

журнал[©] Квант июль 2007 №4 АВГУСТ 2007

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна) ИФТТ РАН

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ
РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Ю.А.Осипьян

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.С.Кротов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,
А.Н.Виленкин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин,
Н.П.Долбилин (*заместитель главного редактора*), В.Н.Дубровский,
А.А.Егоров, А.В.Жуков,
А.Р.Зильберман, В.В.Кведер (*заместитель председателя редколлегии*), П.А.Кожевников,
В.В.Козлов (*заместитель председателя редколлегии*), С.П.Коновалов, А.А.Леонович,
Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, Н.Х.Розов,
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,
А.И.Черноуцан (*заместитель главного редактора*)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков,
Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллиончиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро  Квантум

© 2007, Президиум РАН,
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 Лазер – замечательное достижение XX века (продолжение).
П.Крюков
8 Гипотеза Каталана. *В.Сендеров, Б.Френкин*
11 Скидка 15 процентов. *А.Минеев*

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 15 Ян Гевелий. *А.Васильев*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 17 Задачи М2051–М2055, Ф2058–Ф2062
18 Решения задач М2026–М2035, Ф2043–Ф2047

К М Ш

- 26 Задачи
27 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»
27 Победители конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8»
2006/07 учебного года
28 Только ноль и единица. *Л.Шибасов, З.Шибасова*

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 31 Об одной замечательной прямой в треугольнике.
А.Карлюченко, Г.Филипповский

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Экстремальные выпуклые фигуры

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 35 Квантовые чудеса. *М.Каганов*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 39 Пропорциональность дифференциалов в физических
задачах. *К.Рыб*
42 Множество значений функции. *С.Лавренов*

ОЛИМПИАДЫ

- 47 Задачи LXX Московской математической олимпиады
49 Избранные задачи Московской физической олимпиады
52 Геометрические олимпиады имени И.Ф.Шарыгина
53 Международный турнир «Компьютерная физика»

- 56 Ответы, указания, решения

Вниманию наших читателей (7)

Нам пишут (16, 56)

НА ОБЛОЖКЕ

- I КВАНТ + DVD
II Коллекция головоломок
III Шахматная страничка
IV Физики и математики на монетах мира

Лазер — замечательное достижение XX века

П. КРЮКОВ

Высокие мощности

Для увеличения энергии в импульсе и, соответственно, мощности требуется усиление. Лазер-усилитель — это, попросту говоря, лазер без резонатора. Усиление получается при пропускании лазерного излучения через активную среду либо путем последовательных проходов через несколько слоев активной среды (многокаскадное усиление), либо путем нескольких проходов через один и тот же слой (многопроходное усиление). Импульс, предназначенный для усиления, вырезается из непрерывной последовательности УКИ с помощью *электрооптического затвора*.

Однако усиление лазерного излучения в виде УКИ связано с принципиальной трудностью. Из-за малой длительности импульса мощность при сравнительно малой энергии импульса достигает такого уровня, при котором происходит повреждение материала активной среды собственным усиленным излучением. Так, при длительности импульса меньше 100 фс энергии импульса около 10^{-3} Дж соответствует мощность свыше 10^{10} Вт. При такой мощности эффект самофокусировки играет вредную роль. Излучение фокусируется внутри материала и вызывает его повреждение.

Для преодоления этого препятствия был изобретен замечательный способ, сущность которого заключается в следующем. Длительность импульса перед его усилением увеличивается во много раз (импульс «растягивается»). При этом мощность уменьшается во столько же раз. После этого «растянутый» импульс можно усиливать до уровня энергии, большего во столько же раз. Затем такой «растянутый» и усиленный импульс снова «сжимается» до первоначальной длительности. В результате мощность усиленного импульса соответственно возрастает.

Конкретно это делается следующим образом. Как указывалось раньше, длительность импульса увеличивается из-за дисперсии, а увеличенную таким образом длительность можно свести к первоначальному значению с помощью дисперсии противоположного знака в устройстве из двух призм. Вот такая операция растяжения и сокращения длительности и применяется в усилительных системах. При этом для повышения величины дисперсии используются не призмы, а дифракционные решетки. Они гораздо сильнее отклоняют лучи с разной длиной волны, и, соответственно, с ними

можно получить гораздо большее растяжение и последующее сжатие.

Схема экспериментальной установки, в которой используется эта техника, показана на рисунке 15. С

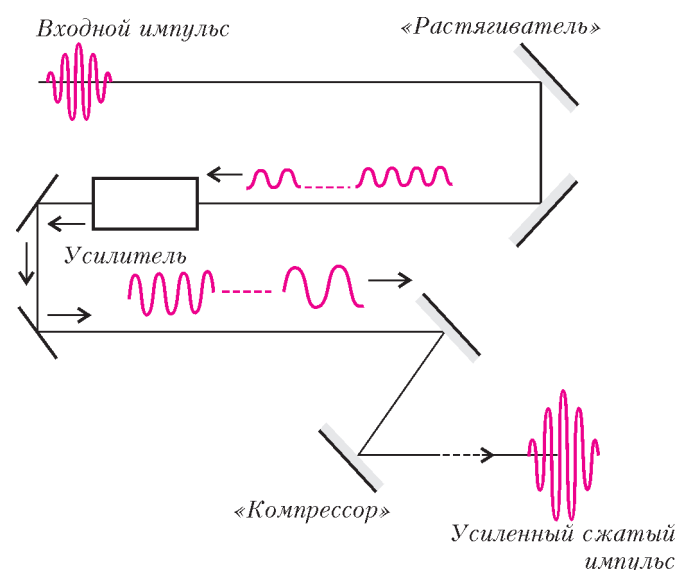


Рис.15. Схема установки для усиления УКИ

помощью пары дифракционных решеток («растягиватель») длительность фемтосекундного импульса увеличивается более чем в 10^4 раз. Энергия при этом уменьшается не более чем в 2 раза, но мощность уменьшается почти в 10^4 раз. Затем растянутый импульс направляется в усилительную систему, общий коэффициент усиления которой может достигать $10^6 - 10^7$. После усиления импульс проходит через вторую пару дифракционных решеток («компрессор»). Они настроены так, что компенсируют дисперсию первой пары, и длительность усиленного импульса снова становится близкой к первоначальной. Именно с помощью таких систем удается получать фемтосекундные импульсы с пиковыми мощностями вплоть до петаваттного уровня.

Измерение длительности УКИ

Теперь следует рассмотреть вопрос в том, как же измерять длительности столь коротких импульсов. Обычно форму импульса светового излучения регистрируют, используя фотоэлектронные приборы (фотоэлементы, фотосопротивления, фотоумножители), которые преобразуют свет в электрические сигналы,

пропорциональные интенсивности света. Затем электрические сигналы регистрируются с помощью осциллографа. Временное разрешение такой методики (порядка 1 нс) ограничено полосой пропускания электрических цепей.

Для получения лучшего в 1000 раз разрешения, нужного для измерения УКИ, используются они сами. Конкретнее, используется эффект нелинейной оптики – генерация 2-й гармоники лазерного излучения. Это явление заключается в том, что при пропускании лазерного излучения через так называемый *нелинейный кристалл* некоторая часть излучения преобразуется в излучение с длиной волны в 2 раза меньше – 2-я гармоника частоты. При этом интенсивность излучения этой гармоники пропорциональна квадрату интенсивности лазерного излучения, проходящего через кристалл.

Схема устройства для измерения длительности УКИ, основанная на генерации 2-й гармоники, представлена на рисунке 16. Основной частью является хорошо известный в оптике *интерферометр Майкельсона*.

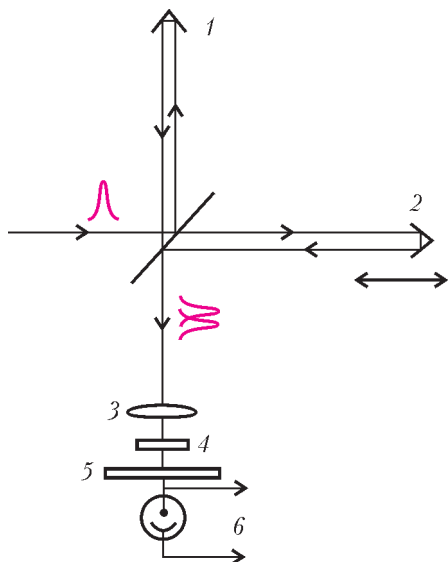


Рис.16. Схема измерения длительности УКИ: 1, 2 – отражатели (один с регулируемым перемещением); 3 – линза; 4 – нелинейный кристалл; 5 – фильтр для выделения 2-й гармоники; 6 – фотоприемник

Пучок света в виде УКИ разделяется полупрозрачным зеркалом на два равных по интенсивности пучка (плечи интерферометра). Каждый из них отражается обратно на полупрозрачное зеркало, причем один из отражателей может перемещаться с соответствующей задержкой света. После отражения от полупрозрачного зеркала пучки обоих плеч сводятся вместе (накладываются друг на друга) и могут интерферировать. Сложенные вместе пучки проходят нелинейный кристалл, где генерируется излучение 2-й гармоники, которое выделяется фильтром и регистрируется.

Посмотрим, как будет изменяться интенсивность регистрируемого сигнала при разных задержках. Пусть эта задержка больше длительности импульса. В этом случае каждый импульс отдельно генерирует излучение 2-й гармоники, и будет регистрироваться сигнал с

интенсивностью $I_{2\omega} \sim (I_{\omega}^2 + I_{\omega}^2) = 2I_{\omega}^2$, где $I_{2\omega}$ – сигнал на второй гармонике, а I_{ω} – сигнал на основной частоте. Пусть теперь задержка равна нулю, т.е. импульсы накладываются друг на друга. В этом случае происходит интерференция. При сложении амплитуд в фазе результирующая интенсивность возрастает не в 2, а 4 раза. Следовательно, сигнал второй гармоники $I_{2\omega} \sim (4I_{\omega})^2 = 16I_{\omega}^2$. При сложении амплитуд в противофазе интенсивность равна нулю. При задержке, отличной от нуля, но меньшей длительности импульса, будут складываться неравные амплитуды, и сигнал $I_{2\omega}$ будет принимать промежуточные значения между $16I_{\omega}^2$ и 0.

