

Об одной замечательной прямой в треугольнике

А.КАРЛЮЧЕНКО, Г.ФИЛИППОВСКИЙ

ПУСТЬ ДАН ТРЕУГОЛЬНИК ABC (РИС.1), I – ЕГО ИНЦЕНТР, т.е. центр вписанной окружности, K_1, K_2, K_3 – точки

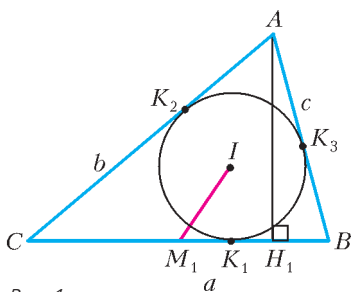


Рис. 1

касания вписанной окружности со сторонами, M_1 – середина стороны BC , AH_1 – высота, проведенная из вершины A . Оказывается, что прямая M_1I (и еще две аналогичные прямые, соединяющие середины двух других сторон с инцентром) обладает целым рядом свойств, помогающих решать большое количество задач. Об этих свойствах и их применениях мы и поговорим.

Свойства прямой M_1I

Свойство 1. Прямые M_1I и AT_1 , где T_1 – точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC , параллельны.

Доказательство. Пусть K_1D – диаметр вписанной в $\triangle ABC$ окружности (рис.2). Касательная EF к этой окружности в точке D будет, очевидно, параллельна стороне BC .

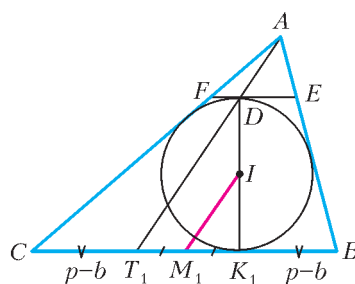


Рис. 2

Точка D является точкой касания вневписанной окружности треугольника AEF со стороной EF . В свою очередь, T_1 – точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC . Треугольники AEF и ABC гомотетичны с центром гомотетии в точке A . Поэтому A, D и T_1 лежат на одной прямой. Кроме того, $BK_1 = CT_1 = p - b$, где p – полупериметр треугольника (докажите это!). Следовательно, $T_1M_1 = M_1K_1$ и M_1I – средняя линия в $\triangle DK_1T_1$. А это и значит, что $M_1I \parallel AT_1$.

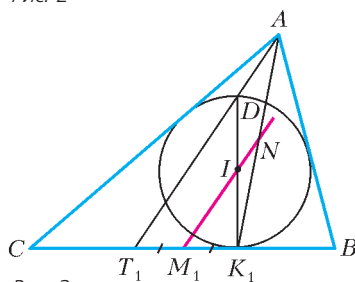


Рис. 3

Свойство 2. Прямая M_1I делит отрезок AK_1 пополам.

Доказательство. Пусть прямая M_1I пересекает AK_1 в точке N (рис.3). Поскольку $M_1I \parallel AT_1$ и $T_1M_1 = M_1K_1$, то M_1N – средняя линия в $\triangle AK_1T_1$. Таким образом, $AN = NK_1$.

Заметим, что свойство 2 может быть элегантно доказано с помощью **теоремы Ньютона**: если в четырехугольник вписана окружность, то ее центр расположен на прямой, соединяющей середины диагоналей четырехугольника.

Действительно, $\triangle ABC$ можно рассматривать как вырожденный четырехугольник ABK_1C ($\angle BK_1C = 180^\circ$). Тогда, согласно теореме Ньютона, точки M_1 и N (середины диагоналей), а также центр окружности I лежат на одной прямой.

Свойство 3 Прямая M_1I отсекает от высоты AH_1 отрезок AQ , равный радиусу вписанной в $\triangle ABC$ окружности.

Доказательство. Поскольку $ADIQ$ – параллелограмм (его противоположные стороны параллельны), то $AQ = DI = r$ (рис.4).

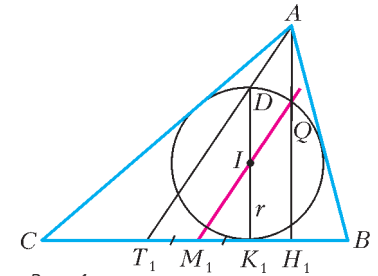


Рис. 4

Свойства 2 и 3 предлагались в качестве задач на II и III Всесоюзной математической олимпиаде соответственно.

Далее мы покажем, как «работают» свойства 1 – 3 прямой M_1I .

Задачи на доказательство

Задача 1. Пусть M – центроид, т.е. точка пересечения медиан, треугольника ABC . Докажите, что M_1I делит отрезок MK_1 в отношении 1:3, считая от центроида M .

Решение. Поскольку $T_1M_1 = M_1K_1$ и $AM : MM_1 = 2 : 1$, то точка M – центроид в $\triangle AK_1T_1$ (рис.5). А значит, $K_1M : MG = 2 : 1$. Вместе с тем, $M_1I \parallel AT_1$ (свойство 1) и $K_1L = LG$. Теперь нетрудно подсчитать, что $ML : LK_1 = 1 : 3$.

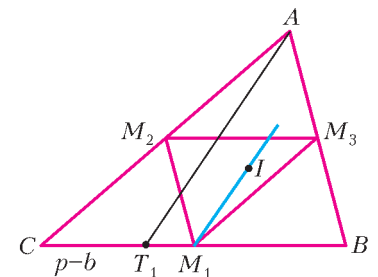


Рис. 5

Задача 2. Пусть M_2, M_3 – середины сторон AC и BA соответственно. Докажите, что прямая M_1I делит периметр $\triangle M_1M_2M_3$ пополам.

Решение. Прямая AT_1 делит периметр $\triangle ABC$ пополам. Действительно, $AC + CT_1 = b + p - b = p$ и $M_1I \parallel AT_1$ (рис.6). Тогда AT_1 и M_1I – соответственные прямые в гомотетичных треугольниках ABC и $M_1M_2M_3$.

Задача 3. Докажите, что прямые M_1I , T_1M и AK_1 пересекаются в одной точке.

Решение. Решая задачу 1, мы показали, что точка M является центроидом в треугольнике $\triangle AK_1T_1$, а значит, точки T_1, M и N лежат на одной прямой (см. рис.5). По свойству 2 точки M_1, I, N лежат на одной пря-

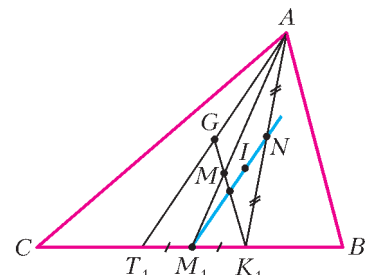


Рис. 6

(Продолжение см. на с.34)

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ВЫПУКЛЫЕ ФИГУРЫ

• Согласно древней легенде, первую экстремальную задачу решала царица Дидона. Спасаясь от преследований своего брата, она высадилась во владениях нумидийского короля Ярба. Ярб разрешил выделить ей такой клочок земли, который можно ограничить бычьей шкурой. Находчивая Дидона вырезала из шкуры длинный тонкий ремешок и окружила им достаточно большую площадь в форме полукруга. По преданию, на этом месте возник город Карфаген.

• Вопросы, касающиеся наименьших и наибольших геометрических величин, встречаются в «Началах» Евклида (3 в. до н.э.). Например, в VI книге «Начал» содержится Предложение 27, в современной формулировке звучащее так: «Из всех параллелограммов, которые можно вписать в данный треугольник, наибольшую площадь имеет тот, основание которого равно половине основания треугольника». Средневековые комментаторы заметили, что таким приемом Евклида решается самая простая и самая древняя геометрическая задача на экстремум: «Какой из всех прямоугольников заданного периметра имеет наибольшую площадь?» Как указал Папп Александрийский (III в.), таким свойством обладает квадрат.

• Уже в Древней Греции было известно, что круг имеет большую площадь, чем все другие фигуры равного с ним периметра, а шар имеет наибольший объем среди всех тел с той же поверхностью. В начале второго века до нашей эры греческий геометр Зенодор написал специальный трактат «О фигурах, имеющих равную периферию». Это сочинение до нас не дошло. Однако у Паппа (III в.) и Теона Александрийского (IV в.) сохранились 14 предложений, заимствованных из этого сочинения. Среди них есть такие утверждения: «При одинаковом числе сторон и равных периметрах у правильного многоугольника площадь больше, чем у неправильного», «Из двух правильных многоугольников тот больше, у которого больше сторон», «Площадь круга больше площади любого правильного многоугольника, имеющего с кругом одинаковые периметры».

• В 1833 году швейцарский математик Якоб Штейнер издал книгу «О наибольших и наименьших значениях плоских фигур и о сфере», в которой геометрическими средствами исследовал многочисленные проблемы, касающиеся максимумов и минимумов. В частности, в ней доказывается, что круг является плоской фигурой, имеющей наименьший периметр из всех фигур заданной площади.

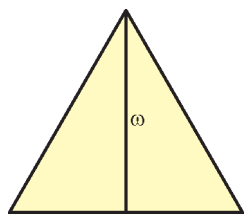


Рис. 1

• Шириной выпуклой фигуры называется ширина самой узкой полосы, в которую можно поместить данную фигуру. Среди всех фигур заданной ширины ω наименьшую площадь $S = \frac{\omega^2}{\sqrt{3}}$ имеет равносторонний треугольник (рис.1). Существует сколь угодно много фигур заданной шири-

ны ω с наибольшим радиусом r вписанной окружности $\omega/2$ — годится любая фигура, расположенная в полосе ширины ω и содержащая круг радиуса $\omega/2$ (рис.2). Здесь, как обычно, вписанным кругом фигуры называется самый большой круг, содержащийся в фигуре.

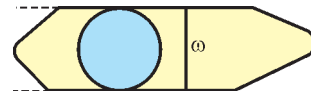


Рис. 2

• Среди фигур заданной ширины ω наименьшим периметром $\pi\omega$ обладают фигуры, для которых ширина самой узкой полосы, содержащей фигуру, не зависит от направления полосы. Такие фигуры получили название *фигур постоянной ширины*. Наряду с кругом имеются и другие фигуры постоянной ширины, например *треугольник Рело*. Он получается, если с центром в каждой вершине равностороннего треугольника провести дуги окружностей, соединяющих две другие вершины (рис.3).

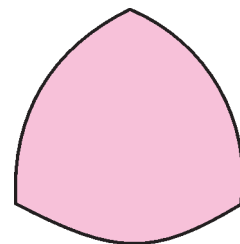


Рис. 3

• *Диаметром* выпуклой фигуры называется максимальное расстояние между ее точками. Среди всех фигур заданной ширины ω фигуры постоянной ширины имеют наименьший диаметр $D = \omega$, а среди всех фигур заданного диаметра D они имеют наибольший периметр $P = \pi D$.

• Среди всех фигур заданного диаметра D наименьшим радиусом R описанной окружности $D/2$ обладают фигуры с центром симметрии. (Описанным кругом фигуры называется самый маленький круг, в котором содержится фигура.) Наибольшим радиусом описанной окружности $\frac{D}{\sqrt{3}}$ среди всех фигур заданного диаметра D обладает *фигура Ям-гуги*. В общем случае она строится следующим образом. Из каждой вершины равностороннего треугольника проводится дуга окружности радиуса, не превышающего сторону и не меньшего высоты треугольника. Затем из вершин треугольника проводятся касательные к этим дугам (рис.4).

