

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 2007 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4–2007» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2051» или «Ф2058». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задача М2054(а) предлагалась на LXX Московской математической олимпиаде, задача М2055 – на X Кубке памяти А.Н.Колмогорова.

Задачи М2051–М2055, Ф2058–Ф2062

М2051. Пусть $a, b, c > 0$; $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = abc$. Докажите, что $a = b = c$.

В.Произволов

М2052. а) Рассмотрим окружность и ее хорду AB . Найдите множество точек M , находящихся от прямой AB на расстоянии, равном длине касательной, проведенной из точки M к рассматриваемой окружности. Докажите следующие утверждения.

б) Для любых двух парабол, описанных около одной окружности и пересекающихся в четырех точках, диагонали «параболического четырехугольника» перпен-

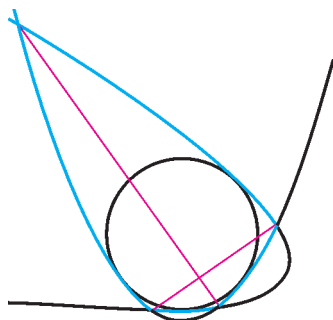


Рис. 1

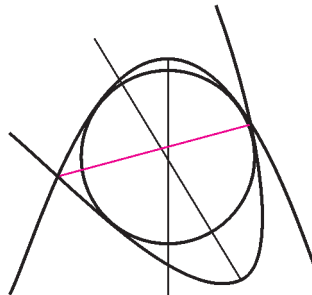


Рис. 12

дикулярны (рис.1).

в) Для любых двух парабол, описанных около одной окружности и пересекающихся в двух точках, оси парабол наклонены под одним и тем же углом к прямой, проходящей через точки пересечения этих парабол (рис.2).

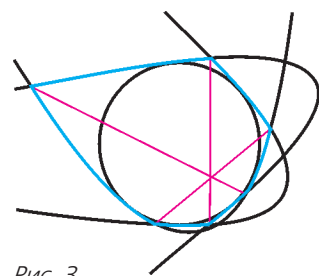


Рис. 3

г) Для любых трех парабол, описанных около одной окружности и таких, что любые две из них пересекаются в четырех точках, главные диагонали «параболического шестиугольника» пересекаются в одной точке (рис.3).

Ф.Нилов (ученик 10 класса)

М2053. Пусть $n > 3$. Докажите, что существуют целые отличные от нуля числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ такие, что

$$x_1 x_2 \dots x_n = (x_2 + x_3 + \dots + x_n)(x_1 + x_3 + \dots + x_n) \times \dots \times (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}).$$

С.Токарев, В.Сендеров

М2054. Пусть $P(x) = x^2 + x + 1$. Существуют ли натуральные числа $x_1, \dots, x_n, k_1, \dots, k_n$ такие, что

$$P(x_1) = x_2^{k_2}, P(x_2) = x_3^{k_3}, \dots, P(x_n) = x_1^{k_1}?$$

Решите задачу для случаев:

- $n = 2$;
- n – произвольное нечетное число;
- $n = 4$.

В.Сендеров, Б.Френкин

М2055. Клетки бесконечной вправо клетчатой полоски последовательно занумерованы числами $0, 1, 2, \dots$. В некоторых клетках лежат камни. Если на i -й клетке ($i > 0$) лежит ровно i камней, то разрешается снять с нее и разложить по одному на клетки с номерами $i-1, i-2, \dots, 0$. Леша распределил 2006! камней по клеткам, начиная с первой, так, чтобы можно было собрать их в нуле, сделав несколько операций. Найдите минимальный номер клетки, на которой лежит камень.

Ф.Бахарев, И.Богданов

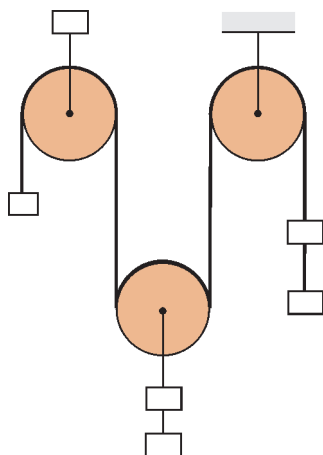


Рис. 4

Ф2058. В системе на рисунке 4 все грузы одинаковы. Вначале грузы удерживают, затем отпускают, и система приходит в движение без рывков. Найдите ускорения подвижных блоков.

А.Блоков

Ф2059. Новые настенные часы с маятником идут очень точно. Маятник представляет собой очень легкий длинный стержень, подвешенный за один из концов, к другому концу

свободно вращаться вокруг своей оси. Со временем, из-за трения в оси диска, он перестал поворачиваться вокруг этой оси. Будут ли часы спешить или они теперь начнут отставать? Оцените неточность хода часов за сутки.

З.Рафаилов



Рис. 5

Ф2060. Моль гелия медленно расширяется от объема 10 л до объема 10,1 л, при этом давление газа плавно уменьшается от 1 атм до 0,985 атм. Найдите теплоемкость гелия в этом процессе.

А.Простов

Ф2061. Тонкостенную непроводящую сферу радиусом R зарядили равномерно по поверхности полным зарядом Q , а затем разрезали пополам – по «экватору». Одну половину сферы убрали, а вторую оставили – для изучения. Найдите потенциал электрического поля, создаваемого зарядами полусферы в точке «экваториальной» плоскости, находящейся на расстоянии $R/2$ от центра сферы.

Б.Сложнов

Ф2062. На тороидальный ферромагнитный сердечник, сделанный из материала с большой магнитной проницаемостью, намотана катушка, содержащая большое количество витков. Катушку подключили к сети 220 В, ток через катушку при этом составил 10 мА (действующее значение). Вольтметр, имеющий сопротивление 10 кОм, подключают между одним из концов катушки и отводом, сделанным от середины катушки (половина витков). Какое напряжение покажет вольтметр? Какой ток теперь течет через источник?

А.Зильберман

Решения задач M2026 – M2035, Ф2043–Ф2047

M2026. На сторонах AB , BC , CD и DA квадрата $ABCD$ выбраны соответственно точки P , M , N , Q так, что $\angle MAN = 45^\circ$, $PM \parallel AN$, $AM \parallel NQ$. Отрезок PQ пересекает AM и AN в точках F и G

соответственно. Докажите, что площадь треугольника AFG равна сумме площадей треугольников FMP и GNQ .

Прежде всего отметим, что $\angle PMA = \angle MAN = \angle ANQ$, и значит, треугольники AFG , MFP и NQG подобны (см. рисунок). Поэтому утверждение задачи равносильно равенству $GF^2 = PF^2 + GQ^2$.

Далее, треугольники NQD и MPB подобны треугольникам AMB и AND соответственно, следовательно,

$$\frac{QD}{ND} = \frac{BM}{AB}, \quad \frac{ND}{AD} = \frac{BP}{BM}.$$

Перемножив эти равенства, получим, что $BP = DQ$, или $AP = AQ$. Пусть X – точка, симметричная P относительно AM . Тогда $AX = AP = AQ$ и $\angle XAN = 45^\circ - \angle MAP = \angle NAD$, т.е. X также симметрична Q относительно AN . Таким образом, $XF = FP$, $XG = GQ$ и

$$\angle XFG + \angle XGF = 360^\circ - 2\angle PFM - 2\angle QGN = 90^\circ.$$

Применив к прямоугольному треугольнику XFG теорему Пифагора, получим искомое равенство.

В.Произволов

M2027. На доске написаны три натуральных числа x , y , z . Петя записывает на листке произведение каких-нибудь двух из этих чисел, а на доске уменьшает третье число на 1. С новыми тремя числами на доске он снова проделывает ту же операцию и т.д. до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет равным нулю. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на листке?

Ответ: $x y z$.

Первое решение. Заметим, что произведение трех чисел, записанных на доске, с каждой операцией уменьшается ровно на то число, которое Петя записывает на бумажку. Когда одно из чисел становится нулем, произведение всех чисел на доске тоже равно нулю, откуда сумма всех чисел, выписанных Петей, равна начальному произведению трех чисел на доске, т.е. $x y z$.

Второе решение. Рассмотрим параллелепипед со сторонами x , y , z . На каждом шаге мы отрезаем от него параллелепипед толщины 1, записывая его объем на бумажку, и продолжаем действовать так с оставшимся параллелепипедом. Процесс закончится, когдаотрежем все. Значит, на бумажке будет записан объем исходного параллелепипеда, т.е. $x y z$.

Е.Горский, С.Дориченко

M2028. Известно, что вруны всегда врут, правдивые всегда говорят правду, а хитрецы могут и врать, и говорить правду. Вы можете задавать вопросы, на которые есть ответ «да» или «нет» (например: «Верно ли, что этот человек – хитрец?»).

а) Перед вами трое – врун, правдивый и хитрец, которые знают, кто из них кто. Как и вам это узнать?
 б) Перед вами четверо – врун, правдивый и два хитреца (все четверо знают, кто из них кто). Докажите, что хитрецы могут договориться отвечать так, что вы, спрашивая этих четверых, ни про кого из них не узнаете наверняка, кто он.