Зависимость сигнала 2-й гармоники от задержки одного импульса относительно другого имеет вид, показанный на рисунке 17. При задержках, больших длительности импульса, интерференция отсутствует, и наблюдается постоянный уровень сигнала.

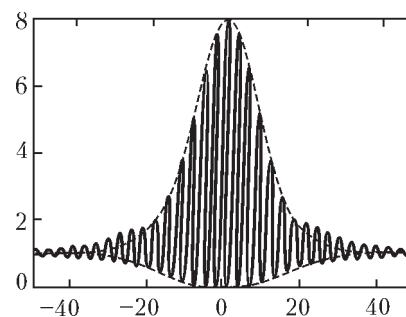


Рис.17. Автокорреляционная функция интенсивности

При полном совпадении сигнал возрастает в 8 раз, причем из-за интерференции наблюдается «изрезанность». Период интерференционной картины определяется длиной волны максимума спектра излучения. Анализ показывает, что ширина профиля зависимости интенсивности от времени задержки – эта зависимость называется *автокорреляционной функцией интенсивности* – однозначно связана с шириной профиля зависимости интенсивности в импульсе от времени (длительность импульса). С хорошей точностью можно считать, что первый профиль в 1,5 раза шире второго.

Применение лазеров фемтосекундных импульсов

Из всего разнообразия использования в науке и технике лазеров УКИ рассмотрим лишь три примера. Один – основанный на ультракороткой длительности лазерного излучения, другой – на сверхвысокой интенсивности и третий – на уникальной особенности излучения фемтосекундного лазера непрерывного действия.

1) Быстродействующая электроника

Стремление к миниатюризации и повышению быстродействия электронных схем приводит к интегральным схемам. При этом становится трудно исследовать прохождение коротких электрических сигналов по элементам схемы с помощью электронного осциллографа из-за искажений сигналов в проводах, подсоединяемых к схеме. Лазеры УКИ позволили успешно реализовать схему бесконтактного осциллографирования электрических сигналов с разрешением, лучшим чем 1 пс.

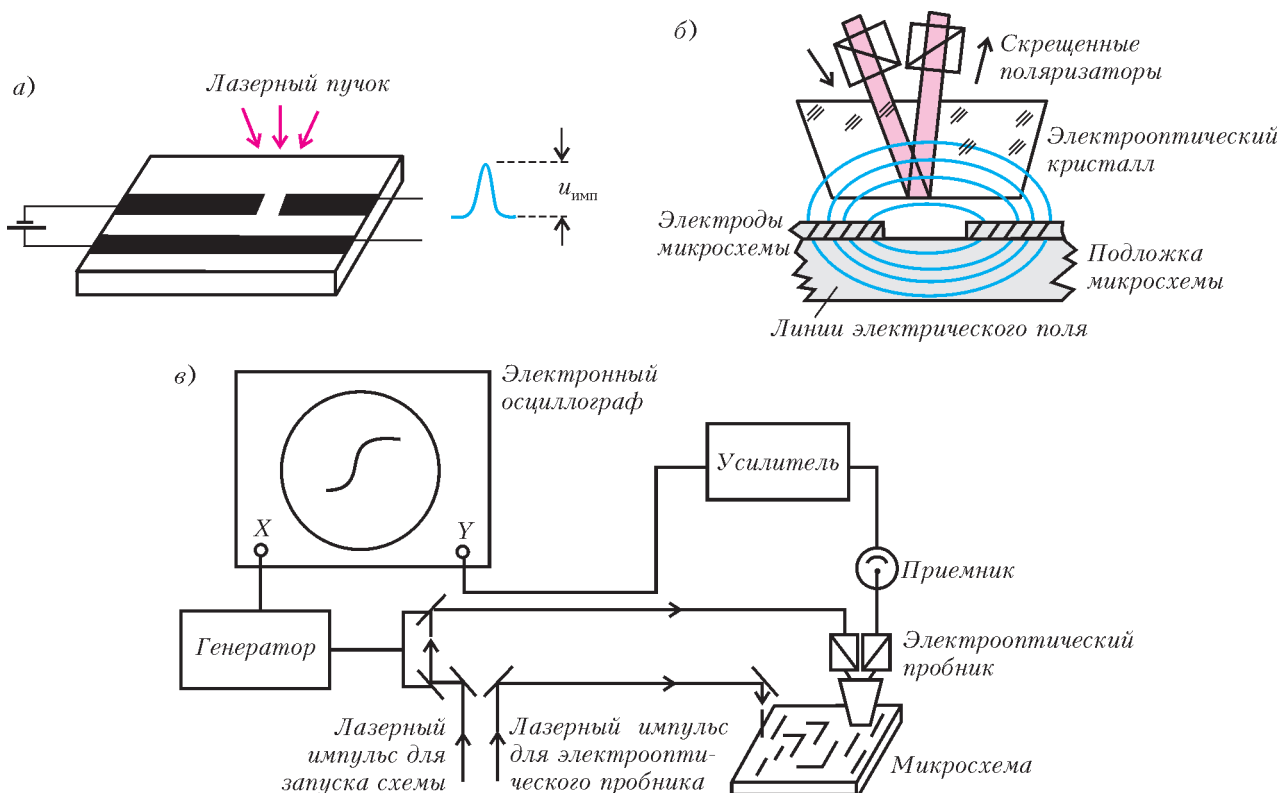


Рис. 18. Оптоэлектроника с использованием лазерных УКИ: а) оптоэлектронный ключ; б) принцип электрооптического стробирования электрического сигнала; в) оптоэлектронный осциллограф

Основная идея заключается в том, что один УКИ запускает электронную схему, а с помощью второго УКИ, задержанного на определенный интервал времени, измеряется электрический сигнал в нужной точке схемы. Существенной деталью является *оптоэлектронный ключ*, с помощью которого запускается исследуемая схема. Основой служит пластинка из полупроводника с высоким удельным сопротивлением, на которой нанесены проводящие металлические полосы – электроды (рис.18,а). Верхняя полоска имеет разрез в виде щели, которая разрывает электрическую цепь. К концам электродов можно подключить источник напряжения. При освещении полупроводника через щель лазерным излучением в виде УКИ с определенной длиной волны в поверхностном слое полупроводника за время действия облучения возникает большое число носителей тока (*электронно-дырочных пар*), и полупроводник становится проводящим. Таким образом осуществляется быстрое, равное длительности УКИ, замыкание электрической цепи. В отсутствие света происходит самопроизвольное и достаточно быстрое уничтожение носителей (рекомбинация электронов и дырок), а значит, и восстановление высокого сопротивления за время, меньшее 1 пс. Получается, что можно быстро включить и выключить напряжение, т.е. сформировать ультракороткий электрический импульс, запускающий интегральную схему.

Регистрация электрических импульсов проводится методом *электрооптического стробирования* с помощью *электрооптического пробника* (рис.18,б). Этот

пробник основан на эффекте двойного лучепреломления в электрооптическом кристалле при приложении к нему электрического поля. Если такой кристалл помещен между скрещенными поляризаторами, то пропускание света через них будет зависеть от напряженности электрического поля. При прохождении по цепи электрического импульса вокруг проводника возникает быстро изменяющееся электрическое поле. Оно проникает в близко расположенный кристалл, и по пропусканию света через скрещенные поляризаторы можно определить величину электрического поля. Если это свет в виде УКИ, то электрическое поле регистрируется лишь в момент прохождения УКИ через кристалл.

Изменяя величину задержки между запуском исследуемой электронной схемы и сигналом наведенного двойного лучепреломления, можно измерить величину электрического сигнала в зависимости от времени задержки. Таким образом получается осциллограмма электрического сигнала, распространяющегося в интегральной схеме.

На основе такого принципа был создан *стробоскопический оптоэлектронный осциллограф*. Его принципиальная схема изображена на рисунке 18,в. Использовался очень маленький электрооптический кристалл, на нижнюю грань которого нанесено диэлектрическое отражающее покрытие. Так как запуск исследуемой схемы и регистрация сигнала осуществляются одним и тем же лазерным УКИ, исключается «дрожание» сигнала относительно запуска. Это позволяет достаточно точно регистрировать электрические сигналы.

2) Генерация импульсов рентгеновского излучения аттосекундной длительности

Достигнутая длительность импульса 5 фс близка к периоду световой волны – длине волны 0,8 мкм соответствует период 2,7 фс. Чтобы получить длительность импульса излучения еще меньше, нужно, чтобы период и длина волны были короче. С помощью лазерного излучения в виде импульсов в несколько периодов и с интенсивностями, достигающими 10^{18} Вт/см², удается получать вспышки уже не оптического, а рентгеновского излучения с длинами волн до 3 нм и с длительностью до 200 ас (1 аттосекунда = 10^{-18} секунд). С этой целью лазерное излучение фокусируется в одноатомный газ (гелий или криптон), атомы которого сильно удерживают электроны. На научном языке это означает, что атомы имеют высокий потенциал ионизации (напряжение электрического поля, при котором электрон отрывается от атома).