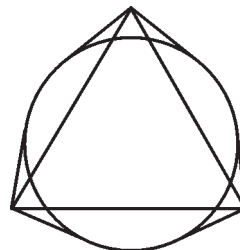


Рис. 4

Задач с двумя фиксированными параметрами больше, они труднее, класс экстремальных фигур богаче, некоторые задачи до сих пор не решены. В дальнейшем нам удобно будет называть (A, B, C) -задачей проблему поиска экстремальной плоской фигуры, у которой два геометрических параметра A и B фиксированы, а характеристика C достигает максимального или минимального значения. Здесь параметры — это рассмотренные ранее характеристики D, ω, r, R, P, S . Формулы для минимальных и максимальных значений параметров в ряде случаев достаточно сложные, и мы их здесь не приводим.

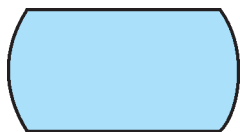


Рис. 5

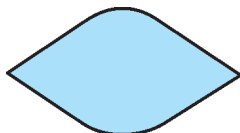


Рис. 6

• В (S, R, r) -задаче максимум r достигается на *круговом слое*, т.е. на пересечении круга с полосой, середина которой проходит через центр круга (рис.5), а минимум r — на *круге с шапками* (рис.6). Последняя фигура строится так: берутся две точки, симметричные относительно центра круга, и из этих точек проводятся касательные к кругу.

• В (S, R, D) -задаче максимум D достигается на фигуре постоянной ширины, а минимум — на вытянутом равнобедренном треугольнике. *Вытянутым равнобедренным треугольником* мы будем называть такой равнобедренный треугольник, в котором боковые стороны не меньше основания.

• В (S, R, P) -задаче максимум P достигается на *линзе* — фигуре, образованной пересечением двух равных кругов, расстояние между центрами которых меньше диаметра (рис. 7), а минимум P — на *почти правильном многоугольнике* (рис.8). Под последним мы подразумеваем такой многоугольник,

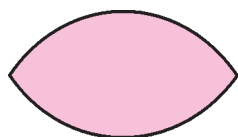


Рис. 7

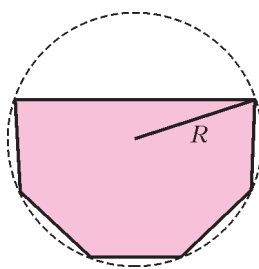


Рис. 8

который можно вписать в окружность радиуса R , причем длины всех сторон этого многоугольника, кроме одной, равны между собой, а оставшаяся сторона не меньше остальных.

• В (S, D, ω) -задаче максимум ω достигается на круговом слое, а вот минимум зависит от величины D . При $\omega = \frac{\sqrt{3}D}{2}$ получается правильный треугольник, который при $\omega < \frac{\sqrt{3}D}{2}$ превращается в неправильный (причем таких многоугольников существует множество), а при $\frac{\sqrt{3}D}{2} < \omega \leq D$ возникает фигура Ямагути.

• Интересно проанализировать, как меняется экстремальная фигура, если зафиксировать один параметр и менять другой. В качестве примера рассмотрим задачу (S, ω, P) -минимум. Зафиксируем значение ω (например, примем $\omega = 1$). Тогда $P \geq \pi$. Если $P = \pi$, то ответ — треугольник Рело, т.е. фигура Ямагути с радиусом, равным стороне правильного треугольника (1 в нашем случае). С ростом P сторона базового треугольника для фигуры Ямагути увеличивается (при сохранении радиуса дуг 1). Так продолжается до достижения периметром значения $2\sqrt{3}$. В этом случае радиус фигуры Ямагути совпадает с высотой равностороннего треугольника, равной 1, т.е. ответом является именно этот треугольник. При дальнейшем росте P деформируется уже треугольник — из равностороннего он становится равнобедренным, у ко-

торого боковые высоты сохраняют значение 1, а основание уменьшается.

Аналогично проанализируем задачу (S, ω, P) -максимум (как и выше, полагая $\omega = 1$). При $P = \pi$ экстремальной фигурой является круг диаметра 1. С ростом P круг превращается в «пулю» (рис.9), у которой полу-круги диаметра 1 соединяются все более и более длинным прямоугольником. Например, отсюда следует, что из фигур, для которых $P = \omega\pi$, максимальную площадь имеет круг, а минимальную — треугольник Рело.



Рис. 9

• В задаче (P, D, ω) -максимум экстремальная фигура строится аналогично круговому слою, если вместо круга берется любая фигура постоянного диаметра (рис.10). Здесь дополнительно длины отрезков AQ и BP должны равняться диаметру D — для круга это условие выполняется автоматически.

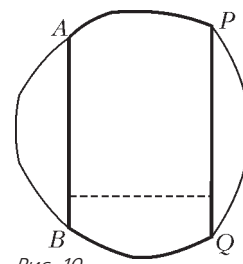


Рис. 10

В задаче (P, D, ω) -минимум экстремальная фигура строится аналогично кругу с шапками, если вместо круга берется любая фигура постоянной ширины (рис.11). Здесь базовая область имеет постоянную ширину ω , длины отрезков AB и CF равны ω , прямые l_1, l_2 (соответственно l_3, l_4) перпендикулярны AB (соответственно CF). Кстати, из этих условий следует, что все прямые l_1, l_2, l_3, l_4 имеют с базовой областью по одной общей точке. Опять для круга с шапками все условия выполняются автоматически.

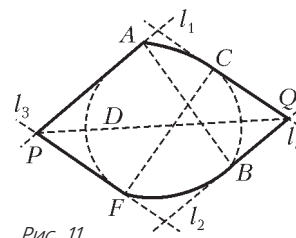


Рис. 11

• В задаче (ω, R, r) -максимум экстремальной фигурой является раздутый правильный треугольник, который строится так. Отложим на лучах с полюсом в центре правильного треугольника, проходящих через его вершины, равные отрезки и с центрами в полученных точках проведем круговые дуги, соединяющие противоположные вершины треугольника. Если длины отрезков «бесконечно большие», то получим правильный треугольник, если же точки совпадают с центром треугольника, то получим круг. В число этих фигур входит и треугольник Рело. Только для таких фигур справедливо равенство $\omega = R + r$, для всех остальных справедливо неравенство $\omega < R + r$.

В задаче (ω, R, r) -минимум экстремальных фигур также существует много. Дополнительно к условию, определяющему фигуры с максимальным ω при заданном r , здесь требуется, чтобы радиус описанного круга равнялся R .

Материал подготовил Е. Бронштейн

(Начало см. на с.31)

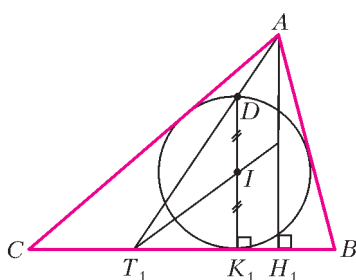


Рис. 7

Прямая T_1I разделит пополам и высоту AH_1 .

Задачи на построение

Задача 5. Постройте треугольник ABC по трем точкам: вершине A , инцентру I и центроиду M .

Решение. Соединим точки A и M , продлим AM на половину этого отрезка и получим M_1 — середину BC (рис.8).

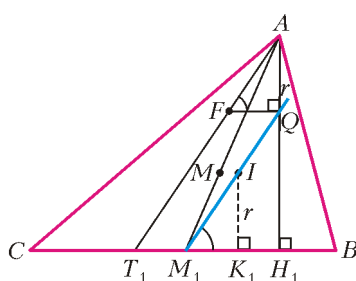


Рис. 8

Проведем прямую M_1I . Согласно ее свойствам, $M_1I \parallel AT_1$ и M_1I отсекает от высоты AH_1 отрезок $AQ = r$. Анализ показывает, что если провести через точку Q прямую параллельно BC — до пересечения с AT_1 в точке F , то $\Delta AQF = \Delta IK_1M_1$ (по катету и острому углу).

Отсюда и построение: через вершину A проведем прямую параллельно прямой M_1I . Отложим на ней отрезок $AF = M_1I$. Окружность, построенная на AF как на диаметре, пересечет прямую M_1I в точке Q . При этом $AQ \perp BC$. Дальнейшее построение очевидно.

Задача 6. Восстановите треугольник ABC по инцентру I , точке M_1 — середине BC , а также прямой l , содержащей высоту AH_1 .

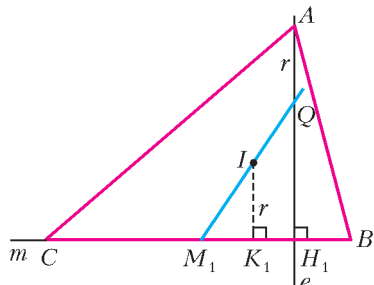


Рис. 9

Отложив от точки Q вверх отрезок, равный r , получим вершину A . Касательные из точки A к окружности с центром I радиуса $IK_1 = r$ пересекут прямую m в недостающих вершинах B и C .

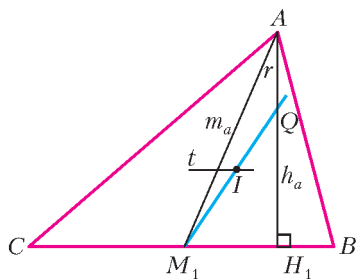


Рис. 10

Таким образом, прямые M_1I и T_1M пересекаются в середине отрезка AK_1 .

Задача 4. Докажите, что T_1I делит высоту AH_1 пополам.

Решение. Прямая T_1I делит DK_1 пополам ($DI = IK_1 = r$; рис.7). Поскольку $DK_1 \parallel AH_1$, то

но H_1M_1 на расстоянии r от нее, пересечет M_1Q в инцентре I . Дальнейшее очевидно.

Задача 8. Восстановите ΔABC по точкам M , I и прямой m , содержащей сторону BC .

Решение. Из точки I проведем перпендикуляр IK_1 к прямой m , причем $IK_1 = r$ (рис.11).

Соединим M и K_1 и, разделив этот отрезок в отношении 1:3, получим точку L (задача 1). Прямая IL пересечет m в точке M_1 — середине BC . Удвоив отрезок M_1M , получим вершину A . Касательные из A к окружности с центром I радиуса r пересекут m в вершинах B и C .

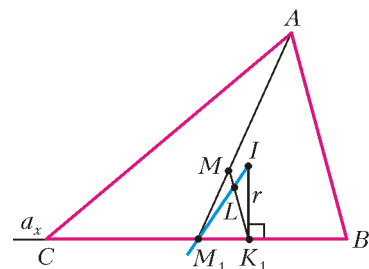


Рис. 11

Задачи про треугольник, в котором $b + c = 2a$

Иногда, в связи с тем что $b - a = a - c$, такой треугольник называют *разностным*. А вообще это треугольник, у которого одна из сторон равна среднему арифметическому двух других сторон.

Задача 9. Дан ΔABC , в котором $b + c = 2a$. Докажите, что в нем $QH_1 = 2r$.

Решение. Поскольку M_1I отсекает от высоты h_a отрезок $AQ = r$ (рис.12), то

$$\frac{QH_1}{QA} = \frac{h_a - r}{r} = \frac{h_a}{r} - 1 = \frac{2S/a}{S/p} - 1 = \frac{2p - a}{a} = \frac{b + c}{a} = \frac{2a}{a} = 2,$$

где S — площадь треугольника ABC . Значит, $QH_1 = 2r$.

Следствие. В разностном треугольнике $h_a = 3r$.

Задача 10. Докажите, что в разностном треугольнике $M_1K_1 = K_1H_1$.

