатом чего стало создание струнного «Денисдора», который имитировал звуки многих других инструментов.

С начала 50-х годов Дивиш начал проводить опыты по исследованию электричества. Электрические заряды он получал трением, а также с использованием лейденских банок собственной конструкции. На этом пути Дивиш изучил все основные электростатические явления и даже продемонстрировал их Имперскому двору в Вене.

Известие о гибели от электрического разряда Георга Рихмана, занимавшегося изучением молний в России, привлекло внимание Дивиша к атмосферному электричеству. Для сбора атмосферных зарядов Дивиш сконструировал «погодную машину», которая внешне больше всего напоминала современные телевизионные антенны. На высоком шесте (в последней версии — высотой 41,5 м) он установил горизонтальный металлический крест с дополнительными перекладинами, на конце каждой из которых был укреплен ящик с металлическими опилками. По задумке изобретателя, ящики должны были накапливать атмосферное электричество, однако, поскольку они были хорошо заземлены, конструкция представляла собой именно громоотвод.

В таком виде громоотвод Дивиша простоял в монастыре Лука около пяти лет, но после пожара 1759 года он, на всякий случай, был разобран на части. Новый громоотвод Дивиш воздвиг над своей церковью в Приметице лишь в 1761 году. Попытки убедить Вену в необходимости построения громоотводов по всей империи не увенчались успехом, так что Дивиш сконцентрировал свои дальнейшие исследования на изучении влияния электричества на живые тела и, в конечном счете, на электротерапии. Свои наблюдения за природой вещей Дивиш изложил в «Трактате об атмосферном электричестве», опубликованном еще при жизни ученого.

*Янош Андрош Сегнер* родился в 1704 году в Братиславе, хотя в те годы этот город именовался либо по-венгерски Посони, либо по-немецки Пресбург. И тот, и другой вариант в случае Сегнера оправданы тем, что в Венгрии он получил начальное образование, а в Германии сложилась его академическая карьера.

Еще в юные годы Сегнер проявил незаурядные способности к точным наукам, однако в Йенский университет в 1725 году он поступил по медицинскому отделению. По окончании университета Сегнер проработал доктором около полутора лет в Дебрецене, но его интерес к математике вновь привел его в Йену, а затем и на кафедру математики Гёттингенского университета. В течение 20 лет он был заведующим этой знаменитой кафедрой, после чего перебрался в Галле, где и оставался профессором вплоть до своего ухода из жизни в 1777 году.

И в Гёттингене, и в Галле Сегнер основал университетские астрономические обсерватории, в стенах которых он уделял много времени наблюдениям за звездным небом. Основные интересы Сегнера были связаны, однако, с земными делами и, в частности, с гидродинамикой. Опираясь на теоретические исследования Даниила Бернулли, он сконструировал горизонтальную водяную турбину. Эта турбина представляла собой наполненный водой цилиндр, в нижней части которого установлены изогнутые в одну и ту же сторону два сопла. Реакция вытекающей струи заставляет цилиндр вращаться в противоположном направлении.

Перу Сегнера принадлежат ряд превосходных учебных пособий, среди которых «Элементы арифметики и геометрии» и «Природа жидких поверхностей». Признанием заслуг Сегнера стало избрание его членом Берлинской, Гёттингенской и Петербургской академий наук, а также Лондонского Королевского общества.