а) Спросим каждого: «Верно ли, что оба твоих соседа – вруны?». Среди трех ответов есть «да» вруна и «нет» правдивого, поэтому один из ответов будет дан ровно один раз. По нему мы узнаем ответившего: это либо врун, либо правдивый. Задав ему вопрос про одного из двух других: «Верно ли, что он хитрец?», мы все узнаем.

Замечания. 1. В начале можно задавать любой вопрос, ответ на который вам известен (например, «Верно ли, что сегодня четверг?»).

2. Можно обойтись и тремя вопросами, если они будут достаточно изощренными, что-то вроде: «Ответит ли он «да», если я спрошу...»

б) Обозначим участников: врун В, правдивый П и хитрецы ХВ и ХП. Пусть хитрецы договорятся отвечать так, как будто ХВ – врун, ХП – правдивый, В – хитрец, притворяющийся вруном, а П – хитрец, притворяющийся правдивым. Поставив их лицом друг против друга так, что ХП как бы служит отражением П, а ХВ служит отражением В, видим, что невозможно отличить, кто стоит «перед зеркалом», а кто «за зеркалом», – ответы полностью «зеркальны».

Б.Гинзбург, М.Гервер

M2029. Даны две бесконечные прогрессии, состоящие из положительных чисел: арифметическая и геометрическая, причем любое число, встречающееся в геометрической прогрессии, встречается также и в арифметической прогрессии. Докажите, что знаменатель геометрической прогрессии – целое число.

Пусть q – знаменатель геометрической прогрессии (т.е. $b_{n+1} = q^n b_1$ при всех натуральных n). Если $q = 1$, то задача решена. Иначе $(b_{n+2} - b_{n+1}) / (b_2 - b_1) = q^n$, откуда q – рациональное (ясно, если взять $n = 1$) и, кроме того, $(b_2 - b_1)q^n$ – целое число при любом натуральном n . Записывая q в виде несократимой дроби $q = s/t$, получаем, что $(b_2 - b_1)s^n / t^n$ – целое число, и, значит, $b_2 - b_1$ делится на t^n при любом n . Это возможно только если $t = 1$ или $t = -1$, т.е. когда q – целое.

Б.Френкин

M2030. Можно ли вписать правильный октаэдр в куб так, чтобы вершины октаэдра находились на ребрах куба?

Ответ: да, можно.

Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб с длиной ребра 1. Отметим на ребрах AB , AD , AA_1 , $C_1 C$, $C_1 B_1$, $C_1 D_1$ точки $M_1, M_2, \dots, M_6$ соответственно так, чтобы

$$AM_1 = AM_2 = AM_3 = C_1 M_4 = C_1 M_5 = C_1 M_6 = 3/4.$$

Тогда длины отрезков $M_1 M_2$, $M_2 M_3$, $M_3 M_1$, $M_4 M_5$, $M_5 M_6$, $M_6 M_4$ равны $\sqrt{(3/4)^2 + (3/4)^2} = 3\sqrt{2}/4$, а дли-

ны отрезков $M_1 M_4$, $M_1 M_5$, $M_2 M_4$, $M_2 M_6$, $M_3 M_5$, $M_3 M_6$ равны $\sqrt{(1/4)^2 + 1^2 + (1/4)^2} = 3\sqrt{2}/4$. Так как длины всех двенадцати отрезков равны, то все треугольники $M_1 M_2 M_3$, $M_4 M_5 M_6$, $M_1 M_4 M_5$, $M_2 M_4 M_6$, $M_3 M_5 M_6$, $M_4 M_1 M_2$, $M_5 M_1 M_3$, $M_6 M_2 M_3$ равносторонние и точки $M_1, M_2, \dots, M_6$ являются вершинами октаэдра.

Л.Радзивиловский

M2031. Прямые, содержащие медианы треугольника ABC , вторично пересекают его описанную окружность ω в точках A_1, B_1, C_1 . Прямые, проходящие через A, B, C и параллельные противоположным сторонам, пересекают ω второй раз в точках A_2, B_2, C_2 . Докажите, что прямые $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ пересекаются в одной точке.

Приведем решение, найденное на олимпиаде М.Илюхиной. Оно основывается на следующих фактах.

1. Пусть A' – точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C (см. рисунок). Тогда прямая AA' является симедианой треугольника (т.е. прямой, симметричной медиане AA_1 относительно биссектрисы угла A).

2. Для любого треугольника ABC и любой точки P прямые, симметричные прямым AP, BP, CP относительно соответствующих биссектрис треугольника, пересекаются в одной точке (или параллельны), которая называется изогонально сопряженной точке P .

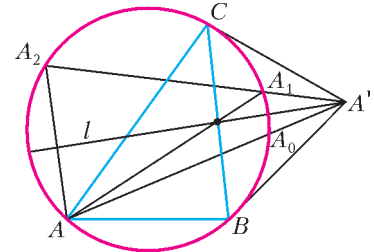
Построим точку A' , как указано в пункте 1 (B', C' определяются аналогично). Пусть прямая AA' вторично пересекает описанную окружность ω в точке A_0 . Тогда $\angle A_1 AB = \angle A_0 AC$, откуда дуги BA_1 и CA_0 равны. Так как треугольник $A'BC$ равнобедренный, а ω – его вневписанная окружность, то они симметричны относительно биссектрисы l угла $BA'C$. Из равенства дуг следует, что при этой симметрии точки A_1 и A_0 переходят друг в друга. Заметим, что l – серединный перпендикуляр к BC , поэтому A при этой симметрии переходит в A_2 , а следовательно, прямая $A_1 A_2$ переходит в прямую AA' . Поэтому, так как прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке L как симедианы треугольника ABC , то прямые $A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 C_2$ также пересекаются в точке, изогонально сопряженной L относительно треугольника $A'B'C'$.

Случай, когда одной из точек A', B', C' не существует, аналогичен.

А.Заславский

M2032. а) Существует ли такое натуральное n , что для любого натурального k хотя бы одно из чисел $n^k - 1$, $n^k + 1$ имеет вид a^b для некоторых натуральных a и $b > 1$?

б*) Назовем натуральное число антипростым, если оно делится на квадрат любого своего простого



делителя. Два натуральных числа назовем близнецами, если они отличаются на 2. Конечно или бесконечно множество пар антипростых чисел-близнецов?

Латинскими и греческими буквами в решении обозначены натуральные числа.

а) **Ответ:** нет.

Предположим, что такое число n существует. Ясно, что $n > 1$. Имеем $n^4 + 1 \neq 2^l$, $n^4 - 1 \neq 2^l$ (поскольку $a^2 + 1$ не делится на 4). Поэтому существуют нечетные простые числа p и q такие, что $n^4 + 1$ делится на p , $n^4 - 1$ делится на q ; ясно, что $p \neq q$. Из леммы Гензеля следует, что при некотором α_0 и при любом β число p входит в каноническое разложение числа $n^{4p^{\alpha_0}q^\beta} + 1$ в некоторой степени вида 2^l . Аналогично, при некотором β_0 и при любом α число q входит в каноническое разложение числа $n^{4q^{\beta_0}p^\alpha} - 1$ в некоторой степени этого же вида. Поскольку справедливо хотя бы одно из равенств

$$n^{4p^{\alpha_0}q^{\beta_0}} + 1 = a^b, \text{ где } b > 1,$$

$$n^{4q^{\beta_0}p^{\alpha_0}} - 1 = c^d, \text{ где } d > 1,$$

мы получаем: либо $b = 2^k$, либо $d = 2^k$. В любом из этих случаев приходим к невозможному равенству: $r^2 - s^2 = 1$.

б) **Ответ:** бесконечно.

Первое решение. Заметим, что $(25, 27)$ – пара антипростых чисел-близнецов. С другой стороны, из тождества

$$(2n^3 + 3n)^2 + 2 = (2n^2 + 1)^2 (n^2 + 2) \quad (1)$$

следует, что вместе с любой парой $(n^2, n^2 + 2)$ антипростых близнецов такой парой является также и

$$\left((2n^3 + 3n)^2, (2n^3 + 3n)^2 + 2 \right).$$

К тождеству (1) можно придти, например, так. Будем искать многочлены с натуральными коэффициентами $P(x)$ и $Q(x)$, отличные от 1 и такие, что

$$x(P(x))^2 + 2 = (Q(x))^2 (x + 2).$$

Легко видеть, что в случае констант это тождество выполняется лишь при $P(x) = Q(x) = 1$; линейные же функции $P(x) = ax + b$ и $Q(x) = cx + d$, где $a, b, c, d \in \mathbf{N}$, легко находятся методом неопределенных коэффициентов.

Второе решение. Будем рассматривать функции (формы)

$$f_D(x, y) = x^2 - Dy^2, \text{ где } x, y, D \in \mathbf{N}.$$

Достаточно доказать, что форма $f_{27}(x, y)$ принимает значение -2 в бесконечном числе точек (x, y) .

