Задачи LXX Московской математической олимпиады

6 класс

1. По двум телевизионным каналам одновременно начали показывать один и тот же фильм. На первом канале фильм разбили на части по 20 минут каждая и вставили между ними двухминутные рекламные паузы. А на втором канале фильм разбили на части по 10 минут каждая и вставили между ними минутные рекламные паузы. На каком канале фильм закончится раньше?

И.Раскина, Т.Караваева

2. В конце четверти Вовочка выписал подряд в строчку свои текущие отметки по пению и поставил между некоторыми из них знак умножения. Произведение получившихся чисел оказалось равным 2007. Какая отметка выходит у Вовочки в четверти по пению? («Колов» учительница пения не ставит.)

А.Хачатурян

3. Волк с тремя поросятами написали детектив «Три поросенка-2», а потом вместе с Красной Шапочкой и ее бабушкой – кулинарную книгу «Красная Шапочка-2». В издательстве выдали гонорар за обе книжки поросенку Наф-Нафу. Он забрал свою долю и передал оставшиеся 2100 золотых монет Волку. Гонорар за каждую книгу делится поровну между ее авторами. Сколько денег Волк должен взять себе?

А.Блинков

4. В Совершенном городе шесть площадей. Каждая площадь соединена прямыми улицами ровно с тремя другими площадями. Никакие две улицы в городе не пересекаются. Из трех улиц, отходящих от каждой площади, одна проходит внутри угла, образованного двумя другими. Начертите возможный план такого города.

Г.Панина

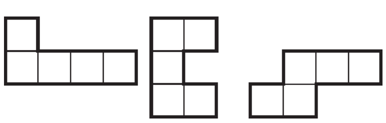


Рис. 1

5. Нарисуйте, как из данных трех фигурок (рис.1), использовав каждую ровно один раз, сложить фигуру, имеющую ось симметрии.

С.Маркелов

6. Кощей Бессмертный похитил у царя трех дочерей. Отправился Иван-царевич их выручать. Приходит он к Кощею, а тот ему и говорит:

«Завтра поутру увидишь пять заколдованных девушек. Три из них – царевы дочери, а еще две – мои. Для тебя они будут неотличимы, а сами друг дружку различать смогут. Я подойду к одной из них и стану у нее спрашивать про каждую из пятерых: «Это царевна»?». Она может отвечать и правду, и неправду, но ей дозволено назвать царевнами ровно двоих (себя тоже можно называть). Потом я так же опрошу каждую из остальных девушек, и они тоже должны будут назвать царевнами ровно двоих. Если после этого угадаешь, кто из них и вправду царевны, отпущу тебя восвояси невредимым. А если еще и догадаешься, которая царевна старшая, которая средняя, а которая младшая, то и их забирай с собой».

Иван может передать царевнам записку, чтобы научить их, кого назвать царевнами. Может ли он независимо от ответов Кощеевых дочерей: а) вернуться живым; б) увезти царевен с собой?

И.Раскина

7 класс

1. Даша и Таня живут в одном подъезде. Даша живет на 6 этаже. Выходя от Даши, Таня пошла не вниз, как ей было нужно, а вверх. Дойдя до последнего этажа, Таня поняла свою ошибку и пошла вниз на свой этаж. Оказалось, что Таня прошла в полтора раза больше, чем если бы она сразу пошла вниз. Сколько этажей в доме?

Т.Голенищева-Кутузова, И.Ященко

2. У Алены есть мобильный телефон, заряда аккумулятора которого хватает на 6 часов разговора или на 210 часов ожидания. Когда Алена садилась в поезд, телефон был полностью заряжен, а когда она выходила из поезда, телефон разрядился. Сколько времени она ехала на поезде, если известно, что Алена говорила по телефону ровно половину времени поездки?

А.Хачатурян

3. На клетчатой бумаге отмечены четыре узла сетки, образующие квадрат 4×4. Отметьте еще два узла и соедините их замкнутой ломаной так, чтобы получился шестиугольник (не обязательно выпуклый) площадью 6 клеток.

Т.Голенищева-Кутузова, И.Ященко

4. Буратино ходит по улицам города, на одном из перекрестков которого зарыт клад. На каждом перекрестке ему по радио сообщают, приблизился он к кладу или удалился (по сравнению с предыдущим перекрестком). Радио либо всегда говорит правду, либо всегда лжет (но Буратино не знает, лжет оно или нет). Сможет ли Буратино точно узнать, где закопан клад, если план города имеет вид, показанный на рисунке 2?

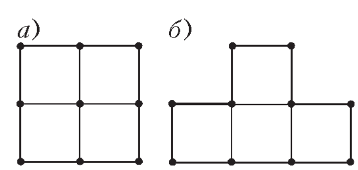


Рис. 2

(Перекрестки отмечены точками.)

Т.Голенищева-Кутузова

8 класс

1. За первый год население некоторой деревни возросло на n человек, а за второй – на 300 человек. При этом за первый год население увеличилось на 300%, а за второй – на n%. Сколько жителей стало в деревне?

Б.Френкин

2. Дано натуральное число N. Для того чтобы найти целое число, ближайшее к $\sqrt{N}$, воспользуемся следующим способом: найдем среди квадратов натуральных чисел число a^2, ближайшее к числу N; тогда a и будет искомым числом. Обязательно ли этот способ даст правильный ответ?

А.Хачатурян

3. В футбольном чемпионате участвовали 16 команд. Каждая команда сыграла с каждой по одному разу, за победу давалось 3 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0. Назовем команду успешной, если она набрала хотя бы половину от наибольшего возможного количества очков. Какое наибольшее количество успешных команд могло быть в турнире?

А.Блинков

4. В треугольник ABC с прямым углом C вписана окружность, касающаяся сторон AC, BC и AB в точках M, K и N соответственно. Через точку K провели прямую, перпендикулярную отрезку MN. Она пересекла катет AC в точке X. Докажите, что $CK = AX$.

М.Волчкевич

5. Капитан Врунгель в своей каюте разложил перетасованную колоду из 52 карт по кругу, оставив одно место свободным. Матрос Фукс с палубы, не отходя от штурвала и не зная начальной раскладки, называет карту. Если эта карта лежит рядом со свободным местом, Врунгель ее туда передвигает, не сообщая Фуксу. Иначе – ничего не происходит. Потом Фукс называет еще одну карту, и так сколько угодно раз, пока сам не скажет «стоп». Может ли Фукс добиться того, чтобы после «стопа» каждая карта наверняка оказалась не там, где была вначале?

Л.Медников, А.Шаповалов

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB, BC и CD равны, M – середина стороны AD. Известно, что угол BMC равен $90°$. Найдите угол между диагоналями четырехугольника $ABCD$.