Решение. Поскольку $QH_1 = 2r$, а $IK_1 = r$ и к тому же $IK_1 \parallel QH_1$, то IK_1 является средней линией в ΔQH_1M_1 (см. рис.12), т.е. $M_1I = IQ$ и $M_1K_1 = K_1H_1$.

Задача 11. В разностном треугольнике $MI \parallel BC$. Докажите это.

Решение. Это очевидно, поскольку расстояния от центроида M и инцентра I в таком треугольнике до стороны BC составляют $\frac{1}{3}h_a = r$.

Следствие. В разностном треугольнике прямые M_1I и MI делят высоту h_a на 3 равные части.

Задача 12. Инцентр I разностного треугольника ABC является центроидом треугольника AT_1H_1 . Докажите это.

Решение. Поскольку $M_1I = IQ$ (задача 10), то медиана H_1G треугольника AT_1H_1 проходит через точку I (рис.13). Но тогда из параллельности прямых M_1I и AT_1 , а также из равенства $T_1M_1 = M_1K_1 = K_1H_1$ следует $H_1I = 2IG$. А это значит, что I — центроид ΔAT_1H_1 .

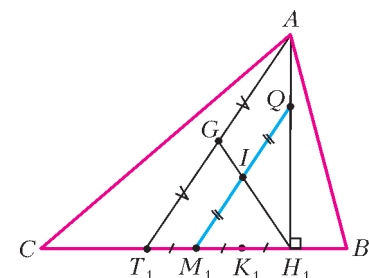


Рис. 13

Задачи с прямоугольным треугольником

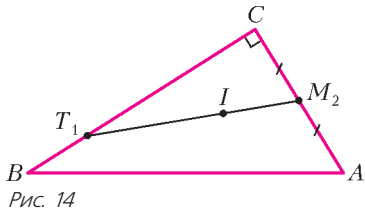


Рис. 14

Задача 13. Докажите, что в прямоугольном $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) точки T_1 , I , M_2 принадлежат одной прямой (рис. 14).

Решение. Так как прямая T_1I делит высоту h_a пополам (задача 4), а в прямоугольном треугольнике катет AC совпадает с h_a , то задача решена.

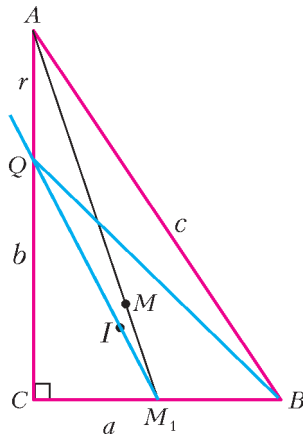


Рис. 15

Задача 14. Дан прямоугольный $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) с заданными положениями центра M и инцентра I . При помощи одной линейки разделите периметр этого треугольника пополам.

Решение. Прямая AM пересечет BC в точке M_1 (рис. 15). Прямая M_1I пересечет AC в точке Q такой, что $AQ = r$ (свойство 3). Прямая BQ разделит периметр $\triangle ABC$ пополам, ибо

$$c + r = c + \frac{a + b - c}{2} = \frac{a + b + c}{2} = p.$$

Задача 15. В прямоугольном $\triangle ABC$ через середину гипотенузы BC и инцентр I проведена прямая. Она пересекает катет AB под углом 75° . Найдите острые углы $\triangle ABC$.

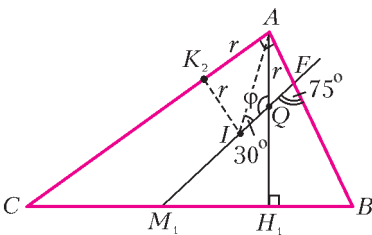


Рис. 16

Решение. Пусть прямая M_1I пересекает AN_1 в точке Q и AB — в точке F (рис. 16). Тогда, согласно условию, $\angle BFM_1 = 75^\circ$, а $AQ = r$ (свойство 3). Кроме того, $AI = r\sqrt{2}$ и $\angle AIF = 30^\circ$

(так как $\angle BFM_1 = 75^\circ$ — внешний для $\triangle AIF$).

Пусть $\angle AQI = \varphi$. По теореме синусов для $\triangle AQI$ имеем

$$\frac{AI}{\sin \varphi} = \frac{AQ}{\sin 30^\circ}, \text{ или } \frac{r\sqrt{2}}{\sin \varphi} = \frac{r}{1/2},$$

откуда

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ и } \varphi = 135^\circ.$$

Из четырехугольника $BFQH_1$ найдем угол B :

$$\angle B = 360^\circ - 90^\circ - 135^\circ - 75^\circ = 60^\circ.$$

Тогда $\angle C = 30^\circ$.

Задачи, связанные с вневписанной окружностью

Заметим, что свойства, аналогичные вышеуказанным, можно наблюдать и при рассмотрении вневписанных окружностей треугольника ABC .

Пусть I_a — центр вневписанной окружности ω , касающейся стороны BC и продолжений AB и AC (рис. 17). Вот несколько фактов, которые мы предлагаем вам доказать самостоятельно:

- I_aK_1 делит h_a пополам;
- I_aM_1 отсекает на продолжении h_a за точку A отрезок AU , равный радиусу окружности ω ;
- $I_aM_1 \parallel AK_1$;
- I_aM_1 делит отрезок AT_1 пополам.

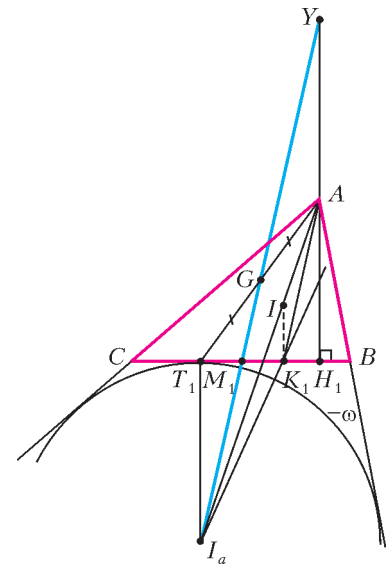


Рис. 17

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Квантовые чудеса

М.КАГАНОВ

Введение

В статье «Как квантовая механика описывает микромир» (см. «Квант» №2, 3 за 2006 г.) рассказывалось о фундаментальном уравнении квантовой механики — уравнении Шрёдингера — и с его помощью рассматривалась задача поведения частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме. В предлагаемой вниманию читателей публикации главное вни-

мание будет уделено решению нескольких сравнительно простых задач, которые подобраны так, чтобы продемонстрировать необычность поведения микрочастиц по сравнению с макроскопическими телами. Из соображений простоты мы ограничимся только одномерными задачами.

Предлагаемые задачи, как правило, не могут претендовать на описание какого-то реального физического явления. Но они могут помочь понять реальные явления, достойные называться квантовыми чудесами.

Частица или волна? Одна или много?

Наибольшей психологической трудностью квантовой механики считается непредставимость основного объекта, для описания движения которого она создана. То частица проявляет свои волновые свойства, то корпускулярные. Математический аппарат квантовой механики устроен так, что, решая любую физическую задачу, можно пользоваться об-

щими приемами, позволяющими строго сформулировать математическую задачу, а для решения задачи нет необходимости *предполагать заранее*, какую черту поведения микроскопической частицы мы установим – волновую или корпускулярную. Решив задачу, мы *поймем*, как квантовая механика описывает движение частицы. Поймем, даже если не сможем себе представить.

В данной статье строгая постановка задачи означает возможность записать уравнение Шрёдингера, установить необходимые граничные и начальные условия. Решение поставленной задачи состоит не только в нахождении Ψ -функции, удовлетворяющей уравнению Шрёдингера с начальными и граничными условиями, но и в вычислении интересующих нас физических величин. Будут решаться только такие задачи, где Ψ -функция описывает движение *одной* частицы под действием силы, не зависящей от времени. Однако конкретные физические результаты, которые «содержатся» в Ψ -функции одной частицы и которые можно сравнивать с результатами эксперимента, относятся не к одной частицы, а к ансамблю, коллективу во всем подобных частиц.

Что же описывает уравнение Шрёдингера: движение одной частицы или многих частиц? Одной! Но чтобы воспользоваться полученными результатами, их нужно перевести на язык макроскопической, классической физики. Именно для этого необходим переход к ансамблю многих частиц.

Переход из микромира в макромир не проходит «безнаказанно»: меняется описание причинной связи между событиями. В макромире властвует обычный механический детерминизм. Во всяком случае, когда речь идет о движении одной частицы под действием заданной силы. Зная начальные условия, мы можем проследить движение частицы во все последующие моменты. Уточним: пусть при $t = 0$ известны координата x_0 и скорость v_0 частицы. Решив уравнение Ньютона (сила известна), мы найдем положение частицы в любой момент времени, т.е. функцию $x = x(t)$, равную x_0 при $t = 0$. Производная $dx(t)/dt$ есть скорость частицы $v(t)$. Естественно, когда $t = 0$, то $v = v_0$. Именно это утверждение и носит пышное название *механического детерминизма*.

Пусть не обманет вас слово «макромир». В макромире происходят разнообразные события, предсказать результаты которых абсолютно достоверно невозможно. Иногда это связано только с неполным знанием начальных условий. Классический пример – бросание кости. Если бы знать, но абсолютно точно(!), как бросить кубик, чтобы он выпал нужной гранью вверх, задача имела бы однозначное решение. А так надо довольствоваться оценкой вероятности того, что произойдет.

Бывает, и весьма часто, иначе: точно известна сила, приводящая макротело в движение, и известно, как будет двигаться тело под действием этой силы. Но если тело движется, например, в воздухе или скользит по наклонной плоскости, то на тело, кроме известной силы, действуют также силы со стороны молекул воздуха или атомов того тела, по которому оно скользит. Конечно, описать во всех подробностях движение тела и всех частиц (воздуха, наклонной плоскости) невозможно. Обычно достаточно ограничиться усредненным описанием влияния окружающей среды с помощью силы трения или сопротивления атмосферы. Учитывая силу трения (сопротивления), описывать движение макроскопического тела можно вполне надежно, но важные черты движения при этом существенно изменяются.

Так, часть энергии тела из-за трения необратимо теряется, превращаясь в тепло, – исчезает обратимость. Обратимость уравнений механики – формальное следствие того, что они

не изменяются при замене t на $-t$: ускорение – вторая производная от координаты – при замене t на $-t$ не меняется. Сила же трения пропорциональна скорости тела – первой производной от координаты, которая при такой замене изменяется. Именно это обстоятельство и есть формальная причина потери обратимости.

В таком описании сил трения внимательный читатель ощутит непоследовательность. Каждая молекула воздуха или наклонной плоскости подчиняется тем же законам, что и само тело (сейчас речь не идет об изменениях, вносимых квантовой механикой). Почему же появляется необратимость? Это – весьма сложный вопрос. В основе ответа на него лежит явление диссипации, обусловленной переходом энергии от небольшого числа механических степеней свободы макроскопического тела к по сути бесконечному числу степеней свободы микроскопических частиц. Движение микрочастиц столь хаотично, что вероятность возвращения энергии обратно к телу равна нулю. По этому поводу говорят о необратимом запутывании, а более строгим языком – о росте *энтропии*, которая служит мерой беспорядка.