Лемма 1. Пусть число 1 является одним из значений формы $f_D(x, y)$. Тогда любое свое значение эта форма принимает в бесконечном числе точек (x, y) .

Доказательство. Пусть $a^2 - Db^2 = 1$, где $a, b, D \in \mathbf{N}$. Достаточно найти $c, d, e, f \in \mathbf{N}$ такие, что

$$(cx + dy)^2 - D(ex + fy)^2 = x^2 - Dy^2$$

при всех $x, y \in \mathbf{N}$.

Для выполнения этого равенства достаточно (легко показать, что и необходимо), чтобы одновременно выполнялись равенства

$$c^2 - De^2 = 1,$$

$$d^2 - Df^2 = -D,$$

$$cd = Def.$$

Первое равенство справедливо, если $c = a$, $e = b$. Для выполнения второго, или $f^2 - D\left(\frac{d}{D}\right)^2 = 1$, достаточно $f = a$, $d = Db$. Ясно, что числа $c = a$, $d = Db$, $e = b$, $f = a$ удовлетворяют и третьему равенству. Таким образом, получаем

$$(ax + Dby)^2 - D(bx + ay)^2 = x^2 - Dy^2. \quad (2)$$

Лемма доказана.

Поскольку $f_{27}(5, 1) = -2$, достаточно доказать существование $a, b \in \mathbf{N}$ таких, что $f_{27}(a, b) = 1$. Докажем, что для любой формы $f_{n^2+2}(x, y)$ такие числа a и b существуют. Для этого перепишем равенство $f_{n^2+2}(a, b) = 1$ в виде

$$(n^2 + 2)b^2 = (a + 1)(a - 1) = (t + 2)t,$$

где $t = a - 1$, и возьмем $b = n$, $t = n^2$.

Третье решение. Пусть $n^2 + 2$ – антипростое число. Рассмотрим уравнение $f_{n^2+2}(x, y) = -2$, или $x^2 + 2 = (n^2 + 2)y^2$. Поскольку оно имеет решение $x_0 = n$, $y_0 = 1$, то, вследствие леммы 1, оно имеет и некоторое решение (x_1, y_1) , где $x_1 = m > x_0$, $y_1 > y_0$. Получили новое, большее чем $n^2 + 2$, антипростое число $m^2 + 2$; рассмотрим уравнение $f_{m^2+2}(x, y) = -2$, и т.д.

Заметим, что при любом натуральном n применение формулы (2) приводит к тождеству

$$(2n^3 + 3n)^2 - (n^2 + 2)(2n^2 + 1)^2 = -2.$$

Таким образом, мы вновь пришли к тождеству (1).

Приложение

Лемма Гензеля. Если $x - 1$ делится на p^k ($p > 2$ – простое, $k > 0$), но не делится на p^{k+1} , то $x^n - 1$ делится на p^{k+r} тогда и только тогда, когда n делится на p^r . Это важное утверждение часто используется в теории чисел.

Лемму Гензеля легко доказать с помощью следующего утверждения.

Предложение. $P(x) = x^{p-1} + \dots + 1$, где $p \in \mathbf{P} \setminus \{2\}$, $x \in \mathbf{Z}$, не делится на p^2 .

Доказательство. Пусть $P(x) \vdots p$. Тогда и $x - 1 \vdots p$. В самом деле, $x^p - 1 \vdots p$, откуда вследствие Малой теоремы Ферма $x - 1 \vdots p$.

Пусть $P(x) \vdots p$, $x \neq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} P(x) - p &= (x^{p-1} - 1) + \dots + (x - 1) = \\ &= (x - 1) \left(\frac{x^{p-1} - 1}{x - 1} + \dots + \frac{x - 1}{x - 1} \right) = (x - 1) A. \end{aligned}$$

Так как $\frac{x^l - 1}{x - 1} \equiv l \pmod{p}$ при $x \not\equiv 1 \pmod{p}$, $l \in \mathbf{N}$, то

$$A \equiv (p-1) + \dots + 1 = p \cdot \frac{p-1}{2} \pmod{p}.$$

Получили $P(x) - p \cdot p^2$, откуда $P(x)$ не делится на p^2 . При нечетном n легко распространить лемму Гензеля на случай чисел $x+1$ и x^n+1 . Сделайте это самостоятельно.

Замечания

1. Рассмотрим более общее, нежели выше, уравнение $f_m(x, y) = 1$, где $x, y, m \in \mathbf{N}$, m – фиксированное число. Ясно, что в случае $m = n^2$, где $n \in \mathbf{N}$, это уравнение не имеет решений. При любом же $m \neq n^2$ решения этого уравнения существуют. Это – основная теорема теории уравнений Пелля (подробный рассказ о них см. в статьях «Уравнения Пелля» в «Кванте» №3, 4, 6 за 2002 г.).

Далее, **все** эти решения получаются из базового, «наименьшего», методом леммы 1.

Легко видеть, что общее уравнение $f_m(x, y) = A$ ($A \in \mathbf{Z}$, A и m – фиксированные числа) может – в частности, в случае $m \neq n^2$ – не иметь решений (x, y) (где $x, y \in \mathbf{N}$). Если же решения существуют, то все они в случае $m \neq n^2$ получаются из некоторого конечного набора базовых методом леммы 1.

2. На Турнире городов в 1984 году предлагалась следующая (вошедшая также в «Задачник «Кванта» под номером 869) задача.

Пары последовательных натуральных чисел (8, 9), (288, 289) обладают тем свойством, что каждое из этих чисел содержит любой свой простой множитель не менее чем во второй степени.

а) Найдите еще одну такую пару последовательных чисел.

б) Докажите, что существует бесконечно много таких пар.

Заметим, что из результата пункта б) задачи М2032 бесконечность множества таких пар получается автоматически: если $n-1$ и $n+1$ – антипростые числа, то n^2 и $n^2-1 = (n-1)(n+1)$ – также, очевидно, антипростые.

3. Оба пункта нашей задачи связаны с так называемой **проблемой Каталана** (см. статью в этом номере журнала).

В. Сендеров

М2033. У ведущего имеется колода из 52 карт. Зрители хотят узнать, в каком порядке лежат карты (не уточняя, сверху вниз или снизу вверх). Разрешается задавать ведущему вопросы вида «Сколько карт лежит между такой-то и такой-то картами?» Один из зрителей знает, в каком порядке лежат карты. Какое наименьшее число вопросов он должен задать, чтобы остальные зрители по ответам на эти вопросы могли узнать порядок карт в колоде?

Ответ: за 34 вопроса.

Первый вопрос зритель задает про две крайние карты. Ответ 50 покажет всем, что они в самом деле крайние. Назовем любую из них 1-й (сверху или снизу – нам не важно), тогда другая – 52-я. Теперь уже надо дать

возможность все остальные номера карт определить однозначно. Назовем 2-ю карту дыркой, и вторым вопросом спросим про две карты рядом с дыркой (т.е. 1-ю и 3-ю). Ответ 1 задает положение 3-й карты однозначно. Далее будем продолжать задавать вопросы парами: в нечетных вопросах называем две самые крайние карты из еще не упомянутых (одна из них была дыркой, другая – недыркой), назначаем новой дыркой ранее неупомянутую карту рядом с недыркой и следующим четным вопросом спрашиваем про две карты рядом с дыркой. Так, в первой паре вопросов «знающий» называет 1-ю, 52-ю и 3-ю карты, во второй – 2-ю, 51-ю и 49-ю карты, в третьей паре – 4-ю, 50-ю и 6-ю карты и т.д. Как видим, дырки по очереди возникают то ближе к началу, то ближе к концу. В отличие от первой тройки для каждой следующей тройки карт после ответов на очередную пару вопросов теоретически есть два возможных расположения: основное (то, что на самом деле) и побочное (крайние карты меняются местами, средняя передвигается соответственно). Так, из ответов на 3-й и 4-й вопросы следует, что вторая тройка карт – это 2, 51 и 49 либо, 2, 51 и 4. Эта неопределенность исчезнет, однако, после ответа на следующий (в примере – на 5-й) вопрос. Суть в том, что максимальное число карт между ранее не упомянутыми крайними картами в побочном варианте меньше, чем в основном (ниже карты одной тройки обозначены одной буквой, неопределенная – тройка C):

Основной	abaC_C.....bCbа
Побочный	abaC.....CbCbа

Так задаем 33 вопроса. Последний 34-й вопрос зададим про крайнюю и карту рядом с ней (25-ю и 26-ю) (предпоследняя и последняя тройки обозначены буквами p и Q соответственно):

abacdcefeghijklkmnmopoQQ_pQpnonlmjkljihfghfeddbcba

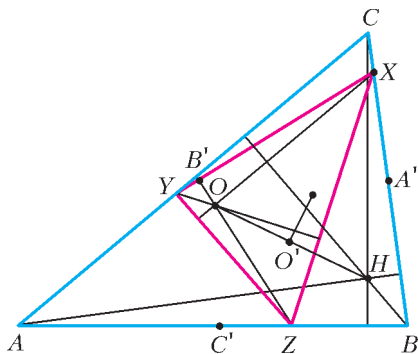
Тогда положение последней тройки и единственной оставшейся карты определится однозначно.