М.Волчкевич

9 класс

1. Номер нынешней олимпиады (70) образован последними цифрами года ее проведения, записанными в обратном порядке. Сколько еще раз повторится такая ситуация в этом тысячелетии?

А.Заславский

2. На параболе $y = x^2$ выбраны четыре точки A, B, C, D так, что прямые AB и CD пересекаются на оси ординат. Найдите абсциссу точки D, если абсциссы точек A, B и C равны a, b и c соответственно.

Н.Андреев, А.Блинков

3. Найдите все возрастающие конечные арифметические прогрессии, которые состоят из простых чисел и у которых количество членов больше, чем разность прогрессии.

Б.Френкин

4. Выпуклая фигура F обладает следующим свойством: любой правильный треугольник со стороной 1 можно параллельно перенести так, что все его вершины попадут на границу F. Обязательно ли F – круг? (Фигура называется выпуклой, если отрезок, соединяющий любые две ее точки, целиком принадлежит фигуре.)

С.Маркелов

5. В однокруговом футбольном турнире играли $n > 4$ команд. За победу давалось 3 очка, за ничью 1, за проигрыш 0. Оказалось, что все команды набрали поровну очков. а) Докажите, что найдутся 4 команды, имеющие поровну побед, поровну ничьих и поровну поражений. б) При каком наименьшем n могут не найтись 5 таких команд?

А.Заславский

10 класс

1. На сторонах единичного квадрата отметили точки K, L, M и N так, что прямая KM параллельна двум сторонам квадрата, а прямая LN – двум другим сторонам квадрата. Отрезок KL отсекает от квадрата треугольник периметра 1. Треугольник какой площади отсекает от квадрата отрезок MN?

С.Дориченко, Р.Женодаров, С.Токарев

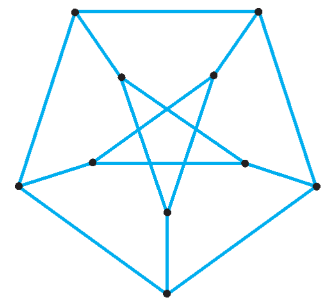


Рис. 3

2. Можно ли покрасить 15 отрезков, изображенных на рисунке 3, в 3 цвета так, чтобы никакие 2 отрезка одного цвета не имели общего конца?

И. Пушкарёв

3. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в O. Точка X – произвольная точка внутри треугольника ABC, такая, что $\angle XAB = \angle XBC = \varphi$, а P – такая точка, что $PX \perp OX$, $\angle XOP = \varphi$, причем углы XOP и XAB одинаково ориентированы. Докажите, что все такие точки P лежат на одной прямой.

А.Заславский

4. С ненулевым числом разрешается проделывать следующие операции: $x \mapsto \frac{1+x}{x}$, $x \mapsto \frac{1-x}{x}$. Верно ли, что из каждого ненулевого рационального числа можно получить каждое рациональное число с помощью конечного числа таких операций?

А.Петухов

11 класс

1. Круглая мишень разбита на 20 секторов, которые нумеруются по кругу в каком-либо порядке числами 1, 2, … …, 20. Если секторы занумерованы, например (как при игре в дартс), в следующем порядке: 1, 20, 5, 12, 9, 14, 11, 8, 16, 7, 19, 3, 17, 2, 15, 10, 6, 13, 4, 18, то наименьшая из разностей между номерами соседних (по кругу) секторов равна $12 - 9 = 3$ (из большего числа вычитается меньшее). Может ли указанная величина при нумерации в другом порядке быть больше 3? Каково наибольшее возможное значение этой величины?

И.Сергеев

2. Значение a подобрано так, что число корней первого из уравнений

$$4^x - 4^{-x} = 2\cos ax, \quad 4^x + 4^{-x} = 2\cos ax + 4$$

равно 2007. Сколько корней при том же a имеет второе уравнение?

В.Алексеев

3. Каким может быть произведение нескольких различных простых чисел, если оно кратно каждому из них, уменьшенному на 1? Найдите все возможные значения этого произведения.

А.Бегунц

4. В основании $A_1A_2\ldots A_n$ пирамиды $SA_1A_2\ldots A_n$ лежит точка O, причем $SA_1 = SA_2 = \ldots = SA_n$ и $\angle SA_1O = \angle SA_2O = \ldots = \angle SA_nO$. При каком наименьшем значении n отсюда следует, что SO – высота пирамиды?

И.Сергеев

5. Квадрат состоит из $n \times n$ клеток: две противоположные угловые клетки – черные, а остальные – белые. Какое наименьшее количество белых клеток достаточно перекрасить в черный цвет, чтобы после этого с помощью преобразований, состоящих в перекрашивании всех клеток какого-либо столбца или какой-либо строки в противоположный цвет, можно было сделать черными все клетки этого квадрата?

В.Алексеев

6. Точки A', B' и C' – середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC соответственно, а BH – его высота. Докажите, что если описанные около треугольников AHC' и CHA' окружности проходят через точку M, отличную от H, то $\angle ABM = \angle CBB'$.

В.Филимонов

7. Миша мысленно расположил внутри данного круга единичного радиуса выпуклый многоугольник, содержащий центр круга, а Коля пытается угадать его периметр. За один шаг Коля указывает Мише какую-либо прямую и узнает от него, пересекает ли она многоугольник. Имеет ли Коля возможность наверняка угадать периметр многоугольника через 3 шага с точностью до 0,3?

О.Косухин

Публикацию подготовил Б.Френкин

Избранные задачи Московской физической олимпиады

Первый теоретический тур

7 класс

1. Марс удобнее всего изучать во время противостояния, когда Земля находится между Марсом и Солнцем. Определите, через какой промежуток времени повторяются противостояния Земли и Марса. Марс совершает оборот вокруг Солнца за 687 земных дней, а Земля – за 365 дней.

М.Ромашка

2. На земле лежит слой снега толщиной h = 70 см. Давление снега на землю (без учета атмосферного давления) p = 630 Па. Погода морозная, и снег состоит из воздуха и льда. Определите, сколько процентов объема снега занимает лед, а сколько – воздух. Плотность льда $\rho_л = 0{,}9\ г/см^3$. Ускорение свободного падения $g = 10\ м/с^2$.

М.Ромашка

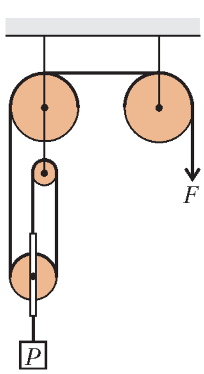


Рис. 1

3. На заводе для подъема тяжелых заготовок используется система из четырех блоков и одного троса, закрепленных на потолке, как показано на рисунке 1. С какой силой F надо тянуть вниз за конец троса, чтобы удерживать или медленно и равномерно поднимать заготовку, вес которой равен P? Участки троса, не лежащие на блоках, горизонтальны или вертикальны, весом блоков, троса и трением можно пренебречь.