Вернемся к одной квантовой частице, движение которой описывается Ψ -функцией – решением уравнения Шрёдингера. Волновая функция – функция координат и времени. Задав начальное состояние, мы найдем вполне определенное решение $\Psi = \Psi(x, t)$. Казалось бы, вполне детерминированный процесс. Но, задав себе простейший вопрос о том, где находится частица в момент времени t , мы вынуждены ограничиться утверждением, что нам известна лишь вероятность нахождения частицы в интервале dx вокруг точки x , и вероятность эта равна $|\Psi(x, t)|^2 dx$. Подчеркнем: несомненно, речь идет об ансамбле частиц, а не об одной частице. Без ансамбля тождественных частиц понятие вероятности теряет смысл. И дело не в неполноте знаний или во взаимодействии с большим количеством иных частиц. Вероятность – первичное понятие квантовой механики. Строгое рассмотрение показало, что добиться большей точности предсказаний нельзя, нельзя избежать использования вероятности при описании движения микроскопических частиц.

Корпускулярно-волновой дуализм квантовых частиц не только делает их движение очень непохожим на движение классических тел, но заставляет рассматривать поведение ансамбля частиц даже тогда, когда, казалось бы, уравнение описывает движение одной частицы. В этом состоит еще одна психологическая трудность понимания квантовой механики.

Траектория, стационарное состояние

Общее описание движения микроскопических частиц квантовой механикой убеждает нас: квантовые законы движения не похожи на классические. Но чтобы возникло ощущение чуда, появилось впечатление, что происходит нечто, чего «не может быть», необходимо рассмотреть примеры. Сделать наглядным отличие поведения квантовых микрочастиц от макроскопических тел можно, если четко представить движение классических макротел в условиях, точно совпадающих с условиями, в которых будет рассмотрено движение квантовых частиц. При описании движения классических тел и квантовых частиц мы постараемся использовать одинаковые термины – там, где это возможно.

В одномерном случае как-то неудобно говорить о *траектории*. Классическая частица в одномерном мире, конечно, *всегда* движется по прямой. Исчерпывающее описание движения частицы под действием внешней, не зависящей от времени силы $F = F(x)$ сводится к определению зависимости координаты частицы от времени – к нахождению функции $x = x(t)$. Полная информация о движении частицы

содержится в этой функции. Скорость частицы равна $v(t) = dx(t)/dt$, импульс частицы (количество движения) есть $p(t) = mv(t)$.

Функция $x(t)$ – решение уравнения Ньютона. Из уравнения Ньютона следует закон сохранения энергии

$$\epsilon = \frac{mv^2}{2} + U(x) = \text{const}, \text{ или } \epsilon = \frac{p^2}{2m} + U(x) = \text{const}. \quad (1)$$

Сила – производная, взятая с противоположным знаком, от потенциальной энергии: $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$. Для понимания связи уравнения Ньютона с законом сохранения энергии продифференцируйте первое из указанных равенств по времени, помня, что координата x зависит от времени t , и немедленно получите уравнение Ньютона:

$$m \frac{dv(t)}{dt} = F(x). \quad (1')$$

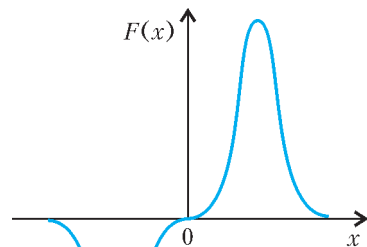
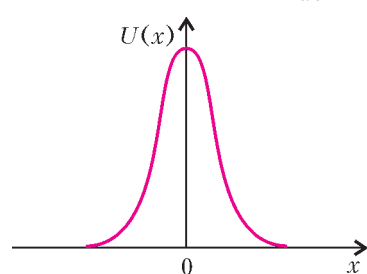


Рис. 1

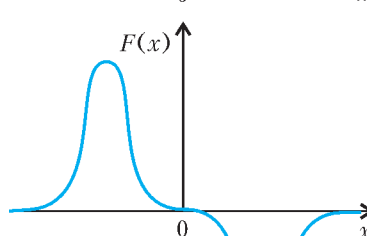
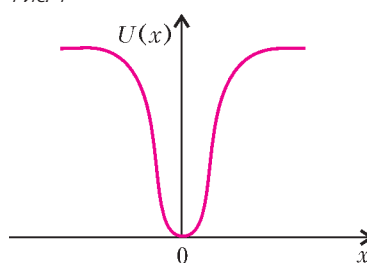


Рис. 2

Мы будем рассматривать потенциальную энергию либо в виде потенциального барьера (рис.1), либо в виде потенциальной ямы (рис.2). На рисунках 1 и 2 показано также, как выглядит сила, под действием которой ускоряется или замедляется частица.

Рисунок 3 изображает предельно упрощенный потенциальный барьер, а рисунок 4 – предельно упрощенную потенциальную яму. Это идеализация, конечно, но очень удобная для расчета. На всей оси x , кроме точек $x = \pm d$, сила равна нулю, а в точках $x = \pm d$ $F = \pm \infty$. Функция $F(x)$, равная нулю при всех значениях x , кроме $x = 0$, а при $x = 0$ равная бесконечности, это та самая дельта-функция Дирака, о которой говорилось в упомянутой ранее статье. Обозначается она так: $\delta(x)$. Таким образом, для прямоугольного барьера

$$F(x) = -U_0 \delta(x+d) + U_0 \delta(x-d), \quad (2)$$

$$\text{а для прямоугольной ямы} \\ F(x) = U_0 \delta(x+d) - U_0 \delta(x-d). \quad (2')$$

Уточним определение δ -функции: интеграл от $\delta(x)$ по интервалу, содержащему точку $x = 0$, равен единице.

В тех задачах, которые

здесь обсуждаются, всегда и справа и слева с определенного расстояния до бесконечности потенциальная энергия есть ноль или константа. Уравнения (1) задают зависимость скорости v и импульса p от координаты x :

$$v = \sqrt{\frac{2(\epsilon - U(x))}{m}},$$

$$p = \sqrt{2m(\epsilon - U(x))},$$

а из рисунков 1 и 2 видно, что расстояние от точки с координатой x на кривой $U = U(x)$ до прямой $\epsilon = \text{const}$ по вертикали равно кинетической энергии макрочастицы. При заданной потенциальной энергии значение энергии ϵ определяет характер движения. Так, согласно рисунку 1, частица с энергией, превышающей $\max U(x) = U_0$, движется беспрепятственно вдоль всей оси x , а частица с энергией $\epsilon < U_0$ движется только по полуоси: либо справа от потенциального барьера, либо слева. В случае потенциальной ямы различие еще более разительно: если $\epsilon > U_0$, то частица совершает инфинитное движение, т.е. где бы частица ни начала свое движение, она уйдет на бесконечность. При $\epsilon < U_0$ движение финитно: частица движется в пределах потенциальной ямы.

Зная, что предсказания квантовой механики могут быть проверены только в экспериментах с ансамблями частиц даже при рассмотрении движения одной частицы, выясним, как движение многих тождественных частиц описывается классической механикой.

Основными терминами для описания движения коллектива тождественных частиц служат плотность частиц n и плотность потока частиц $\vec{j}$. Заметим, что плотность потока частиц – это вектор. В трехмерном пространстве размерность плотности частиц есть см^{-3} , а плотности потока частиц – $\text{с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}$. В одномерном случае n – это число частиц на единице длины, размерность n есть см^{-1} , а плотность потока частиц $j = vn$ – это число частиц, проходящих через точку в единицу времени, размерность j есть с^{-1} .

И n , и j – функции x и t . Между n и j есть связь, называемая уравнением непрерывности:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Здесь использованы традиционные обозначения: $\partial \dots / \partial t$ – производная по времени при постоянном значении координаты x , а $\partial \dots / \partial x$ – производная по координате при постоянном значении времени t . Для вывода уравнения непрерывности надо вычислить изменение числа частиц на интервале dx за время dt , обязанное различию плотности потока на концах интервала (число частиц на интервале dx равно ndx , а за время dt через любую точку проходит jdt частиц). Уравнение непрерывности встречается всегда, когда плотность чего-либо изменяется в пространстве только за счет перемещения, а появление (рождение) или уничтожение (гибель) отсутствуют.

Уравнение непрерывности позволяет описать *стационарное состояние*. В классической механике, когда речь идет об одной частице, стационарное состояние как термин не упот-

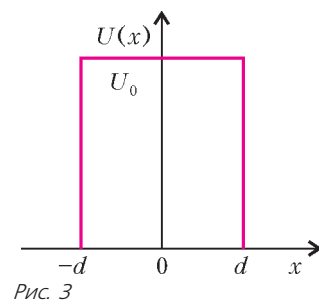


Рис. 3

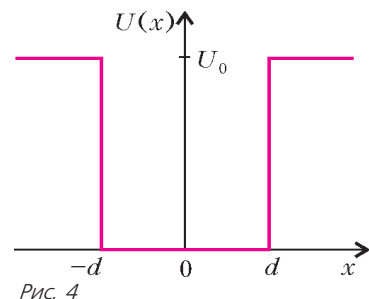


Рис. 4

ребляется. Если частица движется периодически, то говорят, что частица движется по стационарной траектории, подчеркивая, что траектория не изменяется со временем. Когда же речь идет об ансамбле тождественных частиц, стационарное состояние означает следующее. В понятие тождественности входят одинаковые начальные условия для всех частиц. Пусть в область, где на частицы действует сила, входит постоянный поток частиц плотностью $j = j_0$ с одной и той же для всех частиц энергией $\epsilon_0 = mv_0^2/2$. Вся картина движения потока частиц не зависит от времени — осуществляется *стационарное состояние*: плотность потока не зависит от времени (произведение скорости v на плотность частиц n , равное плотности потока частиц j , не изменяется со временем). При этом скорость v зависит от координаты, как это следует из закона сохранения энергии, и, следовательно, плотность частиц зависит от координаты: $n = n(x)$. Там, где скорость больше, там плотность меньше, а где скорость меньше, там плотность больше, — это хорошо известный эффект (например, часто наблюдаемое скопление автомашин на участках замедленного движения). Стационарное состояние легко обобщается на поток частиц с различными энергиями. Если пренебречь столкновениями, то каждая группа частиц с одной и той же начальной скоростью подчиняется уравнению непрерывности, и каждая, независимо от других, движется так, как описано выше.

Чтобы в дальнейшем подчеркнуть отличие поведения квантовых частиц в сравнении с классическими, отметим несколько очевидных фактов.

Какова бы ни была форма или высота потенциального барьера, классическая частица с энергией, меньшей высоты барьера, под барьер проникнуть не может. От барьера она отразится и со скоростью, равной по величине, но направленной противоположно первоначальной скорости, двинется от барьера. Поток тождественных частиц поведет себя так же. Если плотность потока частиц к барьеру обозначить j_+ , а плотность потока частиц от барьера обозначить j_- , то их отношение j_-/j_+ есть коэффициент отражения. Обозначим его буквой R , тогда для классических частиц $R = 1$.

Каковы бы ни были форма и размер потенциальной ямы, если энергия частицы меньше потенциальной энергии вне ямы, классическая частица будет двигаться от одной стенки к другой и покинуть яму не сможет. Ничто не запрещает частице неподвижно лежать на дне ямы. Период движения частицы в яме зависит от ее энергии. В прямоугольной яме шириной $2d$, изображенной на рисунке 4, период равен

$$T = \frac{4d}{\sqrt{2(\epsilon - U_0)/m}}.$$

Совсем очевидный и уже отмеченный выше факт: классическая частица с энергией $\epsilon > U(x)$ при любом значении координаты x движется свободно со скоростью, зависящей от координаты. Плотность потока частиц j при этом неизменна. Наконец, энергия классической частицы может иметь любое значение. Есть единственное ограничение: полная энергия ϵ должна быть больше или равна потенциальной энергии $U(x)$. Иначе: энергетический спектр классической частицы непрерывен.