Покажем, что меньшим числом вопросов обойтись нельзя. Разобьем изначально все карты на 52 группы по одной карте. При вопросе про две карты из разных групп объединяем эти группы в одну. Каждый вопрос уменьшает число групп максимум на одну. Если задано не более 33 вопросов, то останется не менее $52 - 33 = 19$ групп. Среди них групп из 3 карт – не более 17. Значит, либо найдутся две группы по одной карте, либо группа из ровно двух карт. В обоих случаях можно эту пару карт поменять местами, не трогая остальных: все ответы не изменятся. Тем самым, порядок не восстанавливается однозначно.

А. Шаповалов

М2034. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты точки X, Y, Z так, что треугольники ABC и XYZ подобны. Докажите, что центр описанной окружности треугольника XYZ равноудален от ортоцентров треугольников ABC и XYZ¹.

¹ В условии, опубликованном в «Кванте» №1, имеются неточности.



Прежде всего отметим, что для любой точки X на стороне BC точки Y, Z определяются однозначно. Действительно, Z является пересечением AB и прямой, полученной из AC композицией поворота вокруг X на угол (ориентированный) BAC и гомотетии с центром X и коэффициентом AC/AB (см. рисунок). Пусть теперь O — центр описанной около ABC окружности, A', B', C' — середины BC, CA, AB . Тогда треугольник $A'B'C'$ подобен ABC , а O является его ортоцентром. Возьмем теперь на BC, CA, AB точки X, Y, Z , такие что углы XOA', YOB', ZOC' равны. Из подобия треугольников XOA', YOB', ZOC' следует, что треугольник XYZ получается из треугольника $A'B'C'$ композицией поворота вокруг O на угол XOA' и гомотетии с центром O и коэффициентом OX/OA' . Поэтому треугольник XYZ подобен ABC , а O — его ортоцентр. При описанной выше поворотной гомотетии центр O' описанной окружности $A'B'C'$ перейдет в центр описанной окружности XYZ , значит, центр описанной окружности XYZ лежит на прямой, проходящей через O' и перпендикулярной OO' . Но O' — это центр окружности девяти точек треугольника ABC , т.е. середина отрезка между его центром описанной окружности O и ортоцентром H . Следовательно, центр описанной окружности XYZ лежит на серединном перпендикуляре к OH , откуда и следует утверждение задачи.

А.Заславский

M2035. а) На окружности расставлены несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что числа можно разделить на три группы подряд идущих чисел так, чтобы суммы чисел в любых двух группах отличались не больше чем на 1. (Если в группе нет чисел, то сумма считается равной нулю.)

б*) На отрезке расставлены несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что числа можно разделить на n групп подряд идущих чисел так, чтобы суммы чисел в любых двух группах отличались не больше чем на 1. (Если в группе нет чисел, то сумма считается равной нулю.)

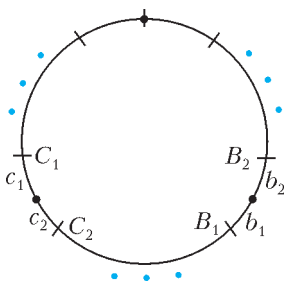


Рис. 1

а) Сделаем задачу более наглядной. Будем считать, что наша окружность имеет длину, равную сумме всех чисел. Разобьем ее на дуги, равные нашим числам (и идущие в том же порядке). Тогда нужно разрезать окружность по границам дуг на три дуги так, чтобы длины этих больших дуг различались не более чем на 1.

Отметим три точки на окружности так, чтобы они разделили ее на три равные дуги, причем одна из них попала на границу дуг (рис.1). Пусть остальные две точки разбили дуги, на которые они попали, на участки длины b_1, b_2 и c_1, c_2 соответственно ($b_1 + b_2 \leq 1$, $c_1 + c_2 \leq 1$; если точка попала на границу дуги, то соответствующее число равно нулю). Концы этих дуг обозначим соответствующими заглавными буквами. Покажем, что можно сместить каждую из отмеченных точек в один из концов соответствующей дуги так, чтобы все три дуги различались не больше чем на 1.

При смещении в точки C_1 и B_1 разность левой и правой дуг изменяется на $-c_1 - b_1$, а разности левой и правой дуг с нижней — на $(-c_1) - (-b_1 + c_1) = b_1 - 2c_1$ и $b_1 - (-b_1 + c_1) = 2b_1 - c_1$ соответственно. Таким образом, для того чтобы это смещение подходило, нужно выполнение системы неравенств

$$(B_1, C_1): \begin{cases} |b_1 + c_1| \leq 1, \\ |2c_1 - b_1| \leq 1, \\ |2b_1 - c_1| \leq 1. \end{cases}$$

Записывая условия для сдвигов в остальные пары точек, получаем следующие системы:

$$(B_2, C_2): \begin{cases} |b_2 + c_2| \leq 1, \\ |2c_2 - b_2| \leq 1, \\ |2b_2 - c_2| \leq 1; \end{cases}$$

$$(B_1, C_2): \begin{cases} |b_1 - c_2| \leq 1, \\ |2c_2 + b_1| \leq 1, \\ |2b_1 + c_2| \leq 1; \end{cases}$$

$$(B_2, C_1): \begin{cases} |b_2 - c_1| \leq 1, \\ |2c_1 + b_2| \leq 1, \\ |2b_2 + c_1| \leq 1. \end{cases}$$

Предположим, что ни одна из них не выполняется. Рассмотрим первые две системы. Неравенства $b_1 + c_1 \leq 1$ и $b_2 + c_2 \leq 1$ не могут нарушаться одновременно, так как $b_1 + b_2 + c_1 + c_2 \leq 2$. Поэтому будем считать, что $b_1 + c_1 \leq 1$ и нарушается одно из двух других неравенств для (B_1, C_1) . Поскольку эти случаи симметричны, будем считать, что $2c_1 > 1 + b_1$. Заметим, что тогда $0 \leq b_1 + 2c_2 \leq b_1 + 2(1 - c_1) = 2 - (2c_1 - b_1) < 1$, и первые два неравенства для (B_1, C_2) выполнены (первое выполнено всегда). Значит, $2b_1 + c_2 > 1$, откуда получаем

$$1 < 2b_1 + c_2 \leq 2b_1 + 1 - c_1 < 2b_1 + 1 - \frac{1 + b_1}{2} = \frac{3b_1 + 1}{2},$$

т.е. $b_1 > \frac{1}{3}$, а тогда $c_1 > \frac{1 + b_1}{2} > \frac{2}{3}$. Но при этом $c_1 + b_1 > 1$, что противоречит нашему выбору. Утверждение доказано.

Замечание. Другое решение, разумеется, можно получить из решения пункта б).

б) Мы будем пользоваться тем же наглядным представлением – естественно, с заменой окружности на отрезок. Задача при этом переформулируется так. На отрезке отмечены несколько точек, причем расстояние между любыми двумя соседними не больше 1. Требуется доказать, что можно разрезать отрезок в $n - 1$ точке из них так, что отрезок распадется на n отрезков, различающихся не больше чем на 1. (Разрез в точке можно сделать дважды; тогда одна из частей будет иметь нулевую длину.)

Заметим, что множество способов разреза конечно. Назовем каждый такой способ *разбиением*. Мы некоторым специальным образом выберем из этого множества одно разбиение и покажем, что оно подходит. Выбирать мы будем в несколько этапов, «сужая» область поиска.

1. Выберем все разбиения, в которых длина наибольшего получающегося отрезка – наименьшая возможная (обозначим эту длину через m).

2. Отберем из них те, в которых количество отрезков длины m минимально.

3. А из них – те, в которых минимально количество отрезков, меньших $m - 1$.

Если это количество равно нулю – мы уже получили хорошее разбиение. Если нет, то продолжаем процедуру выбора.

4. Наконец, выберем такое разбиение, в котором между каким-нибудь отрезком длины m и каким-нибудь длины $< m - 1$ находится минимальное возможное число отмеченных точек (включая их концы).

Рассмотрим пару отрезков: U с максимальной длиной m и V , длина которого меньше $m - 1$, причем число

точек k между ними минимально (рис.2). Пусть, без ограничения общности, U находится справа от V . Если $k = 1$ (U находится непосредственно справа от V), то передвинем точку разреза между ними вправо. Тогда длина U уменьшится, а длина V останется меньше m , так как она увеличилась не больше чем на 1; следовательно, число отрезков длины m уменьшилось, что противоречит этапу 2 выбора.

Пусть U и V – не соседние. Будем передвигать правую границу отрезка V вправо до тех пор, пока его длина не превысит $m - 1$; так как длина отрезка W справа от него не меньше $m - 1$, то этот момент наступит. При этом длина V остается меньше m ; следовательно, максимальная длина отрезка или количество отрезков такой длины не могли увеличиться.