М.Семенов

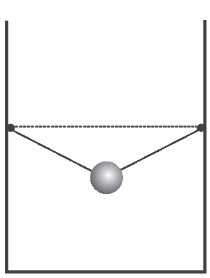


Рис. 2

4. Сплошной шарик подвешен в сосуде на двух легких нитях, как показано на рисунке 2. Свободные концы нитей закреплены на одной высоте. После того как сосуд заполнили водой и шарик оказался полностью погруженным в воду, натяжение нитей не изменилось. Определите плотность ρ материала, из которого изготовлен шарик. Плотность воды $\rho_в = 1000\ кг/м^3$.

И.Горбатый

8 класс

1. В широкий сосуд с водой медленно опускают на нити цилиндрический брусок так, что ось цилиндра все время остается вертикальной. График зависимости силы натяжения нити F от глубины погружения h нижнего основания цилиндра является отрезком прямой линии, как показано на рисунке 3. Найдите площадь основания цилиндра и его массу. Плотность воды $\rho_0 = 1\ г/см^3$, ускорение свободного падения $g = 10\ м/с^2$.

М.Ромашка

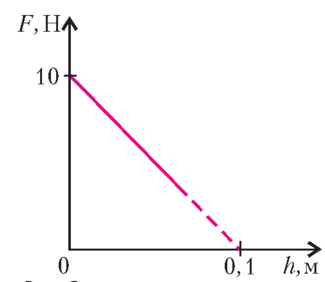


Рис. 3

2. В сосуде находился лед при температуре $t_л = 0\ ^\circ C$. Туда влили воду массой $m_в = 0{,}4$ кг, взятую при температуре $t_в = 60\ ^\circ C$. Какая температура установилась в сосуде, если конечный объем его содержимого V = 1 л? Чему равна масса содержимого сосуда? Плотности воды и льда $\rho_в = 1000\ кг/м^3$ и $\rho_л = 900\ кг/м^3$, их удельные теплоемкости $c_в = 4200\ Дж/(кг \cdot ^\circ C)$ и $c_л = 2100\ Дж/(кг \cdot ^\circ C)$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг. Теплоемкостью сосуда и потерями тепла пренебречь.

М.Ромашка

3. В одном из двух одинаково длинных «черных ящиков» находится постоянный магнит, а в другом – длинная катушка из медной проволоки, подключенная к источнику постоянного тока. Как, используя только эти «черные ящики», определить, в каком из них находится постоянный магнит? Нельзя заглядывать внутрь ящиков, разбирать ящики и разрушать их.

И.Горбатый

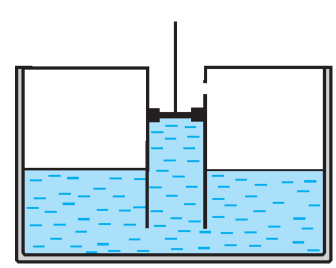


Рис. 4

9 класс

1. «Черный ящик» представляет собой систему, изображенную на рисунке 4. Внутри находятся вода и погруженный в нее узкий вертикальный цилиндр с поршнем. К поршню прикреплен выходящий наружу вертикальный шток. Потянув за шток и подвигав его вверх-вниз, школьник решил, что в «черном ящике» находится прикрепленная к штоку пружина, и измерил ее жесткость. Она оказалась равной $k = 100$ Н/м. Чему равна площадь поршня? Трением и массой поршня можно пренебречь. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

М.Ромашка

2. В электрической цепи, изображенной на рисунке 5, напряжение источника равно $U = 9$ В, сопротивления резисторов $R_1 = R_3 = 60$ Ом и $R_2 = 100$ Ом. Амперметр, который можно считать идеальным, показывает силу тока $I = 0{,}185$ А. Найдите силы токов, текущих через резисторы с сопротивлениями R_2 и R_3, и сопротивление четвертого резистора.

М.Ромашка

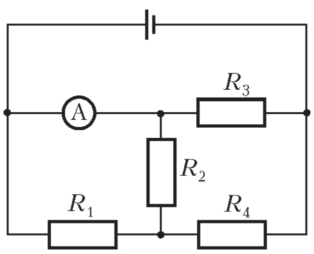


Рис. 5

10 класс

1. По гладкому горизонтальному столу скользит однородная линейка длиной $L = 25$ см. В некоторый начальный момент времени скорости концов линейки перпендикулярны к ней, направлены в разные стороны и равны $v_1 = 10$ см/с и $v_2 = 30$ см/с. Какая скорость будет у центральной точки линейки через время $t = 5$ с после начального момента? За какое время от начального момента линейка повернется на угол $90°$ от исходного положения?

А.Зильберман

2. В системе, изображенной на рисунке 6, грузы *1* и *2* прикреплены к нитям, массы грузов *1*, *2* и *3* равны M, $2M$ и $3M$ соответственно. Найдите их ускорения. Трение отсутствует. Блоки невесомы, нити невесомы и нерастяжимы, не лежащие на блоках участки нитей вертикальны.

А.Зильберман

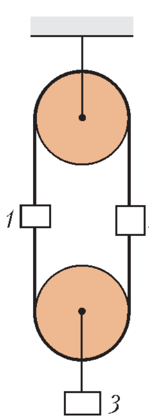


Рис. 6

3. По горизонтальному столу катится без трения тележка массой M со скоростью v_0. На горизонтальную поверхность тележки положили кирпич массой m, начальная скорость которого относительно стола была равна нулю. Кирпич продвинулся по тележке на расстояние l и остановился относительно нее. Найдите коэффициент трения между кирпичом и тележкой.

М.Ромашка

4. Изображенная на рисунке 7 электрическая цепь состоит из двух соединенных друг с другом «черных ящиков», каждый из которых имеет три вывода. При подключении к клеммам A и C омметр показывает значение сопротивления R_{AC}, при подключении к клеммам B и D – значение R_{BD}, при подключении к клеммам A и D – значение R_{AD}. Что покажет омметр при подключении к клеммам B и C? Известно, что в «черных ящиках» находятся только различным образом соединенные резисторы.

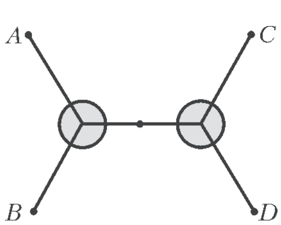


Рис. 7

Д.Харабадзе

11 класс

1. Одна из разновидностей так называемой планетарной передачи состоит из центральной (солнечной) шестерни (С), нескольких планетарных шестерен (П), оси которых соединены жесткой рамой – водилом (В), и кольцевой шестерни (К), имеющей внутреннее зацепление с планетарными (рис.8). Пусть радиусы солнечной и планетарных шестерен равны и солнечная шестерня приводится во вращение с угловой скоростью ω. С какой угловой скоростью будет вращаться кольцевая шестерня, если водило зафиксировано? С какой угловой скоростью будет вращаться водило, если кольцевая шестерня зафиксирована? С какой угловой скоростью в последнем случае будет вращаться планетарная шестерня?