Физическая картина взаимодействия электромагнитной волны с атомом в течение ее периода с максимальной амплитудой представлена на рисунке 19. Максимальная напряженность электрического поля световой

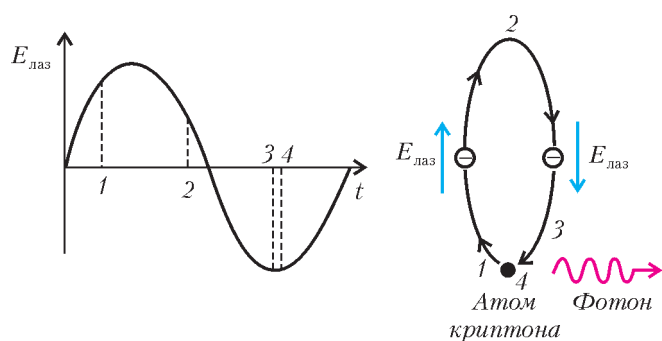


Рис.19. Взаимодействие световой волны сверхмощного излучения фемтосекундного лазера с атомом криптона

волны превышает ту, что удерживает электрон в атоме. В момент 1 электрон отрывается от атома (происходит ионизация полем световой волны) и начинает ускоряться. Но прежде чем он удалится на значительное расстояние от своего атома, превратившегося в ион, поле в волне изменяет знак на противоположный (момент 2). Теперь нарастающее электрическое поле ускоряет электрон обратно к иону, причем на электрон действуют как напряженность поля световой волны, так и кулоновское притяжение положительно заряженного иона. В результате ускоренный электрон ударяет ион и вызывает испускание фотона, подобно тому как это происходит в рентгеновской трубке. Максимальная энергия фотона равна кинетической энергии электрона в момент удара и может достигать, как показывают расчеты, 300 эВ, что соответствует длине волны фотона 3 нм. В область фокуса лазерного излучения попадает большое число атомов, поэтому происходит согласованное испускание многих фотонов. Сам процесс испускания при этом продолжается доли периода световой волны. Таким образом получается аттосекундная длительность вспышки и когерентность испускаемого излучения.

3) Прецизионное измерение частоты световой волны (оптические часы)

До сравнительно недавнего времени лазеры, генерирующие ультракороткие импульсы и имеющие широкий спектр, соответствующий длительности импульса, и лазеры, генерирующие высоко монохроматичное излучение с очень узким спектром, рассматривались как взаимно исключаящие системы. Лазеры УКИ предназначались для исследований, связанных с предельно короткими интервалами времени, а лазеры со сверхузким спектром – для прецизионного измерения текущего времени в схемах сверхточных часов. С появлением фемтосекундных лазеров, работающих в непрерывном режиме, произошло удивительное слияние этих, казалось бы, совершенно различных направлений.

От глубокой древности до наших дней человек решает проблему измерения времени. В результате создаются все более точные часы и способы измерения все более коротких интервалов времени. Для измерения текущего времени используется стабильный периодический процесс – тогда измерение времени сводится к подсчету числа периодов за измеряемый интервал. Для того чтобы определить точность хода часов, нужно сравнить их с эталоном. Это означает, что нужно пересчитать число периодов эталона и сравниваемых часов, пока не получится различие в один период. Величина, обратная числу периодов, и будет определять точность. Очевидно, что чем выше частота, тем меньший интервал времени потребуется для такого сравнения. Поэтому стремятся использовать периодический процесс не только со стабильной, но и с высокой частотой.

С давних пор в качестве стабильного периодического процесса принимается вращение Земли. Но его период слишком велик, и поэтому частота вращения Земли сопоставляется с более высокой частотой колебаний маятника – он стабилизируется по частоте вращения Земли. Затем на смену часов с маятником пришли кварцевые часы со значительно более высокой и стабильной частотой.

Успехи в спектроскопии и квантовой теории показали, что колебания в спектрах атомов и молекул могут быть использованы как стандарты частоты. В качестве такого стандарта была выбрана линия спектра (*сверхтонкая структура*) атома цезия Cs^{133} , частота которой равна 9192631770 Гц. Она принята в качестве международного эталона секунды. Эта частота попадает в диапазон, в котором измерения частоты производятся методами радиоэлектроники.

Достижения в области лазеров позволили получить чрезвычайно узкие линии – вплоть до значения $\Delta\nu/\nu \sim 10^{-18}$ на частоте 10^{15} Гц, что, в принципе, позволило бы построить сверхточные часы. Высокая оптическая частота является несомненным преимуществом. Так, сравнение двух цезиевых часов (частота порядка 10^{10} Гц) с точностью на уровне 10^{-15} требует нескольких дней, сравнение же двух оптических часов (частота порядка $10^{14} - 10^{15}$) с таким же уровнем точности занимает всего лишь несколько секунд. Однако, для того чтобы делать часы на основе лазерных

волн, необходимо измерять их частоты, т.е. сопоставлять их с эталоном секунды. Но в оптике, в отличие от радиофизики и электроники, не существует прямых методов измерения частоты, там измеряют длины волн. Казалось бы, нет проблемы определить частоту, зная длину волны, поскольку $\nu = c/\lambda$, но скорость света c сама должна быть измерена с соответствующей точностью. Проблема точного измерения времени как раз и связана со стремлением более точного измерения c .

Лазеры фемтосекундных импульсов дали замечательный способ сопоставления частоты лазерной сверхузкой линии с частотой цезиевого стандарта. Обсудим сущность этого способа на примере лазера, работающего в непрерывном режиме, т.е. испускающего периодическую последовательность импульсов (рис. 20,а). Как было показано, эта последовательность получается в результате сложения множества волн с одинаковыми интервалами частот между ними. Иными словами, спектр такого излучения представляет «гребенку» эквидистантно расположенных дискретных частот (рис.20,б). Ширина всего спектра $\Delta\nu$ определяется длительностью импульса: $\Delta\nu \sim 1/\tau$, а ин-

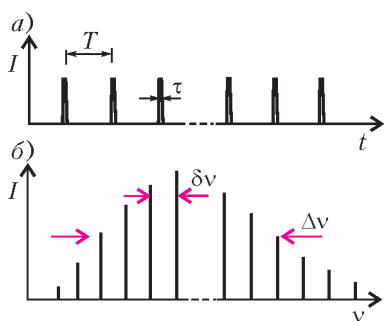


Рис.20. Временная (а) и спектральная (б) характеристики фемтосекундного лазера непрерывного действия

тервал между «зубьями» гребенки $\delta\nu$ – их периодом в последовательности: $\delta\nu = 1/T$. Как мы видели, этот период задается расстоянием между зеркалами резонатора, поэтому путем перемещения одного из зеркал можно регулировать и стабилизировать частотный интервал гребенки. Частота этого интервала лежит в области долей и единиц гигагерца, и ее можно сопоставить с частотой эталона секунды. Таким образом, излучение фемтосекундного лазера непрерывного действия дает своеобразную «линейку» оптических частот «делениями», значения которых можно точно определить по отношению к стандарту частоты.

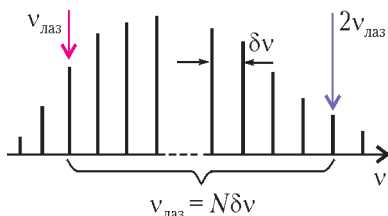


Рис.21. Схема измерения частоты лазерной линии путем пересчета делений «линейки» оптических частот

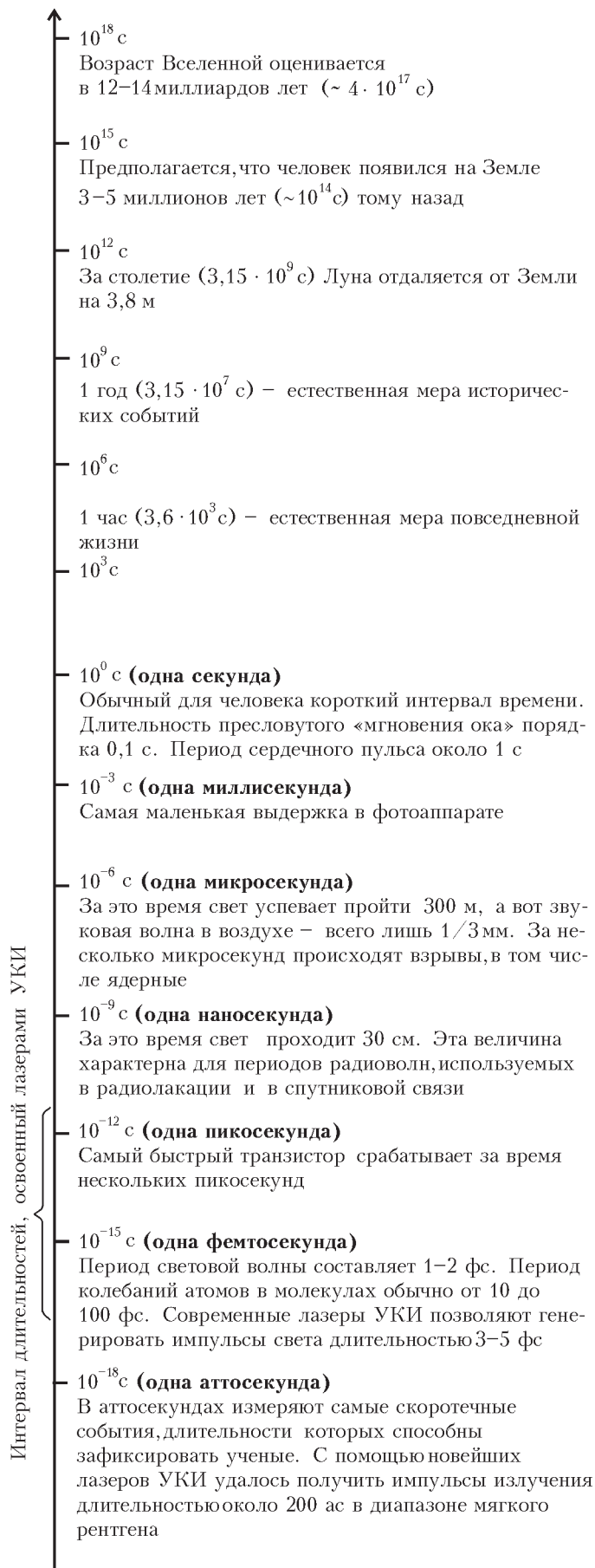


Рис.22. Шкала времен

С помощью такой линейки можно измерить частоту узкой лазерной линии $\nu_{\text{лаз}}$. Пусть эта частота попадает на красный край гребенки, а ее 2-я гармоника – на фиолетовый край, как показано на рисунке 21. Тогда при соответствующей настройке длины резонатора фемтосекундного лазера выполняется соотношение $2\nu_{\text{лаз}} - \nu_{\text{лаз}} = \nu_{\text{лаз}} = N\delta\nu$, и измерение лазерной частоты сводится к подсчету числа «зубьев» гребенки. Этот принцип, который, как было указано ранее, отмечен Нобелевской премией, лежит в основе создания сверхточных оптических часов.