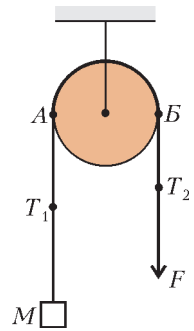
После сдвига границы исчез один отрезок длины $< m - 1$. Значит, либо их количество уменьшилось, либо теперь отрезок W имеет длину, меньшую $m - 1$. Но, очевидно, между W и U меньше точек, чем было между V и U – противоречие с этапом 4 выбора. Итак, если выбрать нужное разбиение не удалось, то мы пришли к противоречию, что и требовалось.

Замечание. На первый взгляд, можно было бы попытаться придумать решение, аналогичное решению пункта а): разбить отрезок на n равных частей, а затем

попытаться сдвинуть каждую из точек разбиения в одну из двух ближайших отмеченных точек. Однако авторам известен пример (при достаточно больших n), в котором при любом таком сдвиге найдутся два отрезка разбиения с разностью, большей 1 (а оптимальное разбиение устроено другим образом). Мы предоставляем читателю попытаться самостоятельно построить такой пример.

И.Богданов, Г.Челноков

Ф2043. Груз массой 3 кг поднимают и опускают при помощи легкой нити и блока, ось которого закреплена неподвижно. Однажды блок «заело» – он перестал вращаться вокруг своей оси. При этом удается поднимать груз силой 40 Н, приложенной к свободному концу нити, и груз в этом случае движется вверх с постоянной скоростью. Какой груз нужно подвесить к свободному концу нити, вместо того чтобы тянуть нить, чтобы груз массой 3 кг двигался с той же скоростью вниз? Трение между нитью и блоком – сухое, коэффициент трения не зависит от прижимающего усилия.



При равномерном движении груза массой M вверх сила натяжения нити слева от блока $T_1 = Mg$, справа $T_2 = F$ (см. рисунок). Разница этих сил определяется силой трения нити о «заевший» блок и пропорциональна средней силе прижима нити к поверхности блока:

$$F - Mg = \alpha \frac{F + Mg}{2}.$$

Принимая $g = 10 \text{ м/с}^2$, получим

$$\alpha = \frac{2(F - Mg)}{F + Mg} = \frac{2(40 - 30) \text{ Н}}{(40 + 30) \text{ Н}} = \frac{2}{7}.$$

Во втором случае груз массой M равномерно опускается под воздействием подвешенного груза массой m . При этом силы натяжения нити равны $T_1^* = Mg$ и $T_2^* = mg$ слева и справа от блока соответственно. Тогда

$$Mg - mg = \alpha \frac{Mg + mg}{2},$$

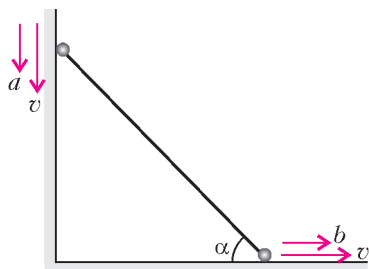
откуда находим искомую массу груза:

$$m = \frac{2 - \alpha}{2 + \alpha} M = \frac{3}{4} M = 2,25 \text{ кг}.$$

Кстати, точное решение (учитывающее изменение прижимающей силы от точки A до точки B – вместо расчета по «средней силе прижима») дает такой же ответ.

А.Блоков

Ф2044. Гантелька состоит из тонкого легкого стержня длиной L и двух одинаковых маленьких шариков массой M каждый на концах стержня. В начальный момент гантелька стоит в углу комнаты вертикально, опираясь на пол и вертикальную стену. От очень малого толчка гантелька начинает двигаться, при этом один из концов скользит по полу, а другой



продолжает касаться стены. Найдите силы, с которыми гантелька действует на пол и стену в тот момент, когда она составляет угол 45° с вертикалью. Трения нет.

Обозначим скорость верхнего шарика v , ускорение в интересующей нас точке пусть будет a (см. рисунок). При значении угла $\alpha = 45^\circ$ с горизонтом нижний шарик имеет такую же скорость v , а ускорение его обозначим b . Из закона сохранения энергии следует

$$\frac{Mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} = MgL \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

или

$$v^2 = gL \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Зададим очень малый интервал времени τ . Скорости шариков изменятся на очень малые величины $\Delta v_{\text{верт}} = a\tau$ и $\Delta v_{\text{гориз}} = b\tau$. Снова применим закон сохранения энергии:

$$Mg \cdot v\tau = \left(\frac{M(v + \Delta v_{\text{верт}})^2}{2} - \frac{Mv^2}{2} \right) + \left(\frac{M(v + \Delta v_{\text{гориз}})^2}{2} - \frac{Mv^2}{2} \right),$$

откуда

$$gv = va + \frac{a^2\tau}{2} + vb + \frac{b^2\tau}{2},$$

или при малом τ

$$a + b = g.$$

За малое время τ угол α немного уменьшится, найдем его тангенс:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(L/\sqrt{2}) - v\tau}{(L/\sqrt{2}) + v\tau} = \frac{v_{\text{гориз}}}{v_{\text{верт}}} = \frac{v + b\tau}{v + a\tau}.$$

Отсюда получим

$$\frac{L}{\sqrt{2}}v + \frac{L}{\sqrt{2}}a\tau - v^2\tau - av\tau^2 = \frac{L}{\sqrt{2}}v + \frac{L}{\sqrt{2}}b\tau + v^2\tau + bv\tau^2.$$

После очевидных упрощений запишем

$$\frac{L}{\sqrt{2}}(a - b) = 2v^2\tau,$$

или

$$a - b = 2g(\sqrt{2} - 1).$$

Решая полученные для a и b уравнения, найдем

$$a = g \frac{2\sqrt{2} - 2 + 1}{2} = g(\sqrt{2} - 0,5) \approx 0,91g,$$

$$b = g \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2} \right) \approx 0,09g.$$

Найти силу Q со стороны вертикальной стены и силу N со стороны пола проще всего, записав уравнения второго закона Ньютона для центра масс гантельки (чтобы не связываться с величиной силы натяжения стержня):

$$Q = M \cdot 0 + Mb = Mg(1,5 - \sqrt{2}),$$

$$2Mg - N = M \cdot 0 + Ma,$$

откуда

$$Q = Mg(1,5 - \sqrt{2}),$$

$$N = 2Mg - Ma = Mg(2,5 - \sqrt{2}).$$

Можно было заранее проверить, не оторвется ли гантелька от вертикальной стены раньше, чем угол α уменьшится от 90° до 45° . Но это не обязательно — силу Q мы получили положительную.

А.Зильберман

Ф2045. Массивный клин с углом 60° при основании может двигаться по гладкому горизонтальному столу. На наклонной поверхности клина находится маленькая тележка. Когда тележка едет по неподвижному клину — мы его удерживаем, приложив к нему горизонтальную силу, — она давит на его поверхность силой f . Увеличим горизонтальную силу, действующую на клин, так, чтобы он двигался по горизонтали с постоянным ускорением. Найдите величину этой силы, если известно, что сила, с которой тележка давит на поверхность клина, стала вчетверо больше по величине. Масса клина в 5 раз больше массы тележки.

Обозначим массу тележки m , массу клина M . При неподвижном клине сила давления тележки на клин (она равна по величине силе нормальной реакции, действующей на тележку со стороны клина; рис.1) равна $f = mg \cos \alpha$. Пусть ускорение клина направлено влево и составляет a (рис.2). Ускорение тележки удобно

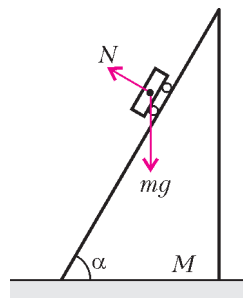


Рис. 1

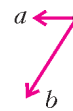


Рис. 2

представить в виде суммы двух векторов — ускорения вместе с клином $\vec{a}$ и ускорения относительно клина $\vec{b}$, при этом вектор $\vec{b}$, его нас не просили находить, составляет угол α с горизонталью. Запишем уравнение второго закона Ньютона для тележки в перпендикулярном к $\vec{b}$ направлении:

$$4f - mg \cos \alpha = m a \sin \alpha,$$

откуда для ускорения клина получим

$$a = \frac{4f - mg \cos \alpha}{m \sin \alpha} = 3g \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}g.$$

Для клина в горизонтальном направлении запишем

$$F - 4f \sin \alpha = Ma,$$

откуда найдем искомую силу:

$$F = 4f \sin \alpha + Ma = 4f \sin \alpha + 5mg\sqrt{3} = \\ = f \left(4 \sin \alpha + \frac{5\sqrt{3}}{\cos \alpha} \right) = 12\sqrt{3}f.$$

З.Рафаилов

Ф2046. В двух одинаковых сосудах находятся одинаковые массы кислорода и гелия. Давление кислорода 1 атм, давление гелия 2 атм. Сосуды соединяют тонкой трубкой, и газы перемешиваются. Каким станет давление в системе после установления равновесия? Теплообмен с окружающей средой пренебрежимо мал. Молярная масса кислорода 32 г/моль, гелия 4 г/моль.