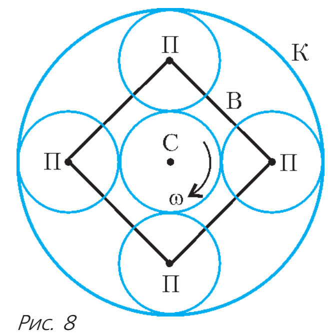


Рис. 8

Б.Обморошев

2. На длинной нити, перекинутой через блок, висят грузы массами m_1 и m_2 (рис.9). На высоте h_0 над более легким грузом держат шайбу из пластилина массой m_3. Известно, что $m_3 > m_2 - m_1 > 0$. В некоторый момент грузы массами m_1 и m_2 приходят в движение без начальной скорости. Когда первый груз доходит до шайбы, ее отпускают без начальной скорости, и шайба прилипает к грузу. На какую максимальную высоту над начальным положением поднимется шайба? Трение и масса блока пренебрежимо малы. Нить невесомая и нерастяжимая, ее участки, не лежащие на блоке, вертикальны.

М.Ромашка

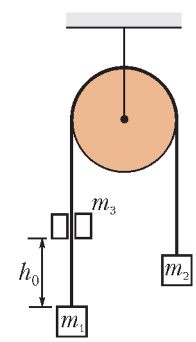


Рис. 9

3. Если направить поток протонов на кусок льда из тяжелой воды D_2O, то при минимальной кинетической энергии протонов $E_1 = 1{,}4$ МэВ происходит ядерная реакция с образованием ядер ^3_2He. Какую минимальную кинетическую энергию E_2 надо сообщить ядрам дейтерия, чтобы при их попадании на кусок льда из обычной воды произошла та же ядерная реакция?

С.Варламов

4. В сосуде находился лед при температуре $t_л = -20$ °С. Туда влили воду массой $m_в = 0{,}4$ кг, взятую при температуре $t_в = 60$ °С. Каким может быть конечный объем системы, если установившаяся в системе температура: а) положительна; б) отрицательна; в) равна нулю? Плотности воды и льда $\rho_в = 1000$ кг/м^3 и $\rho_л = 900$ кг/м^3, их удельные теплоемкости $c_в = 4200$ Дж/(кг·°С) и $c_л = 2100$ Дж/(кг·°С), удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг. Теплоемкостью сосуда и потерями тепла пренебречь.

М.Ромашка

5. Электрическая цепь состоит из двух конденсаторов емкостью C, двух одинаковых катушек индуктивностью L и идеального трансформатора с коэффициентом трансформации, равным единице (рис.10). Если зарядить один из конденсаторов и замкнуть ключ, подсоединяющий его к

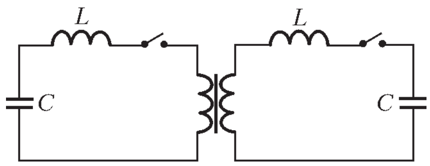


Рис. 10

трансформатору, в цепи возникнут гармонические колебания с частотой ω. Найдите возможные частоты гармонических электрических колебаний в цепи, если замкнуты оба ключа.

О.Шведов

Второй теоретический тур

8 класс

1. Два велосипедиста одновременно выезжают навстречу друг другу из деревень Липовка и Демушкино, находящихся на расстоянии $L = 10$ км друг от друга. Каждый планирует ехать со скоростью $v = 20$ км/ч и, достигнув противоположной деревни, сразу повернуть обратно. Но на пути все время дует ветер, скорость и направление которого постоянны. При движении по ветру скорость увеличивается на столько же, на сколько уменьшается при движении против ветра. Велосипедист, который сначала ехал по ветру, достигнув противоположной деревни, сразу повернул назад, а велосипедист, который сначала ехал против ветра, задержался в противоположной деревне, чтобы отдохнуть, и только потом повернул обратно. Известно, что велосипедисты встречались в точках A и B, находящихся на расстояниях $L_A = 2$ км и $L_B = 6$ км от Липовки. Найдите времена движения из Липовки в Демушкино и из Демушкино в Липовку. В какой деревне и в течение какого промежутка времени отдыхал велосипедист, exавший сначала против ветра?

М.Ромашка

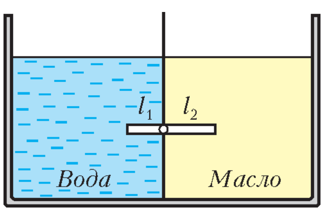


Рис. 11

2. Плотность масла измеряют в опыте, схема которого показана на рисунке 11. Сосуд разделен на две части вертикальной перегородкой. В одну часть сосуда налита вода, в другую – масло. В перегородку встроен шарнир, который может вращаться без трения. В шарнир вставлена однородная сосновая линейка, которая находится в равновесии. Длина левой части линейки $l_1 = 40$ см, правой $l_2 = 60$ см. Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность линейки $\rho = 600$ кг/м^3. Чему равна плотность масла?

М.Ромашка

3. Вазон для цветов, стоящий на улице, имеет плоское дно и вертикальные стенки. Толщина слоя земли в вазоне $h = 15$ см, а температура земли $t = 11\ ^\circ$C. На улице похолодало, и пошел снег. Снежинки состоят изо льда, имеют массу $m = 50$ мг, объем $V = 0{,}5$ см^3 и температуру $t_0 = 0\ ^\circ$C. Они падают вертикально с постоянной скоростью $v = 1$ м/с. В объеме воздуха $V_0 = 1$ м^3 находится $N_0 = 100$ снежинок. За какое время на земле в вазоне нарастет слой снега толщиной $H = 10$ см? Считайте, что вся земля в вазоне равномерно пропитывается водой, имеет в любой момент одну и ту же температуру во всем объеме и почти не обменивается теплом со стенками вазона и с воздухом. Плотность земли $\rho = 1500$ кг/м^3, удельная теплоемкость земли $c = 900$ Дж/(кг·°С), удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг.

М.Семенов, М.Ромашка

9 класс

1. На неподвижно закрепленном цилиндре радиусом R лежит тонкая линейка длиной $l = 2\pi R$ и массой M. Линейка расположена горизонтально перпендикулярно к оси цилиндра и опирается на него своей серединой. На середине линейки сидит жук массой $0{,}2M$, который начинает медленно ползти к одному из концов линейки, прочно цепляясь за ее шероховатости; линейка при этом меняет угол своего наклона к горизонту, перекатываясь по цилиндру без проскальзывания. На каком расстоянии от середины линейки будет расположена точка соприкосновения линейки и цилиндра, когда жук доползет до конца линейки? Под каким углом к горизонту будет при этом наклонена линейка? При каких значениях коэффициента трения между цилиндром и линейкой возможно такое ее перекатывание без проскальзывания?