Уравнение Шрёдингера. Плотность потока...

Как Шрёдингер сформулировал уравнение, носящее теперь его имя, довольно подробно рассказано в упомянутой выше статье. Не повторяя сказанного, напомним только, что введение Ψ -функции послужило основой создания волновой механики. Сначала квантовую теорию в шрёдингеровском варианте называли именно *волновой механикой*, подчеркивая волновые свойства атомных и субатомных частиц.

Действительно, иногда понять квантовое явление легче, сравнивая движение квантовой частицы не с движением классической частицы, а с распространением волны, например электромагнитной.

Выпишем уравнения Шрёдингера для одномерного случая. Множественное число (уравнения) использовано потому, что мы выпишем два уравнения: нестационарное и стационарное. *Нестационарная* волновая функция в одномерном случае зависит от двух переменных — от координаты и от времени: $\Psi = \Psi(x, t)$, а *стационарная* волновая функция, тоже обозначаемая буквой Ψ , но меньших размеров, зависит только от координаты: $\Psi = \Psi(x)$. Для состояния частицы, энергия которой имеет определенное значение, стационарная волновая функция $\Psi(x)$ — это амплитуда в выражении для нестационарной волновой функции:

$$\Psi(x, t) = \exp\left(-\frac{i\epsilon t}{\hbar}\right) \Psi(x). \quad (4)$$

Итак, в одномерном случае нестационарное уравнение Шрёдингера имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U(x) \Psi \right), \quad (5)$$

а стационарное уравнение —

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (\epsilon - U(x)) \Psi = 0. \quad (6)$$

Эти дифференциальные уравнения должны быть дополнены граничными и начальными условиями, но об этом позже.

В цитированной статье (и, конечно, не только в ней) сказано, что выражение $\Psi\Psi^* dx$, где звездочка * обозначает комплексное сопряжение, есть вероятность обнаружить частицу в точке x при многократном осуществлении эксперимента, в котором частица движется так, как описывает Ψ -функция. Следовательно, $\rho(x, t) = \Psi\Psi^* = |\Psi(x, t)|^2$ есть плотность вероятности обнаружить частицу в точке x в момент времени t . Если $\rho(x, t) \neq 0$ в небольшой области пространства, то напрашивается зрительный образ — *облако вероятности*. Несомненно, интересно и важно знать, как оно движется, каков его закон движения.

Вывести уравнение, описывающее изменение плотности вероятности $\rho(x, t)$, нетрудно. Для этого используются уравнение (5) для Ψ и аналогичное уравнение для Ψ^* . После соответствующих преобразований получится

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0, \quad j = \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right). \quad (7)$$

Мы получили уравнение непрерывности. Естественно, здесь j — плотность потока. Но потока чего? Так как ρ — плотность вероятности, то j — *плотность потока вероятности*.

Удивительное дело: величины, с помощью которых можно только оценить вероятность того, попадет ли частица в данную точку пространства (ρ и j), с ходом времени изменяются в пространстве так, будто описывают движение газа частиц. Уравнение непрерывности показывает, что при движении вероятность не рождается и не исчезает, а только перемещается в пространстве. Если начальное состояние частицы таково, что она с достоверностью находится в какой-то области пространства, то с ходом времени может измениться область, где частицу можно обнаружить, но по-прежнему во всей доступной области частица с достоверностью находится.

Уравнение непрерывности (7) описывает закон сохранения частицы.

(Продолжение следует)

Пропорциональность дифференциалов в физических задачах

К.РЫБ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ процессов часто приводит к дифференциальным уравнениям, связывающим между собой переменные величины и их производные. Решение подобных уравнений представляет математическую трудность для учащихся. Однако возможно применение обходного пути, не требующего владения методами интегрирования дифференциальных уравнений.

Так, если при моделировании какого-либо физического процесса устанавливается пропорциональная взаимосвязь двух изменяющихся физических величин, то можно говорить о пропорциональности их дифференциалов. При этом появляется возможность свести решение к конечным приращениям взаимосвязанных величин на основе пропорции. Суммируя бесконечно малые в полученном выражении, которое мы будем называть *пропорциональностью дифференциалов*, и вынося коэффициент за знак суммирования, получим связь между конечными изменениями величин. Если изменение одной из величин в ходе процесса задано условием задачи, то полученное выражение однозначно определит изменение и второй величины.

А теперь – несколько конкретных задач.

Задача 1. Модели корабля массой m сообщают некоторую начальную скорость v_0 . Сила сопротивления воды пропорциональна скорости: $F_c = -kv$. Какое расстояние пройдет модель до места, где ее скорость уменьшится вдвое? Каково общее расстояние, которое пройдет модель?

Сила сопротивления определяет быстроту убыли скорости. С учетом условия и второго закона Ньютона запишем

$$F_c = -kv, \quad F_c = m \frac{dv}{dt},$$

или

$$m \frac{dv}{dt} = -kv.$$

Умножим полученное уравнение на dt и учтем, что $vdt = ds$, где s – пройденное расстояние. При этом получим

$$ds = -\frac{m}{k} dv.$$

Два дифференциала связаны постоянным коэффициентом, который при суммировании можно вынести, и мы найдем связь между конечными приращениями:

$$\Delta s = -\frac{m}{k} \Delta v.$$

Так как по условию в первом случае $\Delta v_1 = -\frac{v_0}{2}$ и $\Delta s = s_1$, то

$$s_1 = \frac{mv_0}{2k}.$$

Аналогично получаем ответ для второго случая:

$$s_2 = \frac{mv_0}{k}.$$

Попробуйте решить задачу разделением переменных и интегрированием и сравните трудоемкости двух способов решения.

Задача 2. По горизонтальным параллельным рельсам, расстояние между которыми L , скользит без трения перемычка массой m . Рельсы соединены резистором сопротивлением R и находятся в вертикальном однородном магнитном поле с индукцией B . Перемычке сообщают скорость v_0 . Какое расстояние она пройдет до остановки?

ЭДС индукции в движущейся со скоростью v перемычке создает индукционный ток:

$$e_i = BLv, \quad i = \frac{e_i}{R} = \frac{BLv}{R}.$$

Сила Ампера, действующая на проводник с током, тормозит движение перемычки:

$$F_A = iBL \sin \alpha, \quad F_A = -m \frac{dv}{dt}.$$

Таким образом, в нашем случае ($\alpha = 90^\circ$) получаем

$$-m \frac{dv}{dt} = \frac{B^2 L^2}{R} v.$$

В этом уравнении мы видим признак экспоненциальной убыли скорости: быстрота уменьшения скорости пропорциональна самой скорости. Это – дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Но мы не будем его интегрировать (по методу разделения переменных), а сделаем следующее.

Умножим наше уравнение на dt и учтем, что $vdt = ds$, где s – пройденное расстояние. Тогда

$$ds = -\frac{mR}{B^2 L^2} dv.$$

Получили пропорциональность дифференциалов. Суммирование позволит перейти к конечным приращениям:

$$\Delta s = -\frac{mR}{B^2 L^2} \Delta v,$$

и, поскольку $\Delta v_{\text{общ}} = -v_0$, перемещение до остановки будет равно

$$s_{\text{общ}} = \frac{mRv_0}{B^2 L^2}.$$

Задача 3. Цепочку массой m и длиной l подвесили за два конца к потолку. При этом оказалось, что в местах закрепления цепочка образует углы α с вертикалью. Найдите расстояние H_0 от нижней точки цепочки до потолка.

Пусть сила натяжения в нижней точке цепочки T_O , а в точке подвеса T_A (рис.1). К половине цепочки еще приложе-

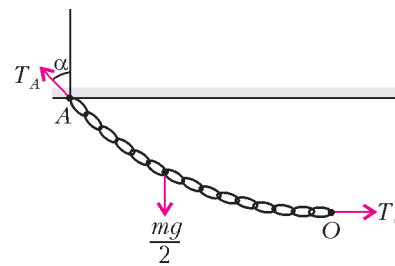
на сила тяжести $\frac{mg}{2}$.

Запишем условие равновесия сил, действующих на половину цепочки, в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$T_O - T_A \sin \alpha = 0,$$

$$T_A \cos \alpha - \frac{mg}{2} = 0.$$

Рис. 1



Отсюда

$$T_A = \frac{mg}{2 \cos \alpha} \text{ и } T_O = \frac{mg}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Для любого промежуточного звена цепочки, образующего с вертикалью угол φ , который меняется от 90° вблизи точки O до α вблизи точки A , можно записать условие равновесия для проекций сил на направление звена. Пусть длина звена dl , тогда его сила тяжести равна $dP = \frac{mg}{l} dl$. Прирост силы натяжения на элементе звена равен $dT = \frac{mg}{l} dl \cos \varphi$. Обратим внимание на то, что $dl \cos \varphi = dh$ определяет прирост высоты на элементе звена. Тогда

$$dT = \frac{mg}{l} dh.$$

Мы получили связь между приростом высоты и приростом модуля силы натяжения в виде пропорциональности дифференциалов. Суммируя, получаем $\sum dh = H_0$ – высоту провиса и $\sum dT = T_A - T_O$ – разность модулей сил натяжения. Таким образом,

$$T_A - T_O = \frac{mg}{l} H_0,$$

или

$$\frac{mg}{2} \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \right) = \frac{mg}{l} H_0.$$

Отсюда находим

$$H_0 = \frac{l(1 - \sin \alpha)}{2 \cos \alpha}.$$

Примечание. Существует энергетический метод решения этой задачи. Разумеется, он приводит к тому же результату. Убедитесь в этом самостоятельно.

Задача 4. В неоднородном магнитном поле с индукцией $B = \alpha x$ ($x > 0$) стартует частица массой m и зарядом q с начальной скоростью v_0 , направленной вдоль оси X (рис. 2). Определите максимальное смещение частицы вдоль оси X .

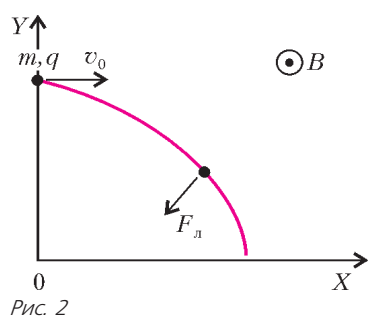


Рис. 2

Со стороны магнитного поля на частицу будет действовать сила Лоренца. Она перпендикулярна скорости и меняет только ее направление. Однако в неоднородном поле скорость будет нарастать, что вызовет уменьшение радиуса кривизны траектории, поэтому траектория частицы не будет дугой окружности.

Заметим, что проекция силы Лоренца на ось Y меняет соответствующую составляющую скорости частицы:

$$F_{Ly} = m \frac{dv_y}{dt}.$$

Но эта проекция силы зависит от перпендикулярной к ней составляющей скорости частицы v_x :

$$F_{Ly} = qB(x)v_x.$$

Отсюда получаем

$$m \frac{dv_y}{dt} = qB(x)v_x.$$

Умножая на приращение времени, находим

$$mdv_y = qB(x)dx.$$

Поскольку $B(x) = \alpha x$, то

$$dv_y = \frac{q\alpha}{m} x dx, \text{ или } dv_y = \frac{\alpha q}{m} d\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Мы получили пропорциональность дифференциалов. Смещение частицы вдоль оси X достигнет максимума, когда проекция скорости частицы на эту ось уменьшится до нуля. Тогда проекция скорости частицы на ось Y достигнет значения модуля скорости. Для этого случая

$$\sum dv_y = v_0, \text{ и } v_0 = \frac{\alpha q}{m} \frac{x_{\max}^2}{2}.$$

Отсюда находим искомое смещение частицы:

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{2v_0 m}{\alpha q}}.$$

Задача 5. Две частицы с одинаковыми массами m и зарядами q , равными по модулю, но противоположными по знаку, помещены в однородное магнитное поле, индукция которого B перпендикулярна отрезку R , соединяющему заряды. Найдите расстояние между частицами в момент наибольшего сближения, если их стартовые скорости нулевые. Индукция магнитного поля достаточна для предотвращения столкновения.