При одинаковых массах кислорода и гелия их количества вещества связаны соотношением $\nu_2 = 8\nu_1$. С учетом того, что $p_2 = 2p_1$, для температур получим $T_1 = 4T_2$. При смешивании газов суммарная внутренняя энергия остается неизменной (теплообмена нет, работа внешних сил равна нулю). Тогда запишем

$$U = \frac{5}{2} R\nu_1 T_1 + \frac{3}{2} R\nu_2 T_2 = \frac{5}{2} R\nu_1 T_x + \frac{3}{2} R\nu_2 T_x.$$

Отсюда найдем установившуюся температуру T_x :

$$T_x = \frac{5\nu_1 T_1 + 3\nu_2 T_2}{5\nu_1 + 3\nu_2} = \frac{11}{29} T_1.$$

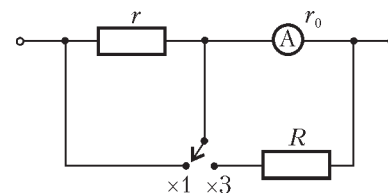
Установившееся же давление будет равно

$$p = \frac{(\nu_1 + \nu_2) RT_x}{2V} = \frac{\nu_1 RT_1}{V} \cdot \frac{9 \cdot 11}{2 \cdot 29} \approx 1,7p_1 = 1,7 \text{ атм.}$$

А.Повторов

Ф2047. Многопредельный ампер-вольтметр для измерений в цепях постоянного тока сделан на основе

точного микроамперметра с током полного отклонения 100 мкА и сопротивлением 850 Ом. При помощи многопозиционного переключателя к нему подключаются точно подобранные резисторы – добавочные сопротивления для измерения напряжений и шунты для измерения токов. Пределы измерения напряжений 1 В, 10 В и 100 В, пределы измерения токов 1 мА, 10 мА и 100 мА. Хотелось бы иметь более «подробные» пределы измерений, но кардинально переделывать точный и удобный прибор совсем не хочется. На передней панели прибора есть отдельный, не используемый для его работы переключатель на два положения – у переключателя три контакта. В одном его положении соединены между собой контакты 1 и 2, а контакт 3 отключен, при другом положении отключен контакт 2, а соединены контакты 1 и 3. Придумайте и рассчитайте простую схему, которая позволяла бы «растянуть» шкалы прибора ровно в три раза на всех пределах измерения (шкала измерения напряжений 10 В превращается в 30 В, шкала измерения токов 1 мА – в 3 мА и т.д.) в одном из положений этого переключателя, а в другом положении все должно оставаться «как было». Кстати, эти положения переключателя можно обозначить $\times 1$ и $\times 3$.



Самая простая из всех возможных схем (попробуйте решить проблему попроще – ничего у вас не выйдет!) приведена на рисунке. Ясно, что

$$R = \frac{1}{2} r_0, \text{ а } r + \frac{r_0 R}{r_0 + R} = r_0, \text{ т.е. } r = \frac{2}{3} r_0.$$

Итак,

$$R = \frac{1}{2} r_0 = 425 \text{ Ом}, \quad r = \frac{2}{3} r_0 \approx 567 \text{ Ом}.$$

Р.Александров

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Головоломка «Дельта»

(Начало см. на 2-й с. обложки)

С головоломкой «Дельта» молодая изобретательница Ирина Новичкова в 2006 году ездила на съезд любителей головоломок в Бостон, США. Приехавшие туда знатоки не смогли «с ходу» решить задачу Ирины, и более ста экземпляров игрушки участники соревнований увезли в разные страны мира в надежде, что дома им «стены помогут» одолеть головоломку из России. На самом деле, в Бостоне просто некогда было решать трудные задачи.

Чтобы сделать головоломку «Дельта», нужно взять 12 одинаковых пластинок квадратного сечения и толщиной, равной половине ширины пластинки.

Каждую деталь головоломки склеивают из двух пластинок со срезанными двумя способами углами. У шести пластинок отрезают углы наискосок так, чтобы одно из оснований имело форму пятиугольника, а шесть остальных пластинок разрезают наискосок по диагонали (см. фото на 2-й с. обложки). Получают 12 заготовок двух видов. Их склеивают попарно так, чтобы получить шесть деталей головоломки двух разных конфигураций – по три каждого вида.

После этого остается склеить из плотной бумаги или тонкого картона шестигранную коробочку, и головоломка готова к решению. Длина каждой из шести боковых сторон коробочки должна быть в 3,5 раза больше толщины пластины, а высота коробки – больше в 2,5 раза.

А.Калинин

Задачи

1. Обозначим $P(n)$ произведение цифр натурального числа n , причем если число n само является цифрой, то $P(n) = n$. Например: $P(5) = 5$, $P(25) = 10$. Последовательно записаны, такие числа:

$$1 + P(1), 2 + P(2), 3 + P(3), \dots$$

Могут ли в этой последовательности 2007 подряд идущих чисел оказаться последовательными натуральными числами?

С.Дворянинов



2. На острове проживают аборигены, каждый из которых либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Как-то встретились три аборигена: Ах, Ох и Ух. Один из них сказал: «Ах и Ох — оба лжецы», другой сказал: «Ах и Ух — оба лжецы» (но кто именно что сказал — неизвестно). Сколько всего лжецов среди этих трех аборигенов?

Е.Барабанов



3. Профессор Мумбум-Плюмбум мечтает подобрать десять различных натуральных чисел таких, чтобы их наибольший общий делитель совпал с их средним арифметическим. Удастся ли ему это сделать?

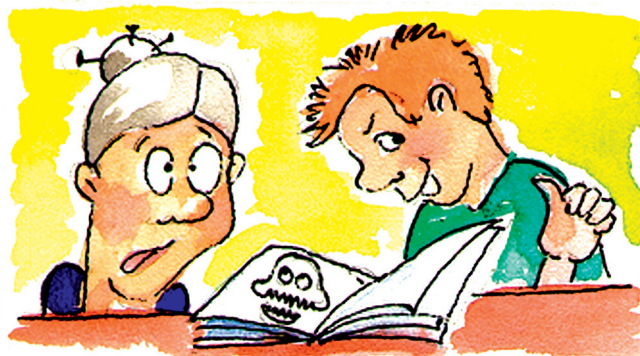
А.Жуков

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 — 8 классов.



4. Петя на каждом листе тетради из 96 листов нарисовал веселую рожицу (в анфас) либо с одной, либо с другой стороны листа, так что если положить закрытую тетрадь на стол, то некоторые рожицы будут «смотреть» на него, а остальные — от него. Верно ли, что можно раскрыть тетрадь (или вообще не раскрывать) в таком месте, чтобы на Петю и от него «смотрело» одинаковое количество рожиц?

И.Акулич



5. Правильный восьмиугольник разрезан на части, которые закрашены в четыре цвета. Докажите, что каждым цветом закрашена одна и та же площадь.

В.Произволов

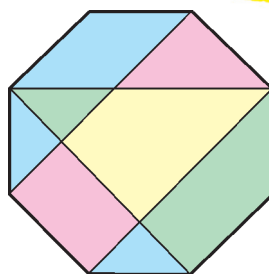


Иллюстрация Д.Гришуковой

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. В этом номере мы собрали задачи авторов из разных стран мира: США, Израиля, Румынии, России, Белоруссии. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

1. Нумизмат выложил 100 монет разных стран в одну линию. Оказалось, что любые две соседние монеты весят почти одинаково, а именно, разница их масс строго меньше 0,01 грамма. Всегда ли удастся эти монеты так перегруппировать, а потом расположить по кругу, чтобы массы любых двух соседних монет на окружности отличались менее чем на 0,02 грамма?

Г.Гальперин

2. а) Нарисуйте три круга, при пересечении которых образуются шесть областей, обладающих следующим свойством: в них можно расставить числа от 1 до 6 так, чтобы сумма чисел внутри каждого круга была одной и той же и максимально возможной.

б) Нарисуйте три круга, при пересечении которых образуются шесть областей, для которых невозможна расстановка чисел от 1 до 6 так, чтобы суммы чисел внутри всех кругов были одинаковы.

в) Обозначим максимальную сумму, полученную в решении задачи а), через M . Нарисуйте три многоугольника, при пересечении которых образуются шесть областей, обладающих следующим свойством: в них можно расставить числа от 1 до 6 так, чтобы сумма

чисел внутри каждого многоугольника была одной и той же и превышала M .

И.Хейфец

3. Докажите, что любые попарно различные нечетные натуральные числа m, n, p, q, r удовлетворяют неравенству

$$mnpqr + mnpr + mnqr + mpqr + npqr +$$

$$+ 201 \leq 2mnpqr.$$

В.Кириак

4. Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон четырехугольника, разрезал его диагональ пополам. Докажите, что четырехугольник является трапецией или параллелограммом.

В.Произволов

5. За один ход разрешается одновременно перекрасить в противоположный цвет любую клетку шахматной доски, а также все клетки, имеющие с ней общую сторону. Можно ли за несколько ходов перекрасить в противоположный цвет все клетки доски?