И.Горбатый

2. Электрическая цепь, изображенная на рисунке 12, состоит из идеальной батарейки, двух одинаковых вольтметров и двух одинаковых миллиамперметров. Показание миллиамперметра A_1 равно $I_1 = 1{,}6$ мА, показания вольтметров равны $U = 1{,}2$ В и $U' = 0{,}3$ В. Какой из вольтметров – V_1 или V_2 – показывает меньшее напряжение? Найдите показание миллиамперметра A_2 и напряжение батарейки.

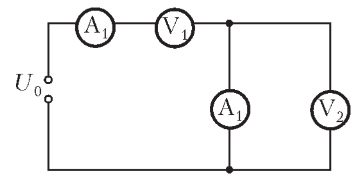


Рис. 12

А.Зильберман

3. Длинное наклонное зеркало соприкасается с горизонтальным полом и наклонено под углом α к вертикали (рис.13). К зеркалу приближается школьник, глаза которого расположены на высоте h от уровня земли. На каком максимальном расстоянии от нижнего края зеркала школьник увидит: а) изображение своих глаз; б) свое изображение полностью во весь рост?

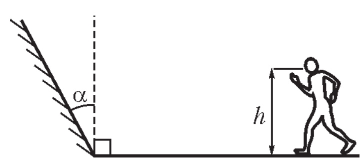


Рис. 13

М.Ромашка

10 класс

1. Школьник бросает мяч в баскетбольное кольцо. Чтобы попасть в цель при броске под углом $\alpha_1 = 30°$ к горизонту, он должен сообщить мячу начальную скорость $v_1 = v$, а при броске под углом $\alpha_2 = 60°$ – начальную скорость $v_2 = v/2$. На какой высоте над точкой бросания расположено баскетбольное кольцо? Под каким углом к горизонту наклонен отрезок, соединяющий точку бросания и кольцо? Бросок каждый раз производится из одной и той же точки. Сопротивлением воздуха можно пренебречь, ускорение свободного падения равно g.

А.Зильберман

2. Найдите ускорения грузов *1* и *2* и силу натяжения нити в системе, изображенной на рисунке 14. Массы грузов *1*, *2*, *3* и *4* равны M_1, M_2, m_1 и m_2 соответственно. Грузы *3* и *4* касаются грузов *1* и *2*, участки нити, не лежащие на блоках, горизонтальны или вертикальны. Нить натянута, невесома и нерастяжима, блоки легкие, трение отсутствует.

А.Зильберман

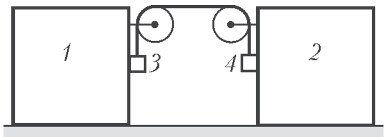


Рис. 14

11 класс

1. На конце невесомого проводящего стержня закреплен маленький металлический шарик, касающийся гладкой проводящей сферической поверхности радиусом R = 0,8 м (рис.15). Второй конец стержня закреплен в центре сферы при помощи проводящего шарнира так, что стержень может вращаться без трения вокруг него, сохраняя электрический контакт со сферой. Эта система помещена в однородное вертикальное магнитное поле с индукцией B = 0,5 Тл и подключена к батарее. Если стержень закрутить вокруг вертикальной оси в определенном направлении с частотой $\omega = 5\ \text{с}^{-1}$ и под определенным углом к вертикали, то этот угол и частота вращения в дальнейшем не будут меняться. Определите этот угол и ЭДС батареи. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10\ \text{м/с}^2$.

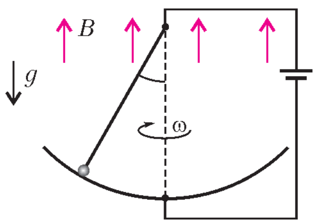


Рис. 15

Ю.Старокуров, М.Семенов

2. Звуковая волна от удаленного источника падает на стену, имеющую вогнутую цилиндрическую форму, под углом, близким к α, причем эта волна идет перпендикулярно оси цилиндра. Определите, в какую точку вблизи стены следует поместить чувствительный микрофон, чтобы он зарегистрировал максимально возможную интенсивность звука. Найдите расстояния от этой точки до стены и до оси цилиндра. Радиус цилиндра R много больше размеров стены, но много меньше расстояния до источника. Длина волны звука много меньше размеров стены.

О.Шведов

Публикацию подготовили М.Семенов, А.Якута

Геометрические олимпиады имени И.Ф.Шарыгина

В память о ярком человеке, талантливом математике и выдающемся педагоге Игоре Федоровиче Шарыгине (1937–2004) ряд российских научных организаций и учебных заведений решили ежегодно, начиная с 2005 года, проводить геометрическую олимпиаду школьников. В оргкомитет и жюри олимпиады вошли известные ученые, педагоги, энтузиасты математического просвещения из разных российских регионов. Олимпиада состоит из двух туров: заочного и финального. В заочном туре, задачи которого публикуются в газете «Математика» и на сайте Московского центра непрерывного математического образования (www.mccme.ru), могут принимать участие все желающие школьники. Победители заочного тура приглашаются на финал. Кроме того, к участию в финальном туре допускаются победители региональных геометрических олимпиад. Финальный тур проводится в устной форме.

Финальные туры двух первых олимпиад прошли в сентябре 2005 в Москве и в июле 2006 года в Дубне. Материалы этих олимпиад опубликованы в книге «Геометрические олимпиады им. И.Ф.Шарыгина» (М.: МЦНМО, 2007), посвященной 70-летию И.Ф.Шарыгина.

Среди победителей двух первых олимпиад хочется отметить Е.Авксентьева (Ростов), С.Сафина (Краснодар), М.Лысова, Н.Печёнкина, Р.Девятова, М.Илюхину (все – Москва), не только показавших высокие результаты, но и нашедших в ряде задач более красивые решения, чем были у жюри.

Ниже приводятся избранные задачи первых двух олимпиад (с решениями) и несколько задач заочного тура третьей олимпиады (для самостоятельного решения).

