же, что $OA_0 = R\cos\angle A$. Поэтому $AH = 2R\cos\angle A$, и $\cos\angle A = \frac{1}{4}$. Точно так же доказывается, что $\cos\angle B = \frac{1}{4}$.

Окружность Эйлера

Теорема 2. *Середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности.*

Доказательство. Пусть A_0, B_0, C_0 – середины сторон треугольника, A_1, B_1, C_1 – основания его высот, A_2, B_2, C_2 – середины отрезков AH, BH, CH (рис.2). Поскольку A_0B_0, A_2B_2, A_2B_0, A_0B_2 – средние линии треугольников ABC, ABH, AHC, BHC соответственно, $A_0B_0A_2B_2$ – прямоугольник, т.е. точки A_0, B_0, A_2, B_2 лежат на окружности, диаметрами которой являются отрезки A_0A_2 и B_0B_2. Так как $\angle A_0A_1A_2 = \angle B_0B_1B_2 = 90°$, точки A_1, B_1 также лежат на этой окружности. Таким образом, окружности $A_0A_1A_2$ и $B_0B_1B_2$ совпадают. Аналогично доказывается, что окружность $C_0C_1C_2$ также совпадает с ними.

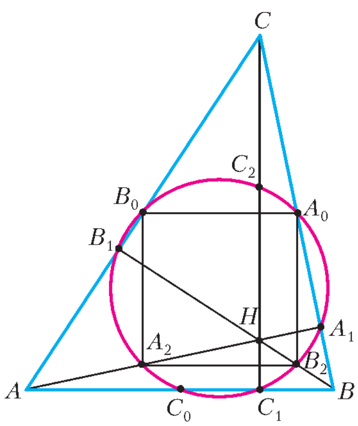


Рис. 2

Указанная окружность называется *окружностью Эйлера* или *окружностью девяти точек* треугольника.

Из теоремы 2 сразу следует, что окружность Эйлера, гомотетична описанной окружности треугольника относительно точек M и H с коэффициентами $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$ соответственно.

Задача 2. *На плоскости даны три прямые l_1, l_2, l_3, образующие треугольник, и отмечена точка O – центр описанной окружности этого треугольника. Для произвольной точки X плоскости обозначим через X_i точку, симметричную точке X относительно прямой l_i.*

а) Докажите, что для произвольной точки M прямые, соединяющие середины отрезков O_1O_2 и M_1M_2, O_2O_3 и M_2M_3, O_3O_1 и M_3M_1, пересекаются в одной точке.

б) Где может лежать эта точка пересечения?

Решение. Покажем, что эти прямые пересекаются в точке, лежащей на окружности Эйлера. Пусть ABC – треугольник, образованный прямыми l_i, H – его ортоцентр. Тогда середины отрезков O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1 совпадают с серединами отрезков AH, BH, CH (в дальнейшем будем обозначать их A_1, B_1, C_1) и, стало быть, лежат на окружности Эйлера треугольника ABC. Действительно, стороны треугольника $O_1O_2O_3$ параллельны средним линиям треугольника ABC и вдвое больше их, поскольку переводятся друг в друга гомотетией с центром в O и коэффициентом 2. Следовательно, треугольник $O_1O_2O_3$ центрально симметричен треугольнику ABC. Значит, прямая, проходящая через C и середину O_1O_2, параллельна прямой, проходящей через O_3 и середину AB, т.е. совпадает с высотой треугольника ABC, а H является центром гомотетии треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (рис.3).