Подводя итоги, отметим, что с помощью лазеров можно исследовать исключительно малые промежутки времени и измерять текущее время с чрезвычайно высокой точностью. Согласно современным воззрениям, возраст нашей Вселенной около 20 миллиардов лет. Если бы сверхточные оптические часы, которые создаются в настоящее время, были запущены в момент «рождения» Вселенной, показания их расходились бы не более чем на несколько секунд.

Отметим, что сверхточные часы (с точностью порядка $10^{-14} - 10^{-16}$) являются необходимой частью

навигационной системы ГЛОНАСС, которая позволяет определять координаты с точностью до долей метра.

На рисунке 22 показана шкала времен, на которой отмечены характерные события и указана область, измерения в которой проводятся с помощью лазеров.

Заключение

Работа по лазерам и их применениям интенсивно развивается. Важнейшей частью этой работы является стремление усовершенствовать сами лазеры, сделать их более эффективными и доступными. Это, в свою очередь, будет способствовать развитию различных научных и технических применений. В области фундаментальной науки рассматриваются такие амбициозные проекты, как обнаружение гравитационных волн или выяснение того, не изменяются ли мировые физические константы с течением времени (гипотеза Дирака).

Любознательные читатели, желающие посвятить себя науке и технике, имеют шанс принять участие в этой увлекательной и перспективной деятельности.

КВАНТ + DVD

Мы рады сообщить нашим читателям, что вышел в свет электронный архив журнала «Квант» с 1970 по 2006 год.

Материалы, опубликованные в журнале «Квант» за многие годы его существования, бесценны. И это не пустые слова. Не одно поколение «прошедших» через «Квант» молодых людей, как из числа занявших сегодня достойное место в мировой науке, так и пополнивших лучшие ряды сегодняшнего учительства, с благодарностью вспоминают журнал «Квант», который в их жизни сыграл роль путеводной звезды, определил выбор в пользу фундаментальных знаний.

Сегодня в нашем обществе явно прослеживается тенденция возрождения истинных ценностей, витает в воздухе потребность в восстановлении реальных приоритетов в образовании, пробуждается интерес к фундаментальным знаниям. Поэтому мы решили на базе громадного позитивного опыта, накопленного творческим коллективом журнала «Квант», создать адекватный современному состоянию и тенденциям развития информационных технологий научно-образовательный продукт. Мы уверены, что он, во-первых, откроет всем желающим путь к уникальному архиву журнала «Квант», а во-вторых, для кого-то сыграет решающую роль в выборе будущей профессии.

Диск можно приобрести в редакции журнала «Квант».

Наши координаты – на последней странице журнала.

Пишите, звоните. Мы вас ждем.

Гипотеза Каталана

В. СЕНДЕРОВ, Б. ФРЕНКИН

ВЫПИШЕМ ПОДРЯД НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА, ЯВЛЯЮЩИЕСЯ СТЕПЕНЯМИ (БОЛЬШИМИ ПЕРВОЙ) НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. ПОЛУЧАЕТСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ: 1, 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 81, ... Числа 8 и 9 выделены не случайно – это соседние натуральные числа. Возникает вопрос: существуют ли еще соседние степени натуральных чисел?

Впервые этот вопрос поставил бельгийский математик Э. Каталан: в 1844 году он высказал предположение, что уравнение

$$x^y - z^t = 1 \quad (1)$$

имеет единственное решение $x = 3, y = 2, z = 2, t = 3$ в натуральных числах, больших единицы.

Эта гипотеза продержалась почти 160 лет, хотя многие известные математики пытались найти подходы к ее доказательству.

В 2003 году румынский математик П. Михайлеску доказал справедливость гипотезы Каталана. Доказа-

тельство Михайлеску весьма сложно и неэлементарно и потому не может быть изложено на страницах нашего журнала. Однако сам результат связан со многими математическими фактами и задачами, которые могут быть изучены в рамках элементарной математики. Например, из доказанной Михайлеску теоремы немедленно получается ответ на вопрос пункта а) задачи М2032 («Квант» №1 за 2007 г.; решение опубликовано в этом номере журнала).

История вопроса

Еще в XIV веке Леви бен Гершон, известный также как Лео Гебракус, доказал, что уравнение $3^x - 2^y = \pm 1$ имеет единственное решение $x = 2, y = 3$ в натуральных числах, больших 1. В 1657 году Френикль де Бесси решил в натуральных числах уравнение

$$x^2 - p^y = 1, \text{ где } y > 1, \text{ а } p - \text{ простое число.}$$

В 1738 году Л. Эйлер доказал, что уравнение

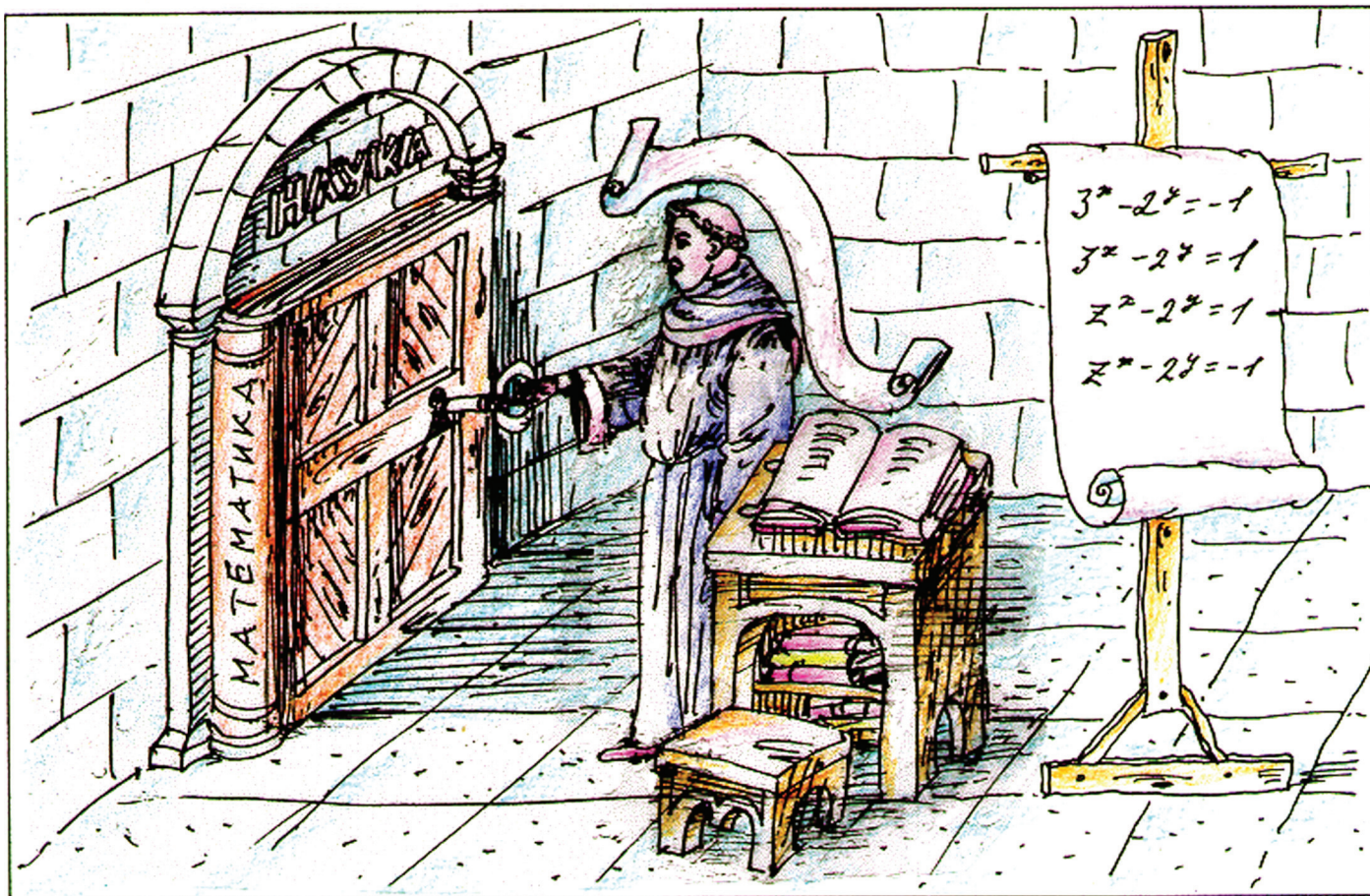


Иллюстрация В. Иванюка

$x^3 + 1 = y^2$ имеет единственное решение $(2; 3)$ в натуральных числах (о решении этого уравнения и его приложениях см. в решении задачи M2025 в третьем номере нашего журнала за 2007 г.).

В 1850 году В.А.Лебег доказал неразрешимость уравнения $x^y - z^2 = 1$ в целых числах, больших единицы, при условии $y \neq 3$. А в 1921 году Т.Нагель полностью исследовал уравнения $x^3 - z^t = 1$ и $x^y - z^3 = 1$ при $y \neq 2$.