Задачи

1 (В.Протасов). *Две окружности с радиусами 1 и 2 имеют общий центр в точке O. Вершина A правильного треугольника ABC лежит на большей окружности, а середина стороны BC – на меньшей. Чему может быть равен угол BOC?*

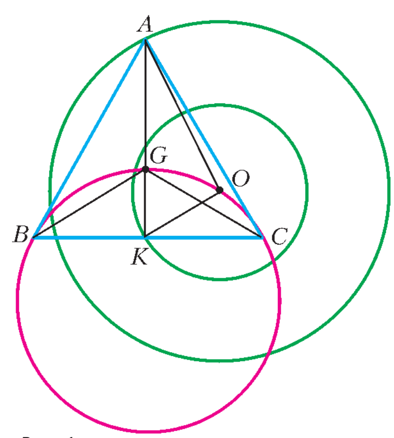


Рис. 1

Решение (М.Лысов). Это, пожалуй наиболее элегантное, решение основано на использовании следующей классической теоремы элементарной геометрии. Пусть имеется некоторый отрезок AB на плоскости и некоторое положительное число λ. Тогда геометрическое место точек X, таких что $\frac{AX}{BX} = \lambda$, есть некоторая окружность. Если P и Q – точки, которые делят отрезок в отношении λ (внутренним и внешним образом), то эта окружность совпадает с окружностью, построенной на отрезке PQ как на диаметре. Она называется окружностью Аполлония.

Из условия нашей задачи сразу следует, что $AG/KG = AB/KB = AC/KC = AO/KO = 2$ (рис.1), откуда вытекает, что точки B, G, O, C лежат на окружности Аполлония для отрезка AK и $\lambda = 2$. Понятно, что $\angle BOC = \angle BGC = 120°$ (или $180° - \angle BGC = 60°$).

2 (В.Пайлс, Нидерланды). *На плоскости даны два отрезка A_1B_1 и A_2B_2, причем $\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = k < 1$. На отрезке A_1A_2 взята точка A_3, а на продолжении этого отрезка за точку A_2 – точка A_4, так что $\frac{A_3A_2}{A_3A_1} = \frac{A_4A_2}{A_4A_1} = k$. Аналогично, на отрезке B_1B_2 берется точка B_3, а на продолжении этого *отрезка за точку B_2 – точка B_4, так что* $\frac{B_3B_2}{B_3B_1} = \frac{B_4B_2}{B_4B_1} = k$. *Найдите угол между прямыми A_3B_3 и A_4B_4.*

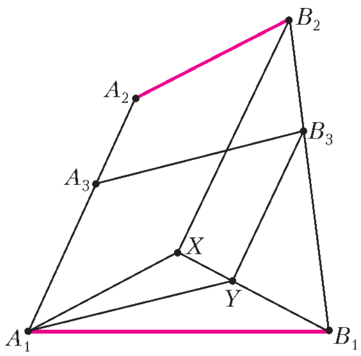


Рис. 2

Решение (С.Сафин). Построим параллелограмм $A_1A_2B_2X$ и проведем биссектрису A_1Y треугольника A_1XB_1 (рис.2). Так как $\frac{B_1Y}{XY} = \frac{A_1B_1}{A_1X} = k$, получим $B_3Y \parallel B_2X$ и $B_3Y = kB_2X = A_1A_3$. Следовательно, $A_1A_3B_3Y$ – параллелограмм, т.е. $A_3B_3 \parallel A_1Y$. Аналогично, прямая A_4B_4 параллельна внешней биссектрисе угла XA_1B_1, и, значит, прямые A_3B_3 и A_4B_4 перпендикулярны.

3 (В.Протасов). *На плоскости дан угол и точка K внутри него. Докажите, что найдется точка M, обладающая следующим свойством: если произвольная прямая, проходящая через K, пересекает стороны угла в точках A и B, то MK является биссектрисой угла AMB.*

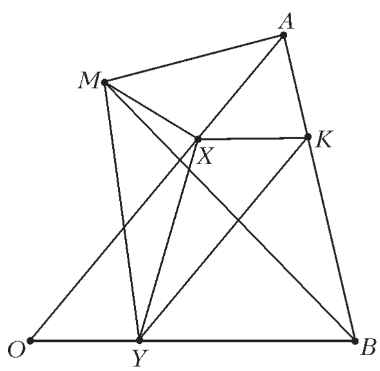


Рис. 3

Решение (Р.Девятов). Пусть O – вершина угла (рис.3). Построим параллелограмм $KXOY$, две стороны которого лежат на сторонах угла. Пусть M – точка, симметричная K относительно XY. Докажем, что M – искомая.

Пусть прямая, проходящая через K, пересекает прямые OX и OY в точках A и B. Заметим, что $MX = KX$, $MY = KY$, $\Delta MXY = \Delta KXY = \Delta OYX$, поэтому $MOYX$ – равнобокая трапеция и $\angle MXO = \angle MYO$. Значит, $\angle MXA = 180° - \angle MYO = \angle BYM$. Далее, треугольники AXK и KYB подобны, так как их стороны соответственно параллельны, поэтому $KX/XA = BY/YK$. Отсюда получаем

$$\frac{MX}{XA} = \frac{KX}{XA} = \frac{BY}{YK} = \frac{BY}{YM}.$$

Из этого равенства и из равенства углов MXA и BYM находим, что треугольники MXA и BYM подобны.

Теперь, пользуясь двумя доказанными подобиями, получаем

$$\frac{MA}{BM} = \frac{MX}{BY} = \frac{KX}{BY} = \frac{AK}{KB},$$

что и означает, что MK – биссектриса треугольника AMB.

4 (Б.Френкин). Треугольник разрезан на несколько (не менее двух) треугольников. Один из них равнобедренный (не равносторонний), а остальные равносторонние. Найдите углы исходного треугольника.

(*Ответ*: 90°, 60°, 30°.)

5 (Б.Френкин). а) Сколько осей симметрии может иметь клетчатый многоугольник, т.е. многоугольник, стороны которого лежат на линиях листа бумаги в клетку? (Укажите все возможные значения.)

б) Сколько осей симметрии может иметь клетчатый многогранник, т.е. многогранник, составленный из одинаковых кубиков, примыкающих друг к другу гранями?

(*Ответ*: а) 0, 1, 2 или 4; б) 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 9.)

6 (А.Заславский). Найдите геометрическое место центров правильных треугольников, стороны которых проходят через 3 заданные точки A, B, C (т.е. на каждой стороне или ее продолжении лежит ровно одна из заданных точек).

(*Ответ*: окружность, проходящая через вершины равнобедренных треугольников с основаниями AB, BC, CA и углами 120°, построенных внутрь треугольника ABC.)

7 (Д.Шноль). Мальчик с папой стоят на берегу моря. Если мальчик встанет на цыпочки, его глаза будут на высоте 1 м от поверхности моря, а если сядет папе на плечи, то на высоте 2 м. Во сколько раз дальше он будет видеть во втором случае? (Найдите ответ с точностью до 0,1; радиус Земли считайте равным 6000 км.)

(*Ответ*: в $\sqrt{2}$ раз.)

8 (Л.Емельянов). Какие треугольники можно разрезать на три треугольника с равными радиусами описанных окружностей?

(*Ответ*: все, кроме равнобедренных неостроугольных.)

9 (Б.Френкин). Найдите геометрическое место вершин треугольников с заданными ортоцентром и центром описанной окружности.