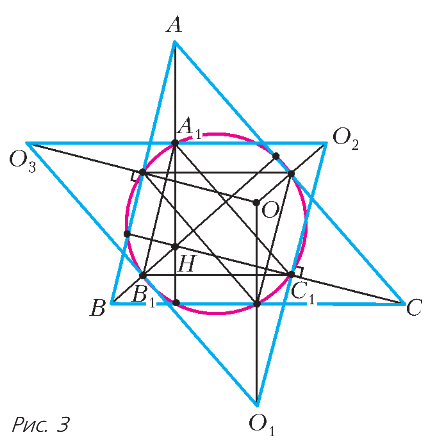


Рис. 3

Пусть, далее, M – произвольная точка, D – середина M_1M_2 (рис. 4). Тогда $\overrightarrow{DC_1} = \left(\overrightarrow{DO_1} + \overrightarrow{DO_2}\right)/2$ и, так как $\overrightarrow{M_1O_1}$ и $\overrightarrow{M_2O_2}$ получаются друг из друга поворотом вокруг точки C на два угла C, вектор $\overrightarrow{DC_1}$ образует с каждым из них угол, равный углу C. Кроме того, $\overrightarrow{M_1O_1}$ и $\overrightarrow{M_2O_2}$ переходят в $\overrightarrow{MO}$ при симметрии относительно AB и AC соответственно, поэтому $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{MO}$ образуют равные углы с биссектрисой угла C (а значит, равные углы и с биссектрисой угла C_1 в треугольнике $A_1B_1C_1$).

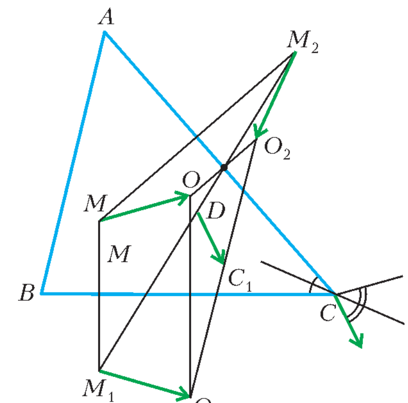


Рис. 4

Проведя аналогичные рассуждения для двух других середин, приходим к выводу, что прямые, соединяющие A_1, B_1, C_1 с серединами сторон треугольника $M_1M_2M_3$, симметричны относительно биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$ прямым, проходящим через A_1, B_1, C_1 и параллельным OM. В заключение воспользуемся следующей известной теоремой планиметрии: тройка прямых, выходящих из вершин треугольника, пересекается в одной точке, расположенной на описанной около этого треугольника окружности, тогда и только тогда, когда прямые, симметричные данным относительно биссектрис соответствующих углов, параллельны. (Несложное доказательство использует простой подсчет углов.)

Согласно этой теореме, тройка прямых в нашей задаче пересекается на описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ окружности, т.е. на окружности Эйлера исходного треугольника.

Окружность Эйлера обладает также рядом весьма красивых, в том числе и неэлементарных свойств. Например, все описанные около треугольника равносторонние гиперболы проходят через его ортоцентр, а их центры лежат на окружности Эйлера. Это позволяет мгновенно решить следующую задачу.

Задача 3. *Даны четыре точки A, B, C, D. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 – ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB, ABC. Точки A_2, B_2, C_2, D_2 – ортоцентры треугольников $B_1C_1D_1$, $C_1D_1A_1$, $D_1A_1B_1$, $A_1B_1C_1$, и т.д. Докажите, что все окружности, проходящие через середины сторон таких треугольников, пересекаются в одной точке.*

Решение. Проведя равностороннюю гиперболу через точки A, B, C, D, получим, что все указанные в задаче точки лежат на этой гиперболе, а все окружности проходят через ее центр.

Отметим, что задача допускает и элементарное решение. Найдите его самостоятельно.

Формулы Эйлера

Теорема 3. *Пусть O, I – центры описанной и вписанной окружностей треугольника, R, r – их радиусы. Тогда*

$$OI^2 = R^2 - 2Rr .$$

Это равенство называется *формулой Эйлера.*

Доказательство. Проведем прямую через I и вершину C треугольника ABC и найдем вторую точку C' пересечения этой прямой с описанной около ABC окружностью (рис.5).