Пусть ось X направлена по линии, соединяющей заряды. Вдоль этой оси действуют силы кулоновского притяжения, разгоняющие частицы. Прирост кинетической энергии частиц определяется убылью потенциальной энергии кулоновского притяжения:

$$2 \frac{mv^2}{2} = -kq^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right),$$

откуда

$$v = q \sqrt{\frac{k}{m} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)}.$$

Сила Лоренца, перпендикулярная скорости, изменяет ее направление. Проекция ускорения частиц на ось Y обусловлена соответствующей проекцией силы Лоренца:

$$m \frac{dv_y}{dt} = F_{Ly}, \text{ или } m \frac{dv_y}{dt} = qBv_x.$$

Умножая на приращение времени, получим

$$dv_y = \frac{qB}{m} dx$$

– между изменением проекции скорости и сближением частиц зависимость пропорциональная. Для конечных приращений учтем следующее. Частицы не столкнутся, если успеют выйти на параллельные курсы вдоль оси Y при $R - r > 0$. Конечные приращения для этого условия равны

$$\sum dv_y = v \text{ и } \sum dx = \frac{R-r}{2} > 0. \text{ Тогда}$$

$$v = \frac{qB}{2m} (R - r).$$

С учетом найденного ранее выражения для скорости v , получим зависимость минимального сближения частиц r от начального расстояния и индукции магнитного поля. Действительно,

$$\frac{q^2 B^2 (R - r)^2}{4m^2} = \frac{q^2 k (R - r)}{mRr},$$

сократим и приведем к квадратному уравнению, подставив $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$:

$$r^2 - Rr + \frac{m}{\pi\epsilon_0 B^2 R^3} = 0, \text{ и } r = \frac{R}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m}{\pi\epsilon_0 B^2 R^3}} \right).$$

Положительный дискриминант определяет значение индукции магнитного поля, предотвращающее столкновение частиц. При этом для r выбирается больший корень, так как при достижении этого расстояния сближение частиц прекращается. Магнитная и кулоновская силы, действующие на частицу, компенсируются. Окончательно получим

$$r = \frac{R}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4m}{\pi\epsilon_0 B^2 R^3}} \right).$$

Задача 6. В схеме на рисунке 3 замыкают вначале ключ K_1 , а после установления стационарного режима замыкают ключ K_2 . Какой заряд протечет через резистор сопротивлением R после замыкания ключа K_2 ? Величины $R, r, \mathcal{E}, L_1, L_2$ считать заданными.

После замыкания ключа K_1 ток стационарного режима будет равен $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$. После замыкания ключа K_2 катушка индуктивностью L_2 будет осуществлять шунтирующее действие, так как она обладает пренебрежимо малым активным сопротивлением. В ней установится ток короткого замыкания $I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r}$, а ток в первой катушке уменьшится до нуля.

По второму правилу Кирхгофа для контура из двух катушек, $e_2 + e_1 = i_1 R$. Но $e_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt}$ и $e_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt}$. Тогда

$$-L_2 \frac{di_2}{dt} - L_1 \frac{di_1}{dt} = i_1 R.$$

Отметим, что убыль тока i_1 дает отрицательную производную. Умножим полученное равенство на dt и заметим, что $i_1 dt = dq$, $\frac{di_2}{dt} dt = di_2$, $\frac{di_1}{dt} dt = di_1$. Получим

$$-\frac{1}{R} (L_2 di_2 + L_1 |di_1|) = dq.$$

Учитывая общие изменения токов в процессах и переходя к конечным приращениям, найдем искомый заряд:

$$q_{\text{общ}} = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(\frac{L_2}{r} + \frac{L_1}{R+r} \right).$$

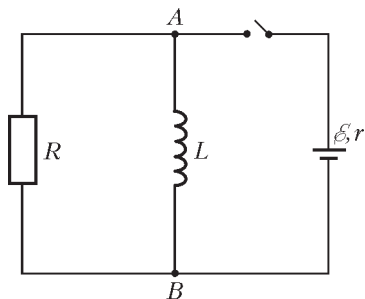


Рис. 4

Задача 7. Параллельно соединенные катушка индуктивностью L и резистор сопротивлением R подключены через ключ к батарее с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r (рис.4). Какой заряд протечет через резистор после замыкания ключа? Сопротивление катушки пренебречь.

В момент замыкания ключа через резистор течет ток $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$, а ток в катушке равен нулю. В последующее время ток через катушку будет нарастать до значения тока короткого замыкания $I_k = \frac{\mathcal{E}}{r}$. При этом напряжение между точками A и B схемы будет убывать до нуля.

Для какого-либо момента времени переходного периода выполняется равенство

$$-L \frac{di_2}{dt} = i_1 R.$$

Умножая на dt , получим пропорциональность дифференциалов:

$$-L di_2 = R dq.$$

Суммируя, перейдем к конечным приращениям:

$$\frac{L}{R} \Delta i_2 = \Delta q.$$

Очевидно, что ток через катушку перестанет меняться, когда ЭДС самоиндукции в ней станет нулевой, а значит, ток через резистор прекратится. Тогда получим $\Delta i_2 = \frac{\mathcal{E}}{r}$, и

$$q_R = \frac{L\mathcal{E}}{Rr}.$$

Задача 8. Тело брошено под углом к горизонту с высокого обрыва из точки O (рис.5). Из-за сопротивления воздуха разность времени подъема тела до наибольшей высоты и времени возврата на прежний уровень в точку A составляет τ . В точке A вертикальная составляющая скорости на Δv меньше вертикальной составляющей скорости в точке старта, а горизонтальная составляющая равна v_{Ax} . На какую высоту от линии горизонта OA поднялось тело, если наибольшее удаление его по горизонтали от точки A за все время полета составило ΔL_0 ? Сила сопротивления движению тела в воздухе прямо пропорциональна его скорости.

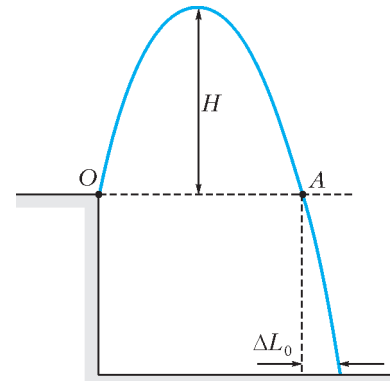


Рис. 5

Горизонтальная составляющая скорости в точке A равна v_{xA} , а максимальное горизонтальное смещение после прохождения точки A составляет ΔL_0 . Значит, эта скорость гасится полностью силой сопротивления воздуха. Запишем уравнение динамики в проекции на горизонтальную ось:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -kv_x,$$

где k – коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и скоростью. Умножая на приращение времени dt , получаем пропорциональность дифференциалов:

$$mdv_x = -kdx, \text{ или } -\frac{m}{k} dv_x = dx.$$

Суммируя, перейдем к конечным приращениям:

$$\frac{m}{k} v_{Ax} = \Delta L_0, \text{ или } \frac{m}{k} = \frac{\Delta L_0}{v_{Ax}}.$$

Теперь запишем уравнения динамики в проекции на вертикальную ось для движения тела вверх и вниз:

$$m \frac{dv_y}{dt} = -kv_y - mg, \quad m \frac{dv_y}{dt} = -kv_y + mg.$$

Умножим на приращение времени и получим для движения вверх и для движения вниз, соответственно,

$$mdv_y = -kdy - mgdt,$$

$$mdv_y = -kdy + mgdt.$$

Для всего пути запишем

$$-mv_{Oy} = -kH - mgt_1, \quad mv_{Ay} = -kH + mgt_2.$$

Складывая эти уравнения получим

$$-m\Delta v = -2kH + mg\tau.$$

Отсюда найдем искомую величину:

$$H = \frac{m}{k} \frac{\Delta v + g\tau}{2} = \frac{\Delta L_0}{v_{Ax}} \frac{\Delta v + g\tau}{2}.$$

Задача 9*. В середине длинной цилиндрической трубки с глицерином находится воздушный пузырек. При вертикальном положении трубки пузырек поднимается со скоростью 1 м/с. Трубку расположили горизонтально и разогнали вдоль длинной стороны до скорости 20 м/с. Где остановится пузырек? Куда он сместится, если скорость плавно увеличить до 30 м/с?

Рассмотрим сначала вертикальный подъем пузырька. Для установившегося режима при условии малости массы пузырька архимедова сила компенсируется силой сопротивления глицерина:

$$\bar{F}_A + \bar{F}_c = 0, \text{ или } \rho_{\text{ж}} Vg = kv_0,$$

где $\rho_{\text{ж}}$ — плотность жидкости (глицерина), k — коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и скоростью (будем считать, что при данных скоростях сила сопро-

тивления со стороны жидкости прямо пропорциональна скорости пузырька), $v_0 = 1$ м/с.

При горизонтальном ускоренном движении трубки на жидкость действуют силы инерции, создавая «искусственную тяжесть». На элемент жидкости массой m действует сила инерции $-m\vec{a}$, направленная против ускорения. Поле сил инерции создает составляющую архимедовой силы, направленную по ускорению трубки и равную

$$F_A = \rho_{\text{ж}} Va = \rho_{\text{ж}} V \frac{dv}{dt}.$$

Это приведет пузырек в движение. Из-за пренебрежимой массы пузырька можно записать

$$\bar{F}_A + \bar{F}_c = 0, \text{ или } \rho_{\text{ж}} V \frac{dv}{dt} = kv.$$

Умножим на dt и получим пропорциональность дифференциалов:

$$\rho_{\text{ж}} V dv = kdx.$$

Суммируя и уточняя конечные приращения, для первого случая, когда трубку разгоняют до скорости $v_1 = 20$ м/с, запишем

$$\frac{\rho_{\text{ж}} V}{k} v_1 = x_1.$$

С учетом уравнения для вертикального подъема пузырька найдем

$$x_1 = \frac{v_0 v_1}{g} = 2 \text{ м}.$$

Аналогично, для второго случая, когда скорость трубки увеличивают до $v_2 = 30$ м/с, получим

$$x_2 = \frac{v_0 v_2}{g} = 3 \text{ м}.$$

Видно, что смещение пузырька пропорционально скорости трубки.

Замечание. Решите самостоятельно эту задачу без использования силы инерции.

Множество значений функции

С.ЛАВРЕНОВ

Ч АСТО, РЕШАЯ ЗАДАЧИ, АБИТУРИЕНТ (ИЛИ ШКОЛЬНИК, сдающий ЕГЭ) сталкивается с необходимостью отыскания области значений той или иной функции. Напомним, что если на некотором множестве $D[f] \subset \mathbf{R}$ задана функция $y = f(x)$, $y \in \mathbf{R}$, то множеством значений $E[f]$ этой функции называется множество всех таких $y \in \mathbf{R}$, что $y = f(x)$ при некотором $x \in D[f]$.

Цель этой статьи — представить различные методы нахождения множества значений функции. Для демонстрации эффективности рассматриваемых методов некоторые задачи и упражнения повторяются в статье несколько раз. Номера таких задач и упражнений сохраняются.