В результате были изучены три случая общего уравнения Каталана (1) при конкретных значениях показателей:

- 1) $x^3 - z^t = 1$,
- 2) $x^y - z^3 = 1$,
- 3) $x^y - z^2 = 1$.

Из них наиболее важным оказался последний: при решении общей проблемы особую роль играет ситуация, когда один из показателей четен.

Заметим еще, что полное рассмотрение третьего случая можно провести с помощью так называемых *целых гауссовых чисел*. Достаточная для этого информация содержится в статье В.Сендерова и А.Спивака «Суммы квадратов и целые гауссовы числа» («Квант» №3 за 1999 г.). Впрочем, эта задача далеко не проста.

Намного сложнее предыдущих оказалась ситуация при четных y . Для уравнения $x^4 - z^t = 1$ задача была решена С.Сельбергом в 1932 году, а окончательное решение уравнения $x^2 - z^t = 1$ было получено лишь в 1960 году китайским математиком Ко Чао.

Далее мы рассмотрим некоторые частные случаи уравнения Каталана (в основном когда оба показателя степени нечетны). Внимательный читатель может заметить, что на математических олимпиадах иногда встречаются задачи, являющиеся частными случаями уравнения Каталана, так что знакомство с элементарными методами их решения может и в этой ситуации оказаться полезным. Пока же попробуйте решить следующие упражнения.

Упражнения

1. Решите в целых числах, больших чем 1, уравнения:

- а) $3^x - 2^y = -1$,
- б) $3^x - 2^y = 1$,
- в) $z^x - 2^y = 1$,
- г) $z^x - 2^y = -1$.

2. Найдите все тройки (a, b, y) , где $a, y \in \mathbf{N}$, a, b – простое число, такие, что $a^2 - b^y = 1$.

Некоторые предварительные результаты

Для полного доказательства гипотезы Каталана достаточно доказать ее для уравнения

$$x^p - y^q = 1, \quad (2)$$

где оба натуральных числа x и y больше 1, а p и q – различные простые числа.

Упражнение 3. а) Докажите это.

б*) Пусть $x^y - z^t = 1$, где $x, z \in \mathbf{N}$, $y, t \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, y, t нечетны. Докажите, что числа x и z составные.

Напомним некоторые обозначения. Через (a, b) мы будем обозначать наибольший общий делитель натуральных чисел a и b . Запись же $a|b$ означает, что a является делителем b (читается: a делит b).

Нам понадобится следующее утверждение.

Если x и y – взаимно простые натуральные числа, то

а) $\left(\frac{x^n + y^n}{x + y}, x + y \right) | n$ при любом нечетном натуральном n ;

б) $\left(\frac{x^n - y^n}{x - y}, x - y \right) | n$ при любом натуральном n и $x > y$.

Упражнение 4. Докажите это.

Это простое утверждение позволяет разбить множество всех четверок, удовлетворяющих уравнению (2), на две группы.

Случай I. Если $\left(p, \frac{x^p - 1}{x - 1} \right) = 1$, то

$$x - 1 = r^q, \quad \frac{x^p - 1}{x - 1} = s^q, \quad y = rs,$$

где r и s – некоторые натуральные числа.

Случай II. Если $\left(p, \frac{x^p - 1}{x - 1} \right) = p$, то

$$x - 1 = p^{q-1} a^q, \quad \frac{x^p - 1}{x - 1} = p v^q, \quad y = p a v,$$

где a, v – некоторые натуральные числа.

Упражнение 5. Докажите эти равенства.

В случае нечетного q аналогичные равенства можно получить, рассматривая выражение $\frac{y^q + 1}{y + 1}$.

Упражнения

6. Решите уравнения:

- а) $3^x = y^z + 1$,
- б) $3^x = y^z - 1$,

где $x, y, z \in \mathbf{N}$, $z > 1$.

7. а) Решите уравнение $(x + 1)^y + 1 = x^z$, где $x, y, z \in \mathbf{N}$, $y > 1$.

б) Решите уравнение $(x + 1)^y = 1 + x^z$, где $x, y, z \in \mathbf{N}$, $y > 1$.

в) (М.Хампел, А.Шинцель) Докажите гипотезу Каталана для случая, когда основания степеней различаются на 1.

Теорема Касселса–Нагеля

Фундаментальный прорыв в доказательстве гипотезы Каталана произошел в середине двадцатого века, спустя более чем столетие со времени постановки задачи: Касселс полностью доказал ее в случае I. Именно, для нечетных показателей Касселс доказал следующее утверждение.

Теорема. Пусть p и q – простые числа; $p > q \geq 2$; $a^p - b^q = \pm 1$, где a и b – целые числа, большие чем 1. Тогда a делится на q , b делится на p .

Случай $q = 2$ относится к уравнению $a^p - b^q = -1$:

когда формулировалась и доказывалась теорема, неразрешимость уравнения $a^p - b^2 = 1$ была уже окончательно установлена. При этом утверждение $q|a$ было доказано в работе 1953 года, а гораздо более сложное $p|b$ – семь лет спустя. Для случая $q = 2$ теорему доказал Т.Нагель в работах 1921 и 1934 годов.

Упражнение 8. Выведите из теоремы Касселса невозможность случая I.

Итак, если (x, y, p, q) – решение уравнения (2), p, q – нечетные простые числа, то справедливы равенства

$$\begin{aligned} x - 1 &= p^{q-1}a^q \text{ и } \frac{x^p - 1}{x - 1} = pv^q, \quad y = pav, \\ y + 1 &= q^{p-1}b^p \text{ и } \frac{y^q + 1}{y + 1} = qu^p, \quad x = qbu \end{aligned} \quad (3)$$

при некоторых натуральных a, v, b, u .

Заметим, что теорема Касселса, наряду с некоторыми более ранними результатами, позволяла уже утверждать, что гипотеза Каталана может оказаться неверной лишь при весьма больших основаниях степеней.

Упражнение 9* (А.Роткевич). Пусть $x, y \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$; $z, t \in \mathbf{P} \setminus \{2\}$; $x^z - y^t = 1$; $(x, y, z, t) \neq (3, 2, 2, 3)$. Тогда $x, y > 10^6$. Докажите это

Таким образом, теорема Касселса оставляла проблему открытой лишь для чисел $x^z > (10^6)^5$, $y^t > (10^6)^5$. Заметим, что еще недавно было весьма сложно даже с помощью компьютеров оперировать числами, порядок которых превосходит 2^{32} .

Опираясь на равенства (3) и используя современные мощные алгебраические и аналитические методы, Михайлеску и получил свое замечательное доказательство.

О задаче M2032

Утверждение пункта а) задачи M2032 представляет собой ослабленный вариант гипотезы Каталана. Одним из таких ослаблений индуцировано и утверждение пункта б).

В 1956 году в курсе теории чисел В.Ж.Левека отмечалось: «Не доказано даже, что три последовательных целых числа не могут быть степенями...» В 1960 году в статье выдающегося польского математика В.Серпинского о нерешенных проблемах арифметики был сформулирован следующий вопрос: «Существуют ли три последовательных натуральных числа, каждое из которых является степенью натурального числа с натуральным показателем, большим чем 1?» Ответу на этот вопрос мы предпослели несколько элементарных утверждений о тройках $(n, n + 1, n + 2)$ натуральных чисел.

Правильной степенью называют число вида a^b , где $a, b \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$.

Упражнения

10. Пусть $n, n + 2$ – правильные степени. Докажите, что $(n, n + 2) = 1$.

11. Пусть $(2k)^2 - z^m = 1$, где $k, z, m \in \mathbf{N}$. Докажите, что $m = 1$.

12. Пусть $x^m - (2k - 1)^2 = 1$, где $x, m, k \in \mathbf{N}$. Докажите, что $m = 1$.

13. Пусть $n, n + 1, n + 2$ – правильные степени. Докажите, что

а) $n + 1 \neq t^2$,

б) $n \neq t^2$,

где $t \in \mathbf{N}$.

Вернемся к вопросу Серпинского. Отрицательный ответ на него дал в 1961 году польский математик А.Маковский. Приведем его доказательство. Без потери общности можно считать, что показатели степеней, упомянутые в задаче, – простые числа. Покажем, что система уравнений

$$\begin{cases} x^p - y^q = 1, \\ y^q - z^r = 1 \end{cases}$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, z и простых числах p, q, r .

Пусть x, y, z, p, q, r удовлетворяют этой системе. По теореме Касселса имеем $q|x, q|z$. Отсюда $q|x^p - z^r = 2$, и $q = 2$. Первое уравнение принимает вид $x^p = y^2 + 1$. Но это уравнение, как показал Лебег, не имеет целочисленных решений с положительным y . Отсюда сразу вытекает ответ на вопрос Серпинского.

Заметим, что провести доказательство можно и без использования результата Лебега–Нагеля: нечетность q и r сразу следует из упражнения 13, а $q|x, q|z$ сразу приводят к противоречию с упражнением 10.

Заметим также, что *две* правильные степени в тройку $(n, n + 1, n + 2)$ входить все-таки могут: $(5^2, 26, 3^3)$. Авторам неизвестно, существуют ли другие тройки с этим свойством. Во всяком случае, при $n \leq 2147483645$ таких троек нет.

Об антипростых числах

Напоследок коснемся антипростых чисел – естественного обобщения фигурирующих в проблеме Каталана правильных степеней. Мы называем натуральное число *антипростым*, если каждый его простой множитель входит в разложение с показателем, большим 1. Легко видеть, что в натуральном ряду не могут идти подряд четыре антипростых числа.

Упражнение 14. Докажите это.

В решении задачи M2032 мы рассматривали тройки $(n - 1, n, n + 1)$ натуральных чисел, в каждой из которых есть два антипростых числа. Мы показали, что среди этих троек бесконечно много таких, в которых $n - 1$ и $n + 1$ – антипростые числа, и бесконечно много таких, в которых число n – одно из антипростых. Могут ли все три числа $n - 1, n, n + 1$ быть антипростыми? Ответ авторам неизвестен. Во всяком случае, среди чисел до 2000000 таких троек нет.