Так как $C'A = C'B$, $\angle AIB = \pi - (\angle A + \angle B)/2 = (\pi + \angle C)/2$ и $\angle AC'B = \pi - \angle C$, C' – центр окружности, описанной около треугольника AIB. Значит, $IC' = C'B = 2R\sin\frac{\angle C}{2}$. С другой стороны, $IC = r\Big/\sin\frac{\angle C}{2}$. Следовательно,

$$R^2 - OI^2 = CI \cdot C'I = 2Rr .$$

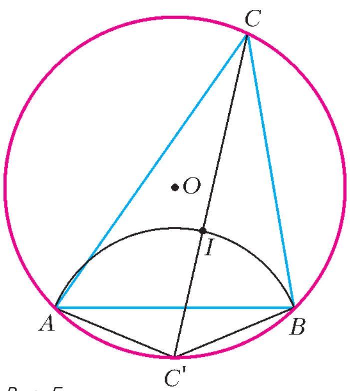


Рис. 5

Пользуясь формулой Эйлера, можно доказать **теорему Понселе** для треугольника.

Теорема 4. *Пусть дан треугольник ABC. Из произвольной точки* C' *на его описанной окружности проведем касательные к вписанной окружности треугольника и найдем вторые точки* A', B' *их пересечения с описанной окружностью. Тогда прямая* $A'B'$ *также касается вписанной окружности.*

Доказательство. Предположим противное. Например, пусть $A'B'$ не пересекает вписанную окружность треугольника ABC. Будем увеличивать угол $A'C'B'$ так, чтобы прямая $C'I$ оставалась его биссектрисой. Тогда расстояние от I до прямых $C'A'$ и $C'B'$ будет увеличиваться, а до прямой $A'B'$ – уменьшаться, и в какой-то момент окружность с центром I и радиусом $r' > r$ окажется вписанной в треугольник $A'B'C'$. Но из формулы Эйлера следует, что радиусы вписанных окружностей треугольника ABC и $A'B'C'$ равны. Противоречие. Случай, когда $A'B'$ пересекает вписанную окружность, рассматривается аналогично.

Аналоги формулы Эйлера верны и для вневписанных окружностей, касающихся одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон. Например, если окружность с центром I_c и радиусом r_c касается стороны AB и продолжений сторон AC, BC, то

$$OI_c^2 = R^2 + 2Rr_c .$$

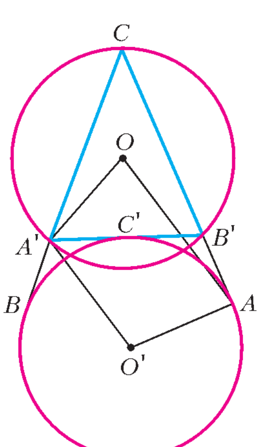


Рис. 6

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 3 (проведите его самостоятельно). Разумеется, для вневписанных окружностей верен и аналог теоремы Понселе.

Задача 4. *Две окружности радиуса 1 пересекаются в точках X, Y, расстояние между которыми также равно 1. Из точки C одной окружности проведены касательные CA, CB к другой. Прямая CB вторично пересекает первую окружность в точке* A'. *Найдите расстояние* AA'.

Решение. Пусть O – центр окружности, на которой лежит точка C, O' – центр другой окружности (рис.6). Поскольку $OO' = \sqrt{3}$, данные окружности являются описанной и вневписанной для треугольника $CA'B'$, где B' – вторая точка пересечения прямой CA с первой окружностью. Пусть прямая $A'B'$ касается второй окружности в точке C'. Тогда

$$\angle A'OA = \angle AO'C' + \frac{1}{2}\angle C'O'B =$$
$$= 2\angle ABC' + \angle C'AB = \angle CB'A' + \frac{1}{2}\angle CA'B' ,$$
$$\angle O'A'O = \angle O'A'B' + \angle B'A'O = \frac{\pi}{2} - \angle C'O'A' + \frac{\pi}{2} - \angle BCA =$$
$$= \pi - \angle BCA - \frac{1}{2}\angle CA'B' = \angle CB'A' + \frac{1}{2}\angle CA'B' .$$

Так как $O'A = OA'$, то $AO'A'O$ – равнобедренная трапеция, и $AA' = OO' = \sqrt{3}$.