Начнем с несложных примеров.

Задача 1. Найдите множество значений функции $y = \sin x + \cos x$.

Решение. Воспользуемся способом введения вспомогательного угла:

$$y = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$$

Ответ: $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Задача 2. Найдите множество значений функции $y = \cos^2 x + \sqrt{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$.

Решение. Преобразуя данное выражение и вводя вспомогательный угол φ , получим

$$y = \frac{1}{2} + \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \sin (2x - \varphi).$$

Ответ: $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Упражнение 1. Найдите все значения a , при которых множество значений функции $y = ax^2 + x + 1$ включает отрезок $[-1; 1]$.

Разрешимость уравнения $f(x) = a$

Отыскание множества значений функции тесно связано с решением уравнений.

Теорема 1. Уравнение $f(x) = a$ имеет решение тогда и только тогда, когда a принадлежит области значений функции $y = f(x)$.

Доказательство следует непосредственно из определения множества $E[f]$.

Из теоремы 1 следует, что для отыскания $E[f]$ достаточно найти все значения a , для которых уравнение $f(x) = a$ имеет корень $x \in [f]$. Множество таких a и является множеством $E[f]$.

Задача 3. Найдите множество значений функции $y = \sqrt{15 + 2x - x^2}$.

Решение. Выясним, при каких значениях a уравнение $\sqrt{15 + 2x - x^2} = a$ имеет решение. Уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} 15 + 2x - x^2 = a^2, \\ a \geq 0. \end{cases}$$

Уравнение системы имеет решение при $D/4 = 16 - a^2 \geq 0$, поэтому $0 \leq a \leq 4$.

Ответ: $[0; 4]$.

Иногда абитуриенты присоединяют к системе неравенство $15 + 2x - x^2 \geq 0$. Однако этого делать не нужно, так как оно вытекает из первого уравнения системы.

Задача 4. Найдите множество значений функции $y = \frac{\sqrt{3} \cos x + 1}{3 + \sin x}$.

Решение. Уравнение $\frac{\sqrt{3} \cos x + 1}{3 + \sin x} = a$ равносильно уравнению $\sqrt{3} \cos x - a \sin x = 3a - 1$, т.е.

$$\cos(x + \varphi) = \frac{3a - 1}{\sqrt{3 + a^2}},$$

разрешимому тогда и только тогда, когда

$$\frac{(3a - 1)^2}{3 + a^2} \leq 1, \text{ т.е. при } a \in [-1/4; 1].$$

Ответ: $[-1/4; 1]$.

Замечание. Мы воспользовались введением вспомогательного угла. Явно разрешать уравнение относительно x мы не стали, так как этого от нас не требовалось. Достаточно определить условия существования решения, что и было сделано.

Упражнения

Найдите множество значений функции:

2. $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$.

3. $y = \frac{2 - \cos x}{4 + \sqrt{3} \sin x}$.

Рассмотренный метод применим и для функций нескольких переменных, на которые наложены дополнительные ограничения. Рассмотрим для определенности функцию двух переменных. Постановка задачи обычно такова: найти множество значений функции $z = f(x, y)$ при ограничении $g(x, y) = 0$ (или $g(x, y) \leq 0$). В таких задачах требуется найти значения параметра a , при которых имеет решение система

$$\begin{cases} f(x, y) = a, \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Задача 5. Числа x и y удовлетворяют равенству $7x^2 - 4xy + 4y^2 = 12$. Найдите все значения, которые может принимать сумма $x^2 + y^2$.

Решение. Найдём все значения a , при которых имеет решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ 7x^2 - 4xy + 4y^2 = 12. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 12, второе на a и вычтем одно из другого. Получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} (7a - 12)x^2 - 4axy + (4a - 12)y^2 = 0, \\ 7x^2 - 4xy + 4y^2 = 12. \end{cases}$$

Если $y = 0$, то получим $a = 12/7$, $x = \pm\sqrt{12/7}$. Пусть $y \neq 0$. Поделим первое уравнение на y^2 и положим $t = x/y$. Тогда $(7a - 12)t^2 - 4at + 4a - 12 = 0$. При $a = 12/7$ коэффициент перед t^2 обращается в 0, но при этом значении система имеет решение. Если $a \neq 12/7$, то уравнение имеет решение, если $D/4 = -24a^2 + 132a - 144 \geq 0$. Отсюда $a \in [3/2; 4]$. При этом $12/7 \in [3/2; 4]$. Итак, $x = ty$ при найденных a . Подставляя это выражение во второе уравнение, получим $y^2(7t^2 - 4t + 4) = 12$. Квадратный трехчлен, стоящий в скобках, положителен, поэтому существует y , а следовательно, существует и x .

Ответ: $[3/2; 4]$.

Замечание. Проверка существования x и y обязательна. Если немного изменить исходную задачу, положив в правой части ограничения число -12 , то мы получим $a \in [-4; -3/2]$. Но множество значений в такой постановке задачи оказывается пустым.

Упражнение 4. Найдите множество значений функции $z = x^2 + 2y^2$, если $x^2 - xy + 2y^2 = 1$.

Объединение образов промежутков монотонности. Экстремумы

Далеко не для всех функций мы сможем решить уравнение $f(x) = a$. Вот пример: $y = (1 - x)e^{-x}$. Здесь может помочь исследование функции с помощью производной.

Но сначала придется ввести новые определения.

Сужением функции $y = f(x)$ на множество $A \subset D[f]$ называется функция $y = f(x)$, для которой $x \in A$. Обозначение: $y = f(x)|_A$. Подчеркнем, что сужение функции – это уже другая функция. У нее имеется свое множество значений $E[f|_A] = \{y \in \mathbb{R} | x \in A \subseteq D[f] \text{ и } y = f(x)\}$. Оно является образом функции $f(x)$ на множестве A .

Теорема 2. Пусть $y = f(x)$ непрерывна и монотонна на

отрезке $[a; b]$. Тогда если $f(x)$ возрастает на $[a; b]$, то $E[f|_{[a;b]}] = [f(a); f(b)]$. Если $f(x)$ убывает на $[a; b]$, то $E[f|_{[a;b]}] = [f(b); f(a)]$.

Теорему иллюстрируют рисунки 1 и 2.

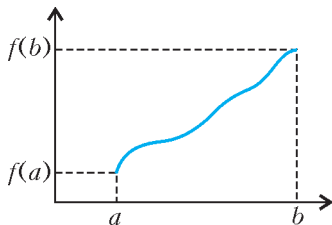


Рис. 1

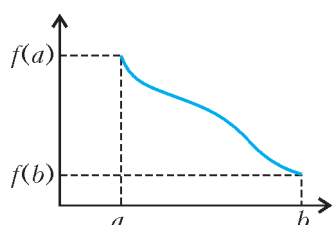


Рис. 2

Отрезок $[a; b]$ можно заменить промежутками других типов: интервалами, лучами. Формулировка теоремы изменится. Например, если $f(x)$ возрастает на $[a; +\infty)$, то $E[f|_{[a;+\infty)}] = [f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$.

Потренируемся. Вычислим образ отрезка $[1; 4]$ для функции $y = \log_{1/2} x$. Эта функция является убывающей. Значения в граничных точках отрезка равны 0 и -2 . Поэтому $\log_{1/2} x|_{[1;4]} = [\log_{1/2} 4; \log_{1/2} 1] = [-2; 0]$. Покажите это на графике.

А теперь используем это для вычисления $E[f]$. Представим область определения $D[f]$ в виде объединения промежутков монотонности D_k . Для каждого такого промежутка вычислим его образ $E_k = E[f|_{D_k}]$. Тогда $E[f] = \bigcup E_k$.

Задача 6. Найдите множество значений функции $y = (1-x)e^{-x}$.

Решение. Найдём промежутки монотонности. Поскольку $y' = (x-2)e^{-x}$, то при $x \in (-\infty; 2]$ функция убывает, а при $x \in [2; +\infty)$ — возрастает, т.е. $x = 2$ — точка минимума, так что $y_{\min} = y(2) = -e^{-2}$. Далее,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)e^x = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-x)}{e^x} = 0.$$

Поэтому $E_1 = E[y|_{(-\infty; 2]}] = [-e^{-2}; +\infty)$, $E_2 = E[y|_{[2; +\infty)}] = [-e^{-2}; 0]$. Тогда $E = E_1 \cup E_2 = [-e^{-2}; +\infty)$. Нарисуйте эскиз графика функции.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то $E[f] = \left[\min_{x \in [a;b]} f(x); \max_{x \in [a;b]} f(x) \right]$.

Для отыскания множества значений нужно вычислить наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке. Эти значения задают границы множества значений. Поиск наименьшего и наибольшего значений функции на отрезке проводится по известной схеме. Вычисляются значения функции в критических точках (точках, в которых производная функции обращается в ноль или не существует), а также в граничных точках отрезка. Из этих значений выбираются минимальное и максимальное.

Для периодических функций достаточно вычислить значения функции в критических точках.

Задача 7. Найдите множество значений функции $f(x) = 10 \sin 2x + \cos x$.

Решение. Поскольку

$$f'(x) = 20 \cos 2x - 7 \sin x = -40 \sin^2 x - 7 \sin x + 20 = 0,$$

то имеются две возможности:

$$1) \sin x = -\frac{4}{5} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = 20 \left(-\frac{4}{5} \right) \left(\pm \frac{3}{5} \right) + 7 \left(\pm \frac{3}{5} \right) = \mp \frac{48}{5} \pm \frac{21}{5} = \pm \frac{27}{5};$$

$$2) \sin x = \frac{5}{8} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{39}}{8} \Rightarrow f(x) = \pm \frac{39}{16} \sqrt{39}.$$

Заметив, что $\frac{39\sqrt{39}}{16} > \frac{27}{5}$, получаем ответ.

$$\text{Ответ: } \left[-\frac{39}{16} \sqrt{39}; \frac{39}{16} \sqrt{39} \right].$$

Упражнения

Найдите множество значений функции:

5. $y = (1 + \cos x) \sin x$.

6. $y = 8\sqrt{3} \cos^3 x + 18 \sin x$.

7. $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 8}}{2|x| + 1}$.

Представление в виде композиции функций

Нахождение множества значений существенно упрощается, если удастся представить исследуемую функцию в виде композиции других функций: $y = f(x) = g(h(x))$. Тогда $E[f]$ является образом функции $g(z)$ на множестве $D[g] \cap E[h]$, т.е. $E[f] = E[g|_{D[g] \cap E[h]}]$.

Задача 8. Найдите множество значений функции $y = \log_{1/2}(2x - x^2 + 3)$.

Решение. Для функции $z = h(x) = 2x - x^2 + 3 = 4 - (x - 1)^2$ имеем $E[h] = (-\infty; 4]$; для функции $y = g(z) = \log_{1/2} z$ имеем $D[g] = (0; +\infty)$. Получим $D[g] \cap E[h] = (0; 4]$, значит, $E[f] = [-2; +\infty)$.