Скидка 15 процентов

А.МИНЕЕВ

В ПОВЕСТИ Н.НОСОВА «ВЕСЕЛАЯ СЕМЕЙКА» есть все от хорошего детектива – интрига, динамичный сюжет, жертвы, момент отчаяния и, наконец, счастливый финал. Как вы, наверное, помните, речь в ней идет о двух школьниках, Коле и Мише, которые задумали построить инкубатор и вывести цыплят из куриных яиц, и о том, что же из этого вышло.

Эта повесть для младшего школьного возраста оказалась любопытной тем, что в ней *детально* описаны все тонкости процесса «высиживания» (так в жизни) или «инкубации» (так в повести) цыплят из яиц. Данных, приведенных в книге, вполне достаточно, чтобы сформулировать и решить ряд интересных физических задач и, кроме того, сделать несколько обобщений и попытаться объяснить некий возникающий парадокс.

Чтобы напрасно не мучить читателя, сформулируем один из этих парадоксов сразу. Дело в том, что в течение периода инкубации яйцо теряет 15% своей массы. Казалось бы, ну и что? Оказывается, эта величина относительной потери массы, 15%, одинакова для яиц *всех* живущих на Земле птиц – как для куриного яйца массой 60 грамм, так и для яйца колибри массой 0,2 г и даже для яйца королевского страуса массой 1,5 кг. Этот парадокс и нашел отражение в заглавии, которое сформулировано на современный «рыночный» лад – «Скидка 15 процентов».

Итак, постараемся пройти по страницам повести «Веселая семейка» с ручкой и калькулятором, делая комментарии и оценки, затем обобщим полученные результаты, а в конце нашего рассказа постараемся применить полученные знания для самой крупной птицы, которая когда-либо жила на Земле. Масса этой слоновой птицы, или эпиорниса, обитавшей в районе Мадагаскара, составляла 500 кг, ее высота достигала 3 м, а яйцо имело массу около 10 кг.

Соответствующие величины масс для ряда различных птиц приведены в таблице (эти данные заимствованы из «Новейшего справочника необходимых знаний (от альфы до омеги)»). Из повести «Веселая семейка» будем использовать некоторые цитаты в качестве эпиграфов к отдельным разделам.

Таблица

Птица	Масса птицы	Масса яйца
Слоновая птица (эпиорнис)	500 кг	10 кг
Страус	90 кг	1,5 кг
Императорский пингвин	45 кг	500 г
Лебедь-шипун	10 кг	350 г
Белый аист	3 кг	115 г
Серебристая чайка	1,5 кг	90 г
Домашняя курица	2,5 кг	60 г
Ворон	1,2 кг	20 г
Сорока	300 г	10 г
Скворец	90 г	6 г
Воробей	35 г	3 г
Красная колибри	1,6 г	0,2 г

Температура

– В инкубаторе должна быть все время одинаковая температура – тридцать девять градусов. – Почему тридцать девять? – Потому что такая температура бывает у курицы, которая сидит на яйцах.

– Разве у курицы бывает температура? – говорю я. – Температура бывает у человека, когда он болен.

А действительно, почему 39 °С? Может, у курицы в момент высиживания *повышенная* температура (как



предположил Коля в повести)? Оказывается, нет. Ведь это только у плацентарных млекопитающих (к которым принадлежим и мы) нормальная температура тела меняется в пределах 36–37 °С. У сумчатых (пример – кенгуру) она составляет 34–36 °С, у однопроходных млекопитающих (утконос) уже 30–31 °С. А вот у птиц нормальная температура тела существенно выше и составляет 39–41 °С. Таким образом, температура высиживания 39 °С является естественной температурой тела птицы.

Как создать и поддерживать постоянную температуру в инкубаторе? В повести была использована большая консервная банка с водой, которая нагревалась снизу с помощью тепла от электрической лампочки. От банки была проведена трубка к фанерной коробке с яйцами. Нагретая вода проходила по трубке и обогревала ящик. В принципе, такая конструкция может поддерживать постоянные температурные условия в течение всего периода инкубации. Но осуществимо ли это в курятнике или на вольной природе?

Нет. И в книге Носова на эту тему есть полезное рассуждение учительницы Марьи Петровны, сделанное уже после того, как эксперимент успешно закончился: «Зародыши могут выдержать довольно длительное охлаждение, – сказала Марья Петровна. – Ведь наседка не сидит все время на яйцах. Раз в день она сходит с гнезда для того, чтобы покормиться, и яйца остывают. В инкубаторах тоже остужают яйца раз в день, чтобы зародыши развивались, как в природных условиях, но гораздо опаснее их перегреть...»

Итак, наседка иногда ненадолго покидает гнездо (кураца – раз в день, грубо – на час). Кроме того, время от времени яйца нужно переворачивать. На эту тему в повести характерна следующая перепалка между Колей и Мишей: «Ты зачем инкубатор открыл? Может быть ты думаешь, что цыплята на другой день выведутся? – Ничего я не думаю, – говорю я и хочу объяснить, что яйца нужно поворачивать через каждые три часа».

Действительно, курица нагревает яйцо только с одной стороны, и чтобы перепад температур был невелик, яйцо нужно периодически поворачивать. Этот перепад должен быть примерно таким же, как за время отсутствия наседки.

Длительность высиживания, влажность и вентиляция

Градусник все время исправно показывал 39 градусов. – Хорошо идет дело! – радовался Мишка. – Если все обойдется благополучно, то через 21 день у нас будут цыплята. Целых 12 штук. Веселая будет семейка.

И действительно, время, за которое вылупляются цыплята, составляет 21 день.

Для нескольких сотен видов птиц была исследована зависимость длительности высиживания в инкубаторе $t_{\text{инк}}$ от массы яйца $M_{\text{яйца}}$, которая может быть представлена таким усредненным соотношением:

$$t_{\text{инк}} = 12 \cdot M_{\text{яйца}}^{0,22},$$

где время измеряется в сутках, а масса – в граммах.

Отметим еще некоторые условия, которые связаны с поддержанием жизнедеятельности в гнезде или инкубаторе: из яйца испаряется вода, туда поступает кислород и оттуда отводится углекислый газ. По этому поводу приведем следующие высказывания в повести:

«В инкубаторе должен быть влажный воздух, потому что если воздух будет сухой, то из яиц сквозь скорлупу будет испаряться много жидкости и зародыши могут погибнуть. Поэтому в инкубатор всегда помещают сосуды с водой»;

«Потом Мишка принес сверло и просверлил в инкубаторе несколько маленьких дырочек, чтобы углекислый газ мог выходить наружу».

Конечно, в гнезде оба эти условия выполняются, а в инкубаторе их нужно специально обеспечивать.

Куриное яйцо: исходные данные

Вспользуемся книгой «Размеры животных: почему они так важны?» (автор К. Шмидт-Нильсен) и возьмем из нее необходимые нам сведения:

- масса типичного куриного яйца составляет 60 г;
- затраты энергии на развитие цыпленка составляют 30 ккал;
- высиживание происходит в течение 21 суток в тепле при подходящей влажности и периодическом переворачивании;
- за время высиживания масса яйца уменьшается до 51 г (уменьшение на 15%), в ходе чего оно поглощает 6 л кислорода и выделяет 4,5 л двуокиси углерода и 11 л водяного пара.

Некоторые энергетические оценки

За время инкубации яйцо поглощает 6 литров кислорода, который поддерживает энергетику развития зародыша. Так как один моль любого газа при нормальных условиях занимает объем 22,4 литра, то 6 литров соответствуют 8,6 граммам кислорода. Окисление кислорода сопровождается выделением энергии – удельная энергоемкость этого процесса около 14 кДж/г, поэтому поглощение 8,6 г кислорода дает 120 кДж, или 30 ккал энергии. Последнее число совпадает с тем, которое приведено в указанной книге.

Если взять затраченную энергию (120 кДж) и поделить ее на время инкубации (21 день), то средняя мощность обменных реакций за время высиживания до появления цыпленка составит 0,07 Вт. Для птиц мощность обменных реакций P , т.е. интенсивность метаболизма, связана с их массой $M_{\text{птицы}}$ следующим образом:

$$P \approx 5 \cdot M_{\text{птицы}}^{0,75},$$

где мощность измеряется в ваттах, а масса – в килограммах. Заметим, что зависимость мощности от массы для птиц та же, что и для млекопитающих, но коэффициент перед массой здесь больше (5 – для птиц, 3 – для млекопитающих), что связано с большей температурой тела у птиц. Для только что родившегося цыпленка эта формула дает интенсивность метаболизма около 0,6 Вт. Сопоставление средней мощности метаболизма

(0,07 Вт) и мощности в конце высиживания (0,6 Вт) приводит к выводу, что в яйце в течение инкубации в среднем обменные реакции протекают почти на порядок менее интенсивно, чем в конце.

Этот парадокс может быть разрешен тем, что по мере развития зародыша интенсивность метаболизма растет. Соответствующая ориентировочная кривая приведена на рисунке 1. Для такой зависимости средняя интенсивность метаболизма за время высиживания

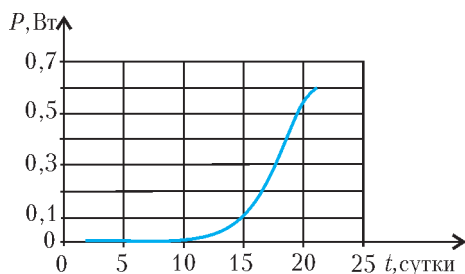


Рис.1. Зависимость интенсивности метаболизма эмбриона цыпленка от времени

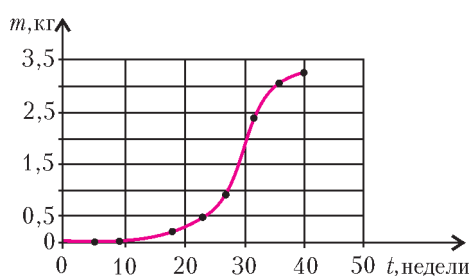


Рис.2. Зависимость массы человеческого эмбриона от времени

действительно существенно меньше максимальной. При построении кривой, изображенной на рисунке 1, были использованы интуитивные соображения о быстром (экспоненциальном) росте метаболизма в начале процесса и постепенном замедлении его к концу.