Задача 5. *Пусть I – центр сферы, вписанной в тетраэдр ABCD,* A', B', C', D' *– центры сфер, описанных около тетраэдров IBCD, ICDA, IDBA, IABC соответственно. Докажите, что сфера, описанная около ABCD, целиком лежит внутри сферы, описанной около* $A'B'C'D'$.

Решение. Пусть R, r – радиусы описанной и вписанной сфер тетраэдра $ABCD$, O – центр описанной сферы $ABCD$, L – центр описанной окружности треугольника ABC, H – проекция I на плоскость ABC. Из условия следует, что точки O и D' лежат на перпендикуляре к плоскости ABC, проходящем через L, поэтому прямые OD' и IH параллельны. Кроме того, $D'A = D'I$ (как радиусы сферы, описанной около $IABC$), $OA = R$, $IH = r$.

Дважды применим теорему косинусов – к треугольникам $AD'O$ и $OD'I$:

$$R^2 = D'A^2 + D'O^2 - 2D'A \cdot D'O\cos\angle AD'O ,$$
$$OI^2 = D'I^2 + D'O^2 - 2D'I \cdot D'O\cos\angle ID'O .$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$R^2 - OI^2 = 2D'O\left(D'A\cos\angle AD'O - D'I\cos\angle ID'O\right) .$$

Следовательно, $D'O = \left(R^2 - OI^2\right)\Big/(2r)$. Аналогично доказывается, что и точки A', B', C' удалены от точки O на такое же расстояние. Таким образом, сферы $ABCD$ и $A'B'C'D'$ концентричны (т.е. их центры совпадают) и $D'O = \rho$ – радиус сферы, описанной около $A'B'C'D'$.

Докажем, что $\rho > R$. Для этого проведем плоскость DOI. Она пересекает описанную и вписанную сферы по окружностям с центрами O, I и радиусами R, r, а тетраэдр – по некоторому треугольнику. Вершина D этого треугольника лежит на большей окружности, а из двух других вершин по крайней мере одна лежит внутри этой окружности. Кроме того, меньшая окружность целиком лежит внутри этого треугольника и внутри большей окружности. Поэтому, если провести через D хорды DX_1 и DY_1 большей окружности, касающейся меньшей, то меньшая окружность окажется строго внутри треугольника DX_1Y_1. Аналогично доказательству теоремы Понселе получаем, что существует треугольник $DX'Y'$, вписанный в большую окружность и описанный около некоторой окружности с центром I и радиусом $r' > r$, для которого по формуле Эйлера $OI' = R^2 - 2Rr'$. Следовательно, $r' = \left(R^2 - OI^2\right)\Big/(2R) > r$.

Понятно также, что $\rho > r'$.

Теорема 5. *Пусть O, R – центр и радиус описанной около треугольника ABC окружности; P – произвольная точка внутри треугольника;* A_1, B_1, C_1 *– проекции P на прямые BC, CA, AB; S,* S_1 *– площади треугольников ABC и* $A_1B_1C_1$. *Тогда*

$$\frac{S_1}{S} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{OP^2}{R^2}\right).$$

Это соотношение также называется *формулой Эйлера.*

Доказательство. Пусть A_2, B_2, C_2 – вторые точки пересечения прямых AP, BP, CP с описанной окружностью треугольника ABC (рис.7).