(*Указание*: расстояние от вершины A треугольника ABC до его ортоцентра равно удвоенному расстоянию от центра описанной окружности до стороны BC.)

Публикацию подготовил А.Заславский

Международный турнир «Компьютерная физика»

Турнир «Компьютерная физика» – часть программы Международного интеллект-клуба «Глюон». Цель турнира – поддержка талантливой молодежи, проявившей интерес к фундаментальным наукам и новым информационным технологиям. Задача организаторов турнира – создание временных творческих коллективов для решения современных научных проблем. В такие коллективы входят школьники, учителя, студенты, аспиранты, ученые.

Турнир проводится в виде интеллектуального соревнования между командами (по 5 человек в каждой) в два тура – заочный и очный.

XI Турнир «Компьютерная физика»

По итогам двух туров турнира абсолютным победителем стала команда ФМЛ 1580 при Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана, получившая переходящий приз «Хрустальный глобус». Дипломами I степени были награждены команды ФМЛ 1580 при МГТУ и лицея 1511 при Московском инженерно-физическом институте, сборная команда Удмуртии и сборная команда города Ижевска. Диплом II степени получила команда Классического лицея 1 при РГУ (г.Ростов-на-Дону), а диплом III степени – команда МТЛ города Самары.

Заочный тур «Поверхностное натяжение»

Предлагалось на примере простой микроскопической модели изучить явление поверхностного натяжения и определить коэффициент поверхностного натяжения жидкости по заданному потенциалу межмолекулярного взаимодействия. Подробно о модели и конкретном задании можно прочитать в «Кванте» № 5 за 2006 год. Здесь же будет рассказано лишь о разборе этого задания.

Движение частиц в капле описывается уравнением Ньютона

$$m\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_j \vec{F}_{ij}\left(\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|\right),$$

где $i = 1,\ldots N$ – номер атома, $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$ – радиус-вектор i-й частицы, $\vec{F}_{ij}$ – сила взаимодействия между частицами i и j, определяемая по потенциалу Леннарта–Джонса. При моделировании начальные значения модуля скорости частиц выбираются случайным образом из распределения Максвелла с некоторой температурой T, угловое распределение по скоростям задается изотропным. Полагается, что расстояние между частицами соответствует равновесному $r^* = \sqrt[6]{2r_0}$, а геометрическая форма капли – произвольная.

Начальная форма двумерной капли была выбрана в виде прямоугольника с соотношением сторон 4:1 и содержала число частиц $N = 160$ при $T = 15$ К. В результате моделирования оказывается, что некоторое количество атомов отрывается от капли (испаряется) и образует пар, находящийся в динамическом равновесии с жидкой фазой. Через некоторое время капля приобретает форму, близкую к шару. Такая форма соответствует минимальной величине поверхностной энергии.

При моделировании было показано, что изменение потенциальной энергии взаимодействующих частиц пропорционально площади поверхности капли (для двумерной капли в качестве площади поверхности выступает ее периметр).

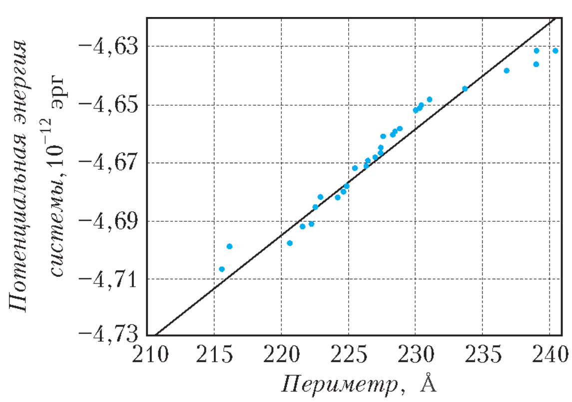


Рис. 1

Зависимость изменения потенциальной энергии от изменения площади поверхности представлена на рисунке 1. Величина коэффициента поверхностного натяжения определяется как тангенс угла наклона полученной прямой и составляет $3{,}33 \cdot 10^{-8}$ эрг/см при $T = 20$ К.

На рисунке 2 представлена зависимость коэффициента поверхностного натяжения при $T = 20$ К от числа частиц,

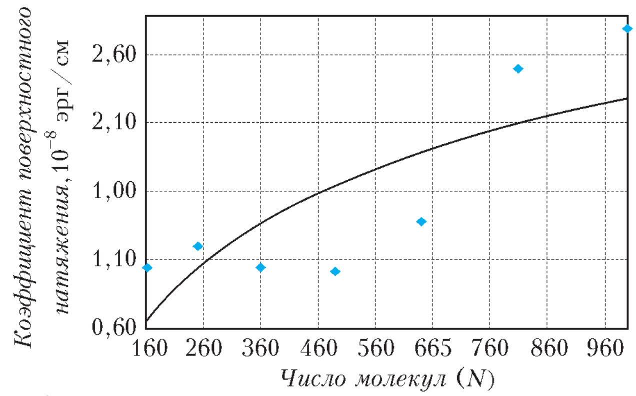


Рис. 2

образующих каплю. Как видно, с увеличением числа частиц коэффициент поверхностного натяжения плавно возрастает и приближается к значению, соответствующему макроскопически большому числу частиц.

Зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры для капли, содержащей 160 частиц, приведена на рисунке 3. Полученная зависимость подтверждает

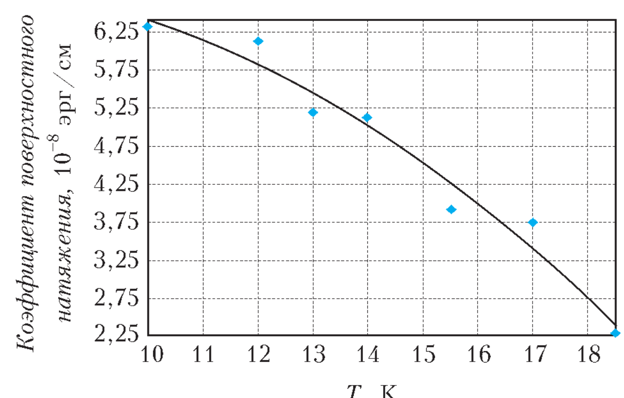


Рис. 3

известный экспериментальный факт убывания коэффициента поверхностного натяжения с увеличением температуры, что связано с увеличением среднего расстояния между атомами.

Решение представлено командой сборной Удмуртии в составе: Жуйков Богдан, Задумин Евгений, Лебедев Артем, Мозгунов Кирилл, Печерский Роман.

XII Турнир «Компьютерная физика»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» приглашает региональные центры, гимназии и школы, работающие с одаренными детьми, принять участие в XII Турнире «Компьютерная физика» в январе – феврале 2007 года.