И.Акулич

Победители конкурса имени А.П. Савина «Математика 6–8» 2006/07 учебного года

Лучших результатов в конкурсе добились следующие школьники:

Кагаловский Таль — Беэр-Шева (Израиль), школа «Эшель-Ханаси», 8 кл.,

Лисичкин Сергей — Харьков, гимназия 47, 7 кл.,

Габидулина Надежда — Севастополь, 8 кл.,

Кадец Борис — Харьков, «Академическая гимназия» 45, 7 кл.,

Дудкин Александр — Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,

Родионов Георгий — Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,

Гулин Всеволод — Харьков, «Академическая гимназия» 45, 7 кл.,

Ибраимова Айжана — Бишкек, ФМШЛ 61, 8 кл.,

Рубаненко Мария — Харьков, школа 106, 7 кл.,

Хрущёв Тимур — Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,

Теплова Даша — Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,

Мищенко Николай — Краснодар, школа 93, 6 кл.

и кружки:

Математического клуба при университете им. Д.Бен-Гуриона в Негеве (Израиль), руководители П.Самовол, И.Хейфец,

«Эврика» при ФМЛ 27, Харьков, руководители А.Л.Берштейн, Е.Л.Аринкина,

школы 146, Пермь, руководители О.Н.Чичагова, А.М.Бурштейн,

Центра дополнительного математического образования, Курган, руководитель О.И.Южаков,

Малого университета при Харьковском национальном

университете им. В.Н.Каразина, руководители С.А.Лифиц, А.С.Щербина, школы 9, Пермь, руководитель Г.А.Одинцова, школы 5, Магнитогорск, руководитель А.В.Христева, «Сигнум» при филиале РГСУ, Чебоксары, руководитель С.А.Иванов, лицея 130, Новосибирск, руководитель Л.Н.Чусовитина, гимназии 1, Самара, руководитель А.А.Гусев, ФМШЛ 61, Бишкек, руководитель Л.С.Хохлова.

Жюри конкурса отмечает также хорошие работы следующих учеников:

Киспинского Алексея — Харьков, «Академическая гимназия» 45, 7 кл.,

Филимоновой Карины — Харьков, ФМЛ 27, 7 кл., Цыбышева Алексея — Самара, гимназия 1, 7 кл., Софронова Александра — Харьков, ФМЛ 27, 7 кл., Мейстера Давида — Санкт-Петербург, ФМЛ 366, 8 кл., Комисарчука Евгения — Санкт-Петербург, 8 кл., Матвеевского Дмитрия — Харьков, ФМЛ 27, 6 кл., Лийко Виктории — Харьков, «Академическая гимназия» 45, 7 кл., Коншина Александра — Москва, школа 1361, 8 кл., Булгаковой Дарьи — Нижний Тагил, 8 кл.

и кружка

лицея 67, Иваново, руководитель А.В.Шеронова.

Только ноль и единица

Л. ШИБАСОВ, З. ШИБАСОВА

НАВЕРНЯКА ВАМ ЗНАКОМА СЛЕДУЮЩАЯ ЗАДАЧА. Задумано натуральное число, не превосходящее N . Какое наименьшее число вопросов надо задать, получая в ответ лишь «да» или «нет», чтобы отгадать это число?

Приведем стандартное решение для случая $N = 2^{n+1}$. Весь массив чисел делят пополам и спрашивают: «Задуманное число находится в первой половине?» В зависимости от ответа выбирают половину, содержащую искомое число, вновь делят ее пополам и повторяют аналогичный вопрос. Всего понадобится $(n+1)$ вопросов. Очевидно, столько же вопросов понадобится и в случае, когда $2^n < N < 2^{n+1}$; но здесь может оказаться достаточно n вопросов, поскольку на некотором шаге при делении числового массива получаются неравные части и задуманное число может оказаться в

меньшей из них.

При таком решении вопросы задавались в зависимости от получаемых ответов. А можно ли обойтись n вопросами, без учета ответов? Оказывается, да. Для этого достаточно начать с вопроса: «Делится ли число на 2?» Если делится, то записать 0, если нет — то 1. Следующим надо задать вопрос: «Делится ли полученное частное на 2?» и снова записать остаток от деления на 2 и т.д. Занумеровав возникшую последовательность нулей и единиц: $a_0, a_1, \dots, a_n$, находим искомое число $m = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \dots + a_n \cdot 2^n$. В нем коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_n$ — остатки от деления на 2 задуманного числа и сто последовательных частных.

Например, задумано число 83. При последовательном делении на два выписываем соответствующие частные, а в скобках — остатки от деления: 83(1),

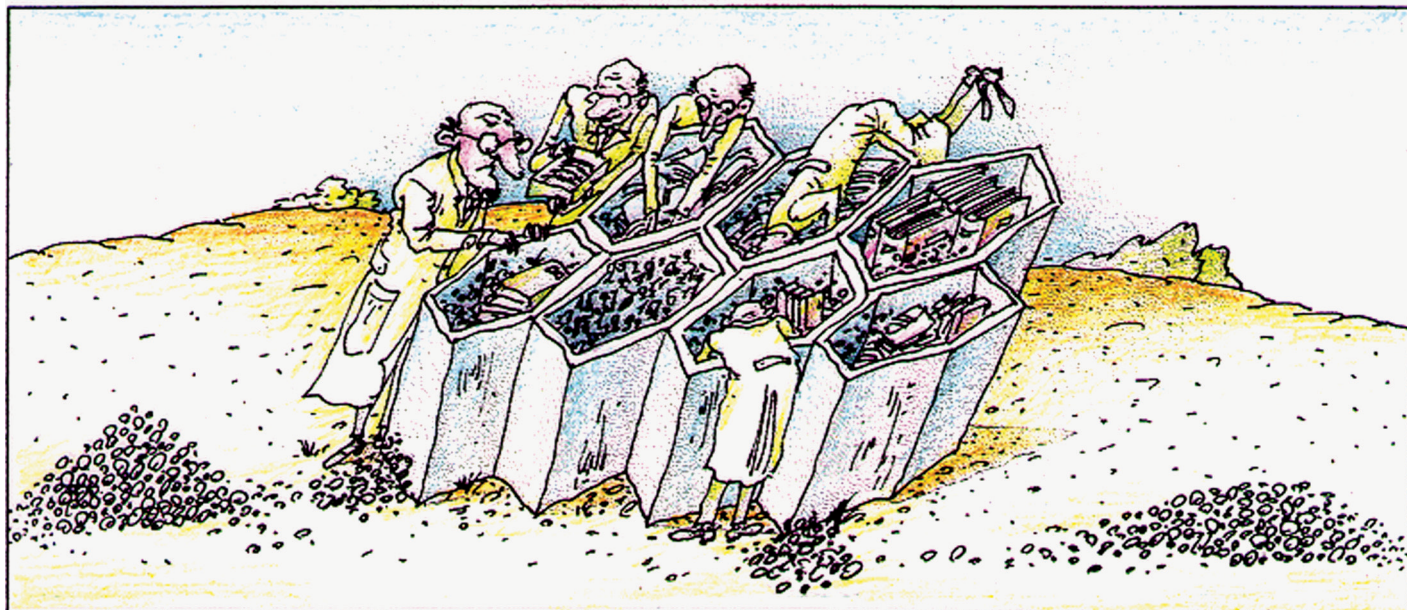


Иллюстрация В.Иванюка

41(1), 20(0), 10(0), 5(1), 2(0), 1(1). Откуда находим

$$1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 = 83.$$

Число представлено в виде суммы степеней двойки. Такая запись называется *двоичной*, правда, как и в привычной десятичной записи, ее принято начинать с наивысшего разряда:

$$m = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 2 + a_0,$$

где коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ равны 0 или 1, $a_n = 1$.

Часто используют более компактную запись: $m = (a_n \dots a_2 a_1 a_0)_2$. В частности,

$$83 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = (1010011)_2.$$

Чтобы иметь право говорить о двоичной системе счисления, надо показать единственность представления любого натурального числа в таком виде. Допустим, что число m имеет два различных представления:

$$m = (a_n \dots a_1 a_0)_2 = (b_k \dots b_1 b_0)_2, \quad n \geq k,$$

тогда

$$2(a_n \cdot 2^{n-1} + \dots + a_1 - b_k \cdot 2^{k-1} - \dots - b_1) = b_0 - a_0.$$

В этом равенстве левая часть делится на 2, значит, $b_0 = a_0$. Аналогично, $b_1 = a_1$ и т.д. На k -м шаге получаем $a_n \cdot 2^{n-k} + \dots + a_{k+1} = 0$, что возможно лишь при $a_n = \dots = a_{k+1} = 0$.

Известно, что десятичная система счисления возникла в Индии примерно в V веке. А когда возникла двоичная система счисления? Точно установить дату невозможно, но уже за 4 тысячи лет до наших дней в Древнем Египте она фактически использовалась. Покажем на примере, как египетские жрецы перемножали числа.