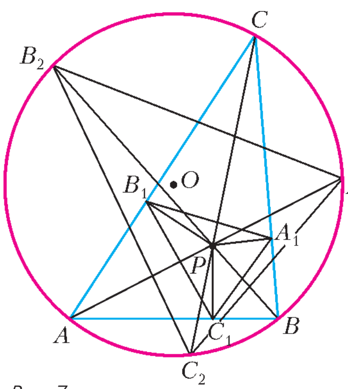


Рис. 7

Так как четырехугольник BC_1PA_1 – вписанный, $\angle PC_1A_1 = \angle CBP = \angle CC_2B_2$. Аналогично, $\angle PC_1B_1 = \angle CC_2A_2$, а значит, $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_2B_2C_2$. Таким образом, соответствующие углы треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны, т.е. эти треугольники подобны, и для их площадей S_1, S_2 выполняется равенство

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{A_1C_1 \cdot B_1C_1}{A_2C_2 \cdot B_2C_2}.$$

С другой стороны, так как треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ вписаны в одну окружность, то

$$\frac{S_2}{S} = \frac{A_2B_2 \cdot A_2C_2 \cdot B_2C_2}{AB \cdot AC \cdot BC}.$$

Кроме того, из вписанности четырехугольников BC_1PA_1, AC_1PB_1 получаем $A_1C_1 = PB\sin\angle B = PB \cdot AC/(2R)$, $B_1C_1 = PA \cdot BC/(2R)$, а из подобия треугольников PA_2B_2 и PBA –

$$\frac{A_2B_2}{AB} = \frac{PB_2}{PA}.$$

В результате имеем

$$\frac{S_1}{S} = \frac{A_1C_1}{AC}\frac{B_1C_1}{BC}\frac{A_2B_2}{AB} = \frac{PB}{2R}\frac{PA}{2R}\frac{PB_2}{PA} = \frac{PB \cdot PB_2}{4R^2} = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2}.$$

Отметим, что если считать площадь треугольника положительной или отрицательной, в зависимости от его ориентации, то формула Эйлера будет верна для любой точки плоскости. В частности, если точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC, то площадь треугольника, образованного ее проекциями, будет равна нулю, т.е. эти проекции лежат на одной прямой. Эта прямая называется *прямой Симсона.*

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Карандашам тесно

(Начало см. на 2-й с. обложки)

Эди Нагата впервые заинтересовался предметными головоломками в 1990 году и никогда не был на всемирных встречах изобретателей головоломок. Поэтому он никак не мог предполагать, что среди сотен новых игрушек его «Pencil Case» будет назван лучшей головоломкой 2001 года. У других изобретателей он видел игрушки, сделанные гораздо изящнее и красивее, труднее в решении или оригинальнее в постановке задачи. Тем не менее, победа Эди была заслуженной.

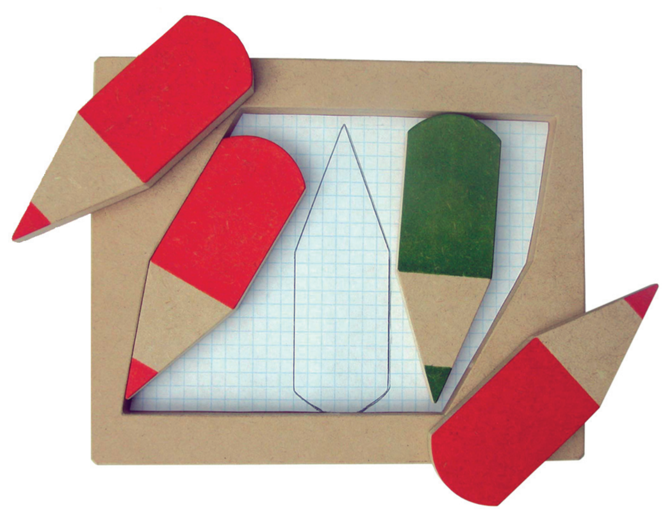
Международное жюри присудило ему главный приз за лучшее сочетание качеств, которые ценятся в этом необычном жанре изобретательства.

Эди Нагата придумал простую задачу, понятную даже ребенку, хотя решить ее может не каждый взрослый. В то же время она по силам и детям. Игрушка состоит из четырех одинаковых деталей и очень проста по устройству.

Напомним, что задача состоит в том, чтобы переложить четыре карандаша из одной коробочки в другую, приклеенную к первой донышком. Площади обеих коробочек одинаковы, а формы – разные. В этом и состоит особенность и трудность решения головоломки.