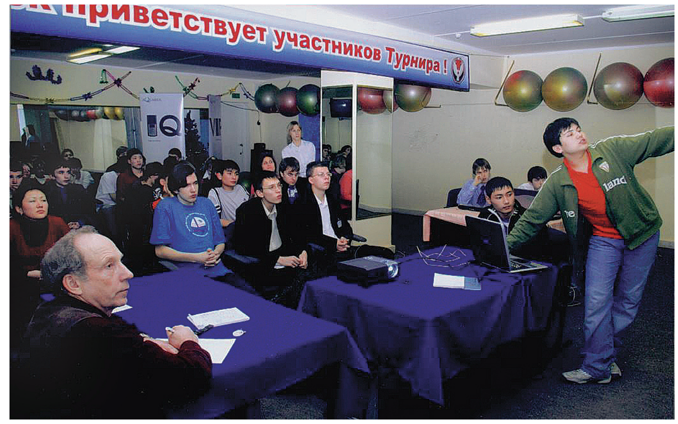
Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Москва, Пролетарский пр.,15/2, МИК «Глюон»

Телефон: (495)517-80-14, факс: (495) 396-82-27

E-mail: gluon@yandex.ru

Сайт: www. gluon.informika.ru

Заочный тур «Лазерная искра»



Создание лазерных источников электромагнитного излучения в начале 60-х годов прошлого века позволило получить интенсивности электромагнитного излучения в видимом диапазоне частот вплоть до $10^{10}-10^{12}$ Вт/см^2. Такие значения на много порядков превышали мощности световых потоков, достижимые в долазерную эпоху. Как результат, в первой половине 60-х годов XX века был экспериментально обнаружен целый ряд новых физических эффектов, положивших начало бурному развитию новой области физики – нелинейной оптики. Одним из них был эффект пробоя газов излучением оптической частоты (лазерная искра), обнаруженный в 1963 году.

Явление пробоя газов внешними постоянными или переменными электрическими полями было известно давно и изучалось еще в начале прошлого века. И хотя физика развития электронной лавины в газах под действием внешнего электрического поля стала понятна еще в 20-х годах, экспериментальное наблюдение лазерной искры в поле излучения рубинного лазера вызвало сенсацию в научном мире.

Лавинообразное увеличение числа электронов в фокусе лазерного пучка происходит в результате ионизации атомов (молекул) газа электронами, которые набирают энергию в поле лазерного излучения. В случае если энергия электрона превышает потенциал ионизации I_i атома, то при столкновении электрона с атомом с некоторой вероятностью может произойти процесс ионизации, в результате которого образуется положительный ион и еще один электрон: $A+e\to A^{++}+2e$. Вероятность этого процесса – в дальнейшем мы будем ее характеризовать константой скорости k_i – резко зависит от напряженности электрического поля волны. Кроме того, существуют и каналы гибели электронов: это, прежде всего, диффузионный уход электронов из фокального объема, а также процесс прилипания. (Под прилипанием понимают процесс рекомбинации электрона на нейтральный атом (молекулу) с образованием отрицательного иона. Атомы (молекулы), у которых существуют устойчивые связанные состояния отрицательных ионов, называют электроотрицательными. К их числу относятся, например, атомы и молекулы кислорода.) В дальнейшем процесс прилипания будем характеризовать константой скорости k_a. Значения этой константы, а также коэффициента диффузии электронов в первом приближении могут считаться постоянными и независящими от интенсивности воздействующего излучения.

Для теоретического описания развития лавины в поле лазерного излучения необходимо составить уравнение баланса электронов, рождающихся в поле лазерного излучения и гибнущих в результате процессов рекомбинации, прилипания и диффузии. С учетом этих процессов уравнение для распределения концентрации электронов n в объеме сфокусированного лазерного пучка (в приближении сферически симметричной фокусировки) можно записать в виде

$$\frac{\partial n(r,t)}{\partial t}=D\frac{1}{r}\frac{\partial^2\left(rn(r,t)\right)}{\partial r^2}+\nu_i n-\nu_a n, \qquad (*)$$

где D – коэффициент диффузии электронов, $\nu_i=Nk_i$ и $\nu_a=Nk_a$ – частоты ионизации и прилипания, k_i и k_a – введенные ранее константы скорости, N – концентрация атомов (молекул). Для решения уравнения $(*)$ необходимо задать некоторое начальное распределение затравочных электронов, с которых начинается развитие электронной лавины в газе. В реальности они возникают за счет эффекта многофотонной ионизации атомов сильным лазерным полем, ионизации примесных микрочастиц, которые практически всегда присутствуют в газах, частиц космического фона излучения и других причин.

Задание

Разработайте алгоритм решения уравнения $(*)$, описывающего развитие электронной лавины в поле лазерного импульса с интенсивностью P и длительностью τ. Считайте, что импульс имеет прямоугольную форму. Размер области фокусировки R_0. Формально уравнение $(*)$ описывает диффузию электронов в безграничном пространстве, однако при численном его интегрировании из физических соображений необходимо выбрать некоторый максимальный размер области счета $R_{\max}>R_0$.

1. Исследуйте зависимость пороговой интенсивности оптического излучением CO_2 лазера ($\lambda=10{,}6$ мкм) в зависимости от давления окружающего газа. Распределение интенсивности излучения по радиусу таково: $P=P_0\exp\left(-r^2/R_0^2\right)$.

2. Исследуйте зависимость пороговой интенсивности оптического пробоя в зависимости от размера пятна фокусировки.

3. Исследуйте зависимость пороговой интенсивности оптического пробоя в зависимости от длительности лазерного импульса.

Все исследования проведите для гелия (эффект прилипания отсутствует) и воздуха (смесь азота и кислорода, молекулы кислорода обладают свойством электроотрицательности). Под порогом пробоя будем понимать такую интенсивность излучения, при которой за время импульса в центре фокального пятна степень ионизации образующейся плазмы успевает возрасти до значения $\alpha=n/N\approx 0{,}01$. Исследования проведите в диапазоне p = 0,001 – 1 атм (температуру газа считать равной 300 К); радиус пятна фокусировки R = = 0,01 – 0,3 см; длительность импульса $\tau=10^{-9}-10^{-6}$ с.

Используйте следующие зависимости и значения параметров, входящих в уравнение $(*)$:

константа скорости прилипания электронов к молекуле кислорода $k_a=10^{-13}$ см^3/с;

константы скорости ионизации в воздухе $k_i = AN\exp(-B/E)$, $A=4{,}6\cdot10^{-8}$ см^3/с, $B=1{,}37\cdot10^{6}$ см/В,

в гелии $k_i=AN\exp(-B/E)$, $A=0{,}9\cdot10^{-8}$ см^3/с, $B=1{,}46\times 10^{7}$ см/В;

коэффициент электронной диффузии $D=C/N$, $C=3\cdot10^{22}$ 1/(см·с).

Публикацию подготовили
В.Альминдеров, А.Попов, О.Поповичева