Умножим число 213 на 37. В наших обозначениях египетская запись выглядит так:

/1	213
2	426
/4	852
8	1704
16	3408
/32	6816
вместе	7881

Поясним ее. Правый столбец содержит наибольший сомножитель и его удвоения (их получали сложением числа с самим собой); левый — числа вида 2^m , на которые производилось умножение. Таблица выписывалась до тех пор, пока в левом столбце не появлялась максимальная степень двойки, не превосходящая меньшего сомножителя: $2^5 < 37$. Затем в левом столбце отмечали наклонной черточкой те числа (степени двойки), которые в сумме дают меньший сомножитель: $37 = 32 + 4 + 1$. Складывая числа правого столбца, стоящие напротив отмеченных чисел левого, получали ответ. Итак,

$$213 \times 37 = 213 \cdot (2^5 + 2^2 + 2^0) = 6816 + 852 + 213 = 7881.$$

Способ удвоения при умножении чисел оказался столь удобным, что применялся позже в других странах, в частности на Руси. Причем у нас торговые люди пользовались им так часто, что в странах Западной Европы способ удвоения называли «русским». Вот как в одной из старинных русских рукописей вычислялось произведение 46×28 :

46	28
92	14
184	7(1)
368	3(1)
736	1

Числа левого столбца удваивались, а правого — *раздвигались*, т.е. делились на 2; так как 7 и 3 нечетные числа, то в скобках записывался остаток. Сложив числа первого столбца, стоящие против единиц второго, получали ответ. Объясняется правило просто — ведь раздвоение числа 28 равносильно его переводу в двоичную запись: $28 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2$, а поэтому $46 \cdot 28 = 46 \cdot (2^4 + 2^3 + 2^2) = 736 + 368 + 184 = 1288$.

Из всех систем счисления двоичная самая простая. При работе с числами в этой записи нужно помнить лишь, что при сложении двух единиц любого разряда получается единица следующего разряда ($1 + 1 = 10$), а умножение единиц вновь дает единицу того же разряда ($1 \cdot 1 = 1$). Несмотря на простоту действий, работать в двоичной системе счисления неудобно из-за громоздкой записи. Разделим, например, число $(100011)_2$ на $(101)_2$:

$$\begin{array}{r} 100011 \overline{)101} \\ \underline{101} \\ 111 \\ \underline{101} \\ 101 \\ \underline{101} \\ 000 \end{array}$$

Тот же пример в десятичной системе выглядит значительно короче ($35 : 5 = 7$). Естественно, двоичная запись чисел по этой причине не могла конкурировать с десятичной. Но для электронных вычислительных машин, благодаря их быстродействию и огромной памяти, этот недостаток — не помеха. А поскольку все они работают на элементах, находящихся лишь в двух устойчивых состояниях (ток пропускается или нет), то для них двоичная система счисления оказалась наиболее удобной. Применяется она и в других приборах, в которых сигнал либо поступает, либо не поступает, например в телеграфии.

В практической деятельности к двоичной системе счисления почти не обращаются, но ее используют в теоретических вопросах и при решении различных задач. Приведем два примера.

Задача 1 (выбирание камней). *Имеются три кучки камней с произвольным числом камней в каждой. Два игрока поочередно забирают из любой кучки произвольное число камней. Выигрывает тот, кто забирает камни последним.*

Американский математик Ч.Бутон назвал (1901 г.) эту игру «ним» (от устаревшей формы английского глагола *nim* – «брать») и описал алгоритм выигрыша в этой игре. Разберем его для первого игрока (начинающего игру). Сначала рассмотрим случай, когда в двух кучках одинаковое число камней. Первым ходом игрок не трогает эти кучки, а забирает все камни из третьей. Далее при любом ходе второго игрока первый уравнивает число камней в двух оставшихся кучках и выигрывает.

Чтобы дальнейшие рассуждения были более прозрачными, запишем числа a, b, c , выражающие количество камней в кучках, в двоичной системе счисления. Будем считать, что двоичные записи чисел a, b, c имеют одинаковое количество разрядов. Если это не так, то припишем нули в недостающих разрядах. Итак,

$$a = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_2, \quad b = (b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0)_2, \\ c = (c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0)_2.$$

Найдем суммы цифр, стоящих в одинаковых разрядах:

$$S_n = a_n + b_n + c_n, \dots, S_1 = a_1 + b_1 + c_1, \\ S_0 = a_0 + b_0 + c_0.$$

В рассмотренном нами случае после каждого хода первого игрока все суммы S_i оказываются равными 0 или 2, т.е. четными. А поскольку выигрыш соответствует значениям $S_n = \dots = S_1 = S_0 = 0$, то стратегия выигрыша первого игрока следующая: после каждого своего хода он оставляет в кучках такое число камней, чтобы все S_i были четными. Для двух кучек это сделать легко, а как обстоит дело с тремя кучками?

Очевидно, любой ход второго игрока в ситуации, когда все S_i четные, меняет четность одной или нескольких сумм S_i . Покажем, что первый игрок может сделать такой следующий ход, в результате которого все S_i снова станут четными. Пусть k – наибольший из номеров, для которых суммы S_i нечетны. В сумме $S_k = a_k + b_k + c_k$ одно из слагаемых либо все три равны 1. Предположим, что $a_k = 1$. Будем выбирать камни из первой кучки (содержащей a камней). Делается это следующим образом: рассматриваются лишь те a_i , для которых суммы S_i нечетны; если $a_i = 1$, то она заменяется нулем, в противном случае – единицей. В результате все S_i станут четными. Так как в наибольшем из измененных разрядов вместо $a_k = 1$ появится 0, то полученное число меньше исходного. Разность между этими числами указывает, какое количество камней нужно взять из данной кучки. Например, в кучках 58, 42 и 13 камней. Так как

$$58 = (111010)_2, \\ 42 = (101010)_2, \\ 13 = (001101)_2,$$

то нечетны суммы S_4, S_3, S_2, S_0 . Поэтому первое число 58 надо заменить числом $(100111)_2 = 39$. Таким образом, из первой кучки выбирается 19 камней.

Очевидно, алгоритм выигрыша не изменится, если

вместо трех кучек рассмотреть произвольное их число.

Задача 2 (система разновесов). *Укажите наименьшее число гирь, с помощью которых можно уравновесить любую целую массу p от 1 до N граммов при условии, что груз и гири кладутся на разные чаши весов.*

Ясно, что гири в 1 г и 2 г необходимы; ими можно взвесить груз, не превосходящий 3 г, но уже для следующей массы придется брать новую гирю, масса которой не может превышать 4 г. Выгодно взять именно четырехграммовую гирю: вместе с ней удастся уравновесить все целые массы, меньшие 8 г. Легко сообразить, что если $2^{n-1} \leq N < 2^n$, то потребуется n гирь массами $1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}$ граммов. Докажем это утверждение индукцией по n . При $n = 1$ оно очевидно; предположим его верность при $n = m$: все грузы p , меньшие 2^m , можно взвесить m гирями в $1, 2, 2^2, \dots, 2^{m-1}$ граммов. Рассмотрим груз массой $p < 2^{m+1}$. Если при этом $p < 2^m$, то достаточно m гирь. В случае $2^m \leq p < 2^{m+1}$ груз массой $p - 2^m$ снова меньше 2^m , значит, для его взвешивания хватит m гирь, а для груза в p граммов остается добавить гирю массой 2^m граммов. Утверждение доказано.

Какие гири конкретно кладутся на чашу весов для уравновешивания груза $p \leq N$, определяется ненулевыми коэффициентами записи числа p в двоичной системе счисления.

Эта задача для отдельных фиксированных значений N стала популярной после того, как появилась в книге французского математика и поэта Баше де Мезириака «Приятные и занимательные задачи» (1612 г.). На практике же при взвешивании на рычажных весах продавец часто кладет гири на обе чаши весов. В такой более естественной постановке задача впервые появилась еще раньше в «Книге абака» (1202 г.) итальянского математика Леонардо Пизанского. При ее решении Леонардо исходил из того, что любое целое число представимо в виде суммы или разности степеней тройки. Иными словами, он фактически записывал число в виде

$$N = b_{n-1} \cdot 3^{n-1} + \dots + b_2 \cdot 3^2 + b_1 \cdot 3 + b_0.$$

Только здесь, в отличие от записи в троичной системе счисления, коэффициенты принимают значения не 0, 1, 2, а 0, 1, –1. Связь между этими записями устанавливается легко. Если в троичной записи числа есть слагаемое $2 \cdot 3^m$, то, представив его в виде $(3 - 1) \cdot 3^m = 3^{m+1} - 3^m$, придем к записи, в которой коэффициент 2 заменен на –1, а коэффициент следующего разряда увеличен на 1. Слагаемое -3^m появляется тогда, когда гиря массой 3^m положена на ту же чашу весов, на которой находится груз. Наибольшим числом, записываемым таким образом, является сумма $1 + 3 + \dots + 3^{n-1} = (3^n - 1)/2$. Поэтому для уравновешивания всех целых масс, не превосходящих $(3^n - 1)/2$, достаточно n гирь $1, 3, \dots, 3^{n-1}$.