В качестве обоснования подобного типа кривых приведем вид зависимости интенсивности метаболизма от времени в случае вынашивания человеческого детеныша. Будем отталкиваться от данных по зависимости массы человеческого эмбриона от времени, изображенной на рисунке 2. Теперь перейдем от зависимости массы от времени к зависимости от времени для интенсивности метаболизма. Для этого воспользуемся уравнением, связывающим массу организма с интенсивностью метаболизма:

$$P(t) = N_c P_c + E_c \frac{dN_c}{dt}.$$

Здесь N_c – число клеток в организме, P_c – интенсивность метаболизма клетки, E_c – энергия, идущая на образование одной клетки. Масса организма просто выражается через массу одной клетки и их количество: $m = m_c N_c$. В результате появляется возможность по известной зависимости $m(t)$ получить временную зависимость для интенсивности метаболизма $P(t)$, изображенную на рисунке 3. При построении этой кривой были использованы следующие известные значения величин: $m_c = 3 \cdot 10^{-9}$ г, $E_c \approx 2 \cdot 10^{-5}$ Дж, $P_c \approx 1 \cdot 10^{-11}$ Вт.

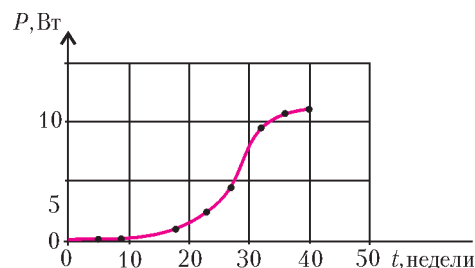


Рис.3. Зависимость интенсивности метаболизма человеческого эмбриона от времени

Как уже говорилось, яйцо за время инкубации выделяет 11 литров водяного пара. Поскольку 1 моль (т.е. 18 грамм) водяного пара при нормальных условиях занимает объем 22,4 литра, то 11 литров соответствуют 8,8 граммам. Так как масса яйца в ходе высиживания уменьшается с 60 до 51 г (на те же 9 г), то это уменьшение происходит главным образом из-за испарения воды. При удельной теплоте испарения воды около 2 кДж/г на испарение 9 г воды требуется энергия порядка 20 кДж. Эта величина существенно меньше общих затрат за время инкубации (120 кДж), и ею в первом приближении можно пренебречь.

Поры в скорлупе яйца: диффузия водяного пара

Еще раз воспользуемся данными из указанной книги о размерах животных:

- толщина скорлупы 0,35 мм;
- скорлупа имеет площадь поверхности 70 см², ее пронизывают примерно 10⁴ пор, диаметр каждой поры 17 мкм.

При температуре 39 °С давление насыщенного водяного пара близко к 55 мм рт. ст. (т.е. 0,073 атм), а давление водяного пара в гнезде, согласно справочным данным, составляет 35 мм рт. ст. Это соответствует уровню влажности порядка 60 %.

Оценим время испарения водяного пара через поры в скорлупе. Для этого воспользуемся соотношениями из статьи «Листья улыбаются» (см. «Квант» №4 за 2006 г.) для задачи Стефана:

$$t_{\text{исп}} = \frac{V}{\Gamma_{\Sigma}}, \quad \Gamma_{\Sigma} = N\Gamma_1, \quad \Gamma_1 \approx 4aD \frac{n(1-f)}{n_b}.$$

Здесь Γ_{Σ} и Γ_1 – скорости испарения, полная и сквозь одну пору. Подставив в эти соотношения объем яйца $V = 60$ см³, радиус поры $a = 0,85 \cdot 10^{-3}$ см, общее количество пор $N = 1 \cdot 10^4$, коэффициент диффузии $D = 0,22$ см²/с, концентрацию молекул воды $n_b = 3 \cdot 10^{22}$ см⁻³, концентрацию молекул водяного пара (при температуре 39 °С) $n = 2,7 \cdot 10^{18}$ см⁻³, относительную влажность $f = 0,6$, получим время испарения $t_{\text{исп}} \sim 2,6$ суток! Поскольку в действительности за 21 сутки испаряется только 15 % воды, то это означает, что водяной пар где-то существенно замедляет свое движение.

Оказывается, что поры в скорлупе, в отличие от устьиц на поверхности листа, представляют собой довольно длинные каналы, и именно в них происходит

существенное замедление выхода водяного пара. Поскольку толщина скорлупы куриного яйца 350 мкм, а диаметр поры 17 мкм, то отношение длины поры к ее диаметру составляет около 20. При распространении водяного пара по такой длинной поре потери давления Δp определяются законом Пуазейля:

$$\Delta p = \frac{32\eta lv}{d^2},$$

где η – вязкость, v – скорость движения пара, l и d – длина и диаметр поры, соответственно. Поэтому потери давления Δp прямо пропорциональны отношению l/S , где $S = \pi d^2/4$ – площадь поры, а проницаемость поры, т.е. обратная потерям давления величина пропорциональна S/l .

Длина поры в зависимости от массы яйца меняется так (по 367 видам птиц):

$$l = 5,126 \cdot 10^{-2} \cdot M_{\text{яйца}}^{0,456},$$

где длина измеряется в миллиметрах, а масса – в граммах. Суммарная площадь пор составляет

$$S_{\Sigma} = 9,2 \cdot 10^{-3} \cdot M_{\text{яйца}}^{1,236},$$

где площадь измеряется в квадратных миллиметрах, а масса – в граммах. В итоге зависимость проницаемости скорлупы δ от массы яйца $M_{\text{яйца}}$ можно выразить отношением

$$\delta \sim \frac{S_{\Sigma}}{l} \sim \frac{M_{\text{яйца}}^{1,236}}{M_{\text{яйца}}^{0,456}} \sim M_{\text{яйца}}^{0,78}.$$

Тогда за все время инкубации испаренная масса водяного пара $\Delta M_{\text{исп}}$ будет прямо пропорциональна массе яйца:

$$\Delta M_{\text{исп}} \sim \delta \cdot t_{\text{инк}} \sim M_{\text{яйца}}^{0,78} \cdot M_{\text{яйца}}^{0,22} \sim M_{\text{яйца}},$$

а отношение $\Delta M_{\text{исп}}/M_{\text{яйца}}$ окажется одинаковым для всех видов птиц!

Итак, «усушка» приводит к появлению внутри скорлупы небольшого свободного пространства. Оно получается естественным образом в ходе испарения воды через скорлупу, но оказывается важным еще по одной причине. Имея такую свободу движения, цыпленок может размахнуться (это, конечно, громко сказано), стукнуть клювом по скорлупе и выйти в мир. Значит, скорлупа должна быть достаточно прочной, чтобы устоять под действием веса птицы и дополнительных нагрузок при периодическом переворачивании яиц, но треснуть при ударе клюва тщедушного цыпленка. Подобная задача обсуждалась в «Занимательной физике» Я.И.Перельмана, где было показано, что выпуклая форма яйца позволяет выдерживать довольно большие *внешние* нагрузки. Так, скорлупа яйца страуса разрушается при внешней нагрузке около 1200 Н. В то же время даже слабый удар птенца клювом *изнутри* способен пробить эту скорлупу.

А что со слоновой птицей?

Слово «эпиорнис» означает «величайшая из птиц». Эти нелетающие птицы (рис.4) ростом более трех метров обитали на Мадагаскаре вплоть до XVII века. Огромные яйца эпиорнисов (рис.5), вмещавшие до 9



Рис.4. Эпиорнис – величайшая из птиц

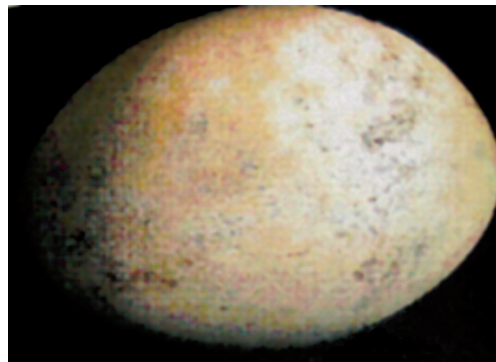


Рис.5. Яйцо эпиорниса

литров воды, жители Мадагаскара использовали в качестве сосудов. Гигантские кости эпиорнисов послужили основой сведений о мифической птице Рух, упоминаемой в сказках «Тысяча и одна ночь».

Длительность высидывания птенца эпиорниса, в соответствии с приведенной выше зависимостью ее от массы, составляет около 90 суток. Если вдуматься, это очень большая величина – целый климатический сезон слоновая птица фактически прикована к гнезду. За время высидывания масса яйца уменьшается с 10 до 8,5 кг. Средний диаметр яйца эпиорниса составляет примерно 25 см, толщина скорлупы 4–5 мм, а масса скорлупы порядка 1,5 кг. Пробить такую «броню» – занятие уже на пределе возможностей. Но это оказалось возможным – благодаря специальным желобкам, расположенным внутри при «входе» в пору.