Эти формулы приобретают наглядность при использовании графиков. На рисунке 3 изображен график функции $z = h(x)$, множество значений выделено жирно. Повер-

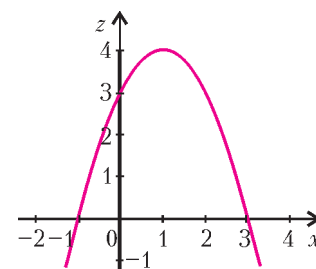


Рис. 3

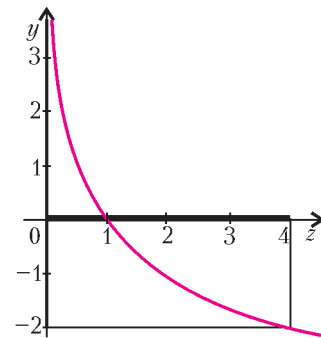


Рис. 4

нем ось z из вертикального положения в горизонтальное и поместим ее на рисунке 4, где показан график $y = g(z)$ и выделена область определения этой функции. Видно, что образом промежутка $(0; 4]$ является луч $[-2; +\infty)$.

Для сравнения решите эту задачу первым и вторым методами.

Давайте теперь еще раз решим задачу 3. Функция $y = \sqrt{15 + 2x - x^2} = f(x)$ представляется в виде $f(x) = g(h(x))$, где $y = g(z) = \sqrt{z}$, $z = h(x) = -x^2 + 2x + 15 = 16 - (x-1)^2$. Далее, $E[h] = (-\infty; 16]$; $D[g] = [0; +\infty)$; $E[h] \cap D[g] = [0; 16]$. Функция $g(z)$ возрастающая, поэтому $E[f] = [g(0); g(16)] = [0; 4]$. (Самостоятельно нарисуйте графики в системах координат Oxz и Oyz .)

Упражнения

Найдите первым и третьим методами множество значений функции:

8. $y = \lg\left(\frac{2x+5}{x-1} - 1\right)$.

9. $y = \sqrt{\frac{2x+1}{x-3}} - 1$.

10. $y = \log_3(1 - 2\cos x)$.

Задача 9. Найдите множество значений функции $y = 2\cos x - \cos 2x$.

Решение. На первый взгляд не видно, композицией каких функций является $y(x)$. Преобразуем ее: $y = 2\cos x - \cos 2x = 2\cos x - 2\cos^2 x + 1$. Далее, $y(z) = -2z^2 + 2z + 1 = -2\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$; $z = \cos x$. Тогда $E[z] = [-1; 1]$. Ищем наибольшее и наименьшее значения $y(z)$ на отрезке $[-1; 1]$.

Получаем *ответ*: $[-3/2; 3/2]$.

Упражнения

Найдите множество значений функции:

11. $y = 4\cos^2 x + 3\sin^2 2x$.

12. $y = 2\sin x \cos 2x + 7\sin x$.

Если исходная функция представлена как композиция нескольких функций: $y = f_1(\dots f_{n-1}(f_n(x))\dots)$, то сначала нужно вычислить множество значений внутренней функции $E_n = E[f_n(x)]$. Затем вычислить образ $E_{n-1} = f_{n-1}(D[f_{n-1}] \cap E_n)$ и так далее.

Упражнение 13. Найдите множество значений функции $y = 7 + 3x - x^2 - 2\sqrt{-x^2 + 3x + 4}$.

Задача 10. При каких значениях a уравнение $2\cos^2(2^{2x-x^2}) = a + \sqrt{3}\sin(2^{2x-x^2+1})$ имеет хотя бы одно решение?

Решение. Переформулируем задачу: найдем множество значений функции $f(x) = 2\cos^2(2^{2x-x^2}) - \sqrt{3}\sin(2 \cdot 2^{2x-x^2})$. Представим ее как композицию функций:

$$\begin{aligned} f(u) &= 2\cos^2(u) - \sqrt{3}\sin(2u) = \\ &= 1 + \cos(2u) - \sqrt{3}\sin(2u) = 1 + 2\cos\left(2u + \frac{\pi}{3}\right); \quad u(z) = 2^z; \\ z(x) &= 2x - x^2 = 1 - (x-1)^2. \end{aligned}$$

Тогда $E[z] = (-\infty; 1]$, $E[u] = (0; 2]$. (Нарисуйте соответствующие графики.)

Поскольку $4 + \frac{\pi}{3} \geq 2u + \frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{3}$, то $-1 \leq \cos\left(2u + \frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2}$, и $E(f) = [-1; 2]$.

Ответ: $[-1; 2]$.

Можно встретить рекомендации для вычисления границ изменения функции с использованием классических неравенств, например неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим. Для двух переменных оно имеет вид $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $a, b \geq 0$. С его помощью можно, например, показать, что $x + \frac{1}{x} \geq 2$, $x > 0$. Но с помощью этого неравенства можно получить, вообще говоря, лишь оценку для множества значений. В данном случае оно совпадает с множеством значений $[2; +\infty)$. А скажем, для функции

$$y = \frac{\sqrt{2}(3x^2 + 10)}{2\sqrt{x^2 + 2}\sqrt{x^2 + 4}} = \sqrt{\frac{2x^2 + 8}{x^2 + 2}} + \sqrt{\frac{x^2 + 2}{2x^2 + 8}}$$

множество значений $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{5}{2}\right] \subset [2; +\infty)$ (докажите это).

Тригонометрические подстановки

Пусть для функции $y = f(x)$ удалось найти функцию $x = g(t)$, $t \in D[g]$ такую, что $D[f] \subset E[g]$, а новая функция $y = f(g(t)) = p(t)$ проще для исследования, чем исходная. При этом $E[f] = E[p]$. В качестве $x = g(t)$ подбирают тригонометрическую функцию. Сам вид тригонометрических формул позволяет добиться существенных упрощений.

Задача 11. Найдите все значения a , при которых уравнение $x\sqrt{1-4x^2}(1-8x^2) = a$ имеет решение.

Решение. Так как $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, выберем функцию $x = \frac{1}{2}\sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда

$$x = \frac{1}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}(1-2\sin^2 t) = \frac{1}{2}\sin t \cos t \cos 2t = \frac{1}{8}\sin 4t.$$

Ответ: $a \in \left[-\frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right]$.

Замечание. Благодаря удачному выбору области определения для функции $g(t)$ мы существенно сократили решение: $\sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t| = \cos t$, так как $\cos t \geq 0$ при $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Можно дать следующие рекомендации для упрощения радикалов:

$$\sqrt{a^2 - x^2} \quad x = a \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ или } x = a \cos t, t \in [0; \pi];$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} \quad x = a \operatorname{tg} t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ или } x = a \operatorname{ctg} t, t \in (0; \pi);$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} \quad x = \frac{a}{\sin t}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \text{ или}$$

$$x = \frac{a}{\cos t}, t \in [0; \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Но это не более чем рекомендации. Они могут и не привести к успеху.

Упражнения

Найдите множество значений функции:

14. $y = \frac{x\sqrt{x^2 + 4} - x^2}{x^2 + 4}$.

$$15. y = \frac{x}{\sqrt{x - x\sqrt{x^2 - 1}}}.$$

$$16. y = \log_{16} \left(\frac{5 - 12x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 5 \right).$$

Задача 12. Найдите множество значений функции $z = y\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{4 - y^2}$.

Решение. Пусть $x = \sin u$, $y = 2 \sin v$, $u, v \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $z = 2 \sin v \cos u + 2 \sin u \cos v = 2 \sin(u + v)$.

Ответ: $[-2; 2]$.

Еще раз решим задачу 5.

Задача 5. Числа x и y удовлетворяют равенству $7x^2 - 4xy + 4y^2 = 12$. Найдите все значения, которые может принимать сумма $x^2 + y^2$.

Решение. Пусть $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $r \geq 0$, $\varphi \in [0; 2\pi)$. Тогда $x^2 + y^2 = r^2$. Преобразуем ограничение: $7r^2 \cos^2 \varphi - 4r^2 \sin \varphi \cos \varphi + 4r^2 \sin^2 \varphi = 12$, $r^2 (3 \cos^2 \varphi - 2 \sin 2\varphi + 4) = 12$, $r^2 (11 + 3 \cos 2\varphi - 4 \sin 2\varphi) = 24$, $r^2 = \frac{24}{5 \cos(2\varphi + \psi) + 11}$,

где $\psi = \arccos \frac{3}{5}$, $E[r^2] = \left[\frac{24}{5+11}; \frac{24}{-5+11} \right] = \left[\frac{3}{2}; 4 \right]$.

Ответ: $\left[\frac{3}{2}; 4 \right]$.

Упражнение 4. Найдите множество значений функции $z = x^2 + 2y^2$, если $x^2 - xy + 2y^2 = 1$.

Геометрическая интерпретация

Если удастся увидеть в задаче на вычисление множества значений функции геометрическое содержание, то это позволяет существенно продвинуться в решении задачи.

Задача 3. Найдите множество значений функции $y = \sqrt{15 + 2x - x^2}$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 4^2, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Уравнение системы — уравнение окружности радиуса 4 с центром в точке $(1; 0)$, неравенство — верхняя полуплоскость. Пересечение двух этих множеств показано на рисунке

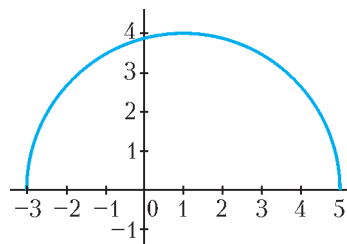


Рис. 5

5. Ортогональная проекция верхней полуокружности на ось ординат является отрезком $[0; 4]$.

Задача 13. Найдите множество значений функции $y = \sqrt{x^2 - 2x + 4} + \sqrt{x^2 - 3x + 9}$.

Решение. Функция

$$y = \sqrt{(x-1)^2 + (0-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(x-3/2)^2 + (0+3\sqrt{3}/2)^2}$$

представляет собой сумму расстояний от точки $(x; 0)$, лежа-

щей на оси Ox , до точек $A(1; \sqrt{3})$ и $B(3/2; -3\sqrt{3}/2)$. Эта сумма не меньше, чем длина отрезка $AB = \sqrt{19}$.

Ответ: $[\sqrt{19}; +\infty)$.

Задача 14. Пусть x и y удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y - x \leq 5, \\ y + 4x \leq -5, \\ 3y + 2x \geq -5. \end{cases}$$

Найдите все значения, которые могут принимать $x^2 + y^2$ и $\frac{y}{x}$.

Решение. Система неравенств описывает треугольник на плоскости xOy . Его вершины: $A(-4; 1)$, $B(-2; 3)$, $C(-1; -1)$ (рис. 6); $x^2 + y^2$ — это квадрат расстояния от точки треугольника $(x; y)$ до начала координат. Наименьшее расстояние — расстояние до прямой BC . Выражение $x^2 + (-4x - 5)^2 = 17x^2 + 40x + 25$ принимает наименьшее

значение $\frac{25}{17}$ при $x = -\frac{20}{17} \in$

$[-2; -1]$. Наибольшее расстояние — длина отрезка

$AO = 17$. Поскольку $\frac{y}{x}$ —

тангенс угла наклона прямой, проходящей через начало координат и точку треугольника $(x; y)$, наибольшее и наименьшее значения достигаются на прямых CO и BO .

Ответ: $\left[\frac{25}{17}; 17 \right]$, $\left[-\frac{3}{2}; 1 \right]$.

Упражнение 17. Пусть x и y удовлетворяют неравенству $3|x-6| + 2|y+3| \leq 12$. Найдите все значения, которые могут принимать $x^2 + y^2$ и $\frac{y}{x}$.

Замечание от редакции. Методы решения задач, связанных с множеством значений семейств функций, зависящих от параметра, рассмотрены также в статье В.Голубева и К.Мосевича «Семейства функций», опубликованной в журнале «Квант» №2 за 2006 год.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»

kvant.info

Московский центр непрерывного математического образования

kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»

math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»

ceemat.ru