Ян Гевелий

А. ВАСИЛЬЕВ

В РЯДУ БЛИСТАТЕЛЬНЫХ ОСНОВОПОЛОЖНИКОВ европейской астрономической школы важное место принадлежит Яну Гевелию (28.01.1611–28.01.1687), потомственному пивовару и канцлеру славного ганзейского порта Гданьск (впоследствии Данциг, а затем снова Гданьск). Еще в гимназии Ян приобрел навыки картографии и конструирования астрономических инструментов, а кругозор расширил в беседах с Пьером Гассенди, Мареном Мерсенном и Атанасием Кирхером, которых он посетил во время своего первого европейского турне. Из путешествия Ян вернулся в 1634 году с тем, чтобы унаследовать пивоварню от своего отца Авраама Гевелия и жениться на владелице двух соседних домов Катарине Ребешке. Это обстоятельство – наличие трех стоящих стена к стене домов, а тем самым, и общей крыши – сыграло решающую роль в дальнейшей судьбе молодого польского астронома.

Как известно, первые телескопы Галилея, сконструированные им еще в начале XVII века, имели в длину немногим более метра. Эти телескопы страдали хроматической аберрацией, преодолеть которую в то время можно было лишь за счет увеличения размеров подзорной трубы. Хроматическая аберрация обусловлена дисперсией света, проходящего через линзу, т.е. зависимостью показателя преломления вещества линзы от длины волны света. В результате белый свет разлагается на составляющие его цветные лучи. Коэффициент преломления синих лучей больше, чем красных, поэтому их фокус расположен ближе к задней главной точке линзы, чем фокус красных лучей. Отсюда следует, что для луча белого света единого фокусного расстояния не существует, а есть совокупность фокусных расстояний лучей всех цветов. Поэтому на экране, расположенном в области формирования изображения, вместо одной светлой точки наблюдается совокупность цветных кружков.

Свою первую обсерваторию Гевелий создал в 1641 году, использовав пространство на крыше. Через несколько лет он построил телескоп длиной около 4 метров, который увеличивал удаленные предметы более чем в 50 раз. При конструировании астрономических инструментов Гевелий опирался на глубокое понимание принципов лучепреломления в линзах. Чем более плоскими являются линзы, тем большим фокусным расстоянием они обладают. Длиннофокусные линзы дают более четкие изображения, чем короткофокусные, однако объектив и окуляр в таких телескопах нужно располагать на больших расстояниях друг от друга. Развиваясь в этом направлении, Гевелий построил вначале 20-метровую подзорную трубу, а затем и главное свое достижение – 50-метровый телескоп. Этот прибор подвешивался на высоком столбе при помощи системы канатов и блоков. Управление телескопом осуще-

ствляла команда из отставных матросов, знакомых с обслуживанием такелажа. Конструкция Гевелия – так называемый воздушный телескоп – представляла собой инструмент без трубы и без жесткой связи объектива и окуляра. Гигантский телескоп подрагивал при малейшем дуновении ветра с Балтики, деревянные опоры и пеньковые канаты прогибались и натягивались с изменением температуры и влажности. В этих условиях настройка объектива и окуляра на единую оптическую ось представляла почти непреодолимые трудности.

Тем не менее, и это признак настоящего ученого, Гевелий в совершенстве овладел своими инструментами и провел целую серию блестящих астрономических наблюдений. Кроме того, Гевелий был непревзойденным наблюдателем, невооруженным глазом наблюдая звезды седьмой величины. С помощью секстанта, сделанного им самим, Гевелий составил каталог положений 1564 звезд с точностью до угловой минуты. Эти наблюдения он провел без использования оптики, полагая, что линзы могут внести погрешности в измерения.

Первым научным трудом Гевелия была «Селенография, или описание Луны», изданная в 1647 году в Гданьске. В ней содержалось детальное описание видимой поверхности Луны. Работа, отпечатанная в собственной типографии автора, содержала 133 гравюры, изображавшие 60 участков лунной поверхности и общий вид Луны в различных фазах. Гевелий предложил названия для различных объектов на поверхности Луны, некоторые из которых сохранились до нашего времени, правильно оценил высоту лунных гор, открыл явление оптической либрации (наблюдаемые периодические маятникообразные колебания Луны относительно ее центра масс, в результате чего прямым наблюдениям доступно 0,59 всей лунной поверхности).

В дальнейшем Гевелий проводил самые разнообразные наблюдения, и ему принадлежат астрономические открытия в разных областях. Он продолжил заниматься вопросами лунного движения и оценил расстояние от Земли до Луны, период обращения Луны, период собственного вращения Солнца. Занимался наблюдениями двойных и переменных звезд, определил периоды обращения галилеевских спутников Юпитера. Гевелий открыл 4 кометы и опубликовал в 1668 году труд «Кометография», где изложил историю наблюдений всех известных в то время комет и показал, что некоторые кометы движутся по параболическим орбитам. Именно Гевелий познакомил европейцев с главным трудом Улугбека – так называемыми «Новыми астрономическими таблицами».

Гевелий был одним из наиболее уважаемых астрономов своего времени. В 1664 году его избрали членом Лондонского Королевского общества, а в 1666 году ему был

предложен пост директора вновь построенной Парижской обсерватории. Это предложение, однако, Гевелий отклонил, что привело к назначению на этот пост Джованни Доменико Кассини. Финансовую поддержку Гевелию оказывали монархи Польши (Ян III Собеский) и Франции (Людовик XIV).

В начале 1670-х годов Гевелий оказался вовлечен в жаркий диспут со знаменитыми английскими астрономами Джоном Фламстедом и Робертом Гуком, которые отстаивали необходимость использования телескопов и микрометрического оборудования для точного определения положения звезд. Эта дискуссия достигла апогея, когда Лондонское Королевское общество отправило молодого Эдмонда Галлея в Гданьск для проверки данных

Гевелия с помощью новейшего микрометрического телескопа. Галлей подтвердил все результаты польского астронома.

В 1679 году обсерватория Гевелия с уникальными астрономическими инструментами, в частности секстантом, любимым инструментом астронома, с рукописями и библиотекой сгорела. Тем не менее, Гевелий возобновил наблюдения. В 1690 году, уже после смерти мужа, его вторая жена Элизабет Гевелиус издала ставший впоследствии знаменитым звездный атлас «Уранография», основанный на каталоге Гевелия и содержавший великолепные изображения многих, в том числе и предложенных им, созвездий.

НАМ ПИШУТ

В 2007 году исполнилось 300 лет со дня рождения Леонарда Эйлера (1707–1783). Наши читатели посвятили этой дате исследования некоторых элементарных задач, которые в свое время привлекли внимание выдающегося математика.

ОКУНАЯСЬ В ГЛУБИНЫ АРИФМЕТИКИ

В 1749 году Леонард Эйлер написал своему коллеге Санкт-петербургскому академику Христиану Гольдбаху письмо, в котором признался, что попытка найти решение в целых числах по виду простой системы уравнений

$$x + y + z = u^2, \quad xy + yz + zx = v^2, \quad xyz = w^2 \quad (*)$$

привела его в отчаяние – так много труда потребовало от него это решение. Поэтому он не удивился тому, что наименьшее целочисленное решение есть

$$x = 1633780814400, \quad y = 252782198228, \quad z = 3474741058973.$$

О трудностях решения системы (*) и о том, что найденные Эйлером числа являются наименьшими натуральными числами, удовлетворяющими системе (*), сообщает также известный специалист в области элементарной теории чисел В.Серпинский.

Оказывается, и великий Эйлер, и его не критично настроенные комментаторы в данном случае ошибаются. Несложно проверить, что тройка натуральных чисел

$$x = 45, \quad y = 64, \quad z = 180$$

и, соответственно, числа

$$u = 17, \quad v = 150, \quad w = 720$$

также удовлетворяют системе (*), причем эти числа не являются столь уж огромными.

Предлагаем читателям самостоятельно убедиться в справедливости следующих утверждений.

1. Рассмотрим тройку натуральных чисел a, b, c , и пусть $A = a^2 + b^2$, $B = a^2 + b^2 + c^2$. Если число $Aa^2c^2 + B^2b^2$ является точным квадратом, то каждая из троек чисел

$$a) \quad x = A^2Ba^2, \quad y = ABa^2c^2, \quad z = AB^2b^2;$$

$$б) \quad x = ABa^2b^2, \quad y = Aa^4c^2, \quad z = Ba^2b^2c^2$$

удовлетворяет системе уравнений (*) для некоторых натуральных u, v, w .

2. Если натуральные числа x, y, z таковы, что их сумма, сумма попарных произведений и произведение являются

точными квадратами, то таким же свойством обладает тройка чисел xy, yz, zx . Это свойство позволяет конструировать новые решения системы (*) по другим найденным решениям.

Ю.Аленков, В.Кибирев

ПО СЛЕДАМ НЕОПУБЛИКОВАННОЙ ЗАДАЧИ ЭЙЛЕРА

В одной из записных книжек Леонарда Эйлера обнаружена такая задача:

Найти треугольник, в котором прямые, делящие углы пополам, выражаются рационально.

Сам классик науки приводит пример треугольника, обладающего требуемым свойством, а именно треугольник со сторонами $a = 25$, $b = 25$, $c = 14$. Об этом же треугольнике сообщает ученик Эйлера Н.Фусс, указывая еще два подходящих примера:

$$a = 975, \quad b = 975, \quad c = 546 \quad \text{и} \quad a = 1369, \quad b = 1183, \quad c = 1914.$$

Для проверки можно воспользоваться формулой

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b},$$

по которой вычисляется длина биссектрисы l_c угла, противолежащего стороне c (длины биссектрис двух других углов вычисляются аналогично).

Покажем, как «собирать» треугольники, в которых не только биссектрисы рациональны, но и другие размеры выражаются целыми числами. Для удобства треугольник с рациональными биссектрисами будем называть *эйлеровым*.

Строительным материалом у нас будут прямоугольные треугольники, длины сторон x, y, z которых выражаются формулами

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2, \quad (1)$$

где m, n – некоторые натуральные числа. В случае взаимной простоты m и n такие прямоугольные треугольники называются основными пифагоровыми треугольниками, но требование взаимной простоты для нас несущественно. В качестве важного дополнительного условия

(Продолжение см. на с. 56)