Чтобы вам было проще изготовить игрушку по фотографии в журнале, на дно второй коробочки положен листок клетчатой бумаги, повторяющий форму дна и контур карандаша (все карандаши одинаковые). По шаблону вы легко вырежете детали удобного для вас размера, а затем раскрасите их. «Pencil Case», показанный на фотографиях, сделан самим изобретателем Эди Нагата из древесно-волокнистой плиты толщиной 9 мм. Размеры его головоломки $180 \times 45 \times 20$ мм.

На первый взгляд может показаться, что при укладке в



коробочку четырех карандашей не обязательно думать, как это сделать. Достаточно разными способами случайным образом укладывать карандаши как можно теснее друг к другу. Запаситесь терпением, и задача будет решена!

За что же тогда наградили игрушку? Один из членов жюри запасся этим самым терпением и уложил карандаши в коробочку за час. Другой же обратил внимание на то, что все карандаши одинаковые и симметричные и коробочка тоже обладает симметрией (центральной). Значит, решение, скорее всего, должно быть симметричным – точнее, центрально-симметричным. Следуя этой логике, он решил задачу за... минуту.

А.Калинин

Резонанс против резонанса

В.МАЙЕР

Изучение резонанса всегда сопровождается яркими историческими примерами, показывающими, насколько опасно это явление. Почему-то чаще всего вспоминают мосты и марширующих по ним солдат: «Обычно даже небольшой отряд солдат, подходя к мосту, прекращает маршировку и идет не в ногу. Если ритм солдатских шагов совпадает с собственной частотой моста, то возможно даже его разрушение. Такой случай в действительности имел место в 1831 г. в Манчестере, когда 60 человек разрушили Браутонский подвесной мост через реку Ирвель. Аналогичный случай имел место также в 1868 г., когда в Чатаме рухнул мост на опорах при прохождении отряда Британской морской пехоты. Но наиболее трагическая катастрофа произошла в 1850 г., когда Анжерский подвесной мост был разрушен батальоном французской пехоты численностью 500 человек. Разрушенный мост увлек людей за собой в ущелье, и погибло 226 человек» (из книги Р.Бишопа «Колебания»). Кроме того, на уроках физики нередко показывают эффектные демонстрационные опыты по резонансному возбуждению колебаний. Поэтому каждый из вас хорошо знает, что такое резонанс, и твердо помнит, что при совпадении частоты внешней силы с частотой собственных колебаний системы амплитуда вынужденных колебаний возрастает настолько, что это может привести к катастрофическим последствиям. А вот мысль о том, что эффективным средством борьбы с нежелательным резонансом является само явление резонанса, многим представляется неожиданной и в значительной мере парадоксальной.

Попробуем разобраться с теорией и поставить простые опыты по резонансной борьбе с резонансом.

Резонансное демпфирование колебаний. Пусть на пружине жесткостью K подвешено тело *1* массой M, а к нему на пружине жесткостью k подвешено тело *2* меньшей массы m (рис.1). Параллельно пружинам введем координатную ось x, на которой точками O и O' обозначим положения равновесия этих тел. Допустим, что на более массивное тело действует гармоническая вынуждающая сила $\vec{f}$, проекция которой на ось x изменяется по закону $f = f_0 \sin \omega t$. Тогда оба тела совершают вынужденные колебания.

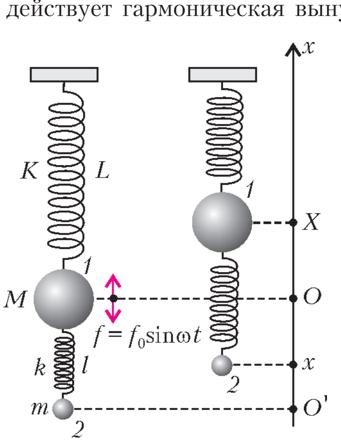


Рис. 1

Если в некоторый момент первое тело сместилось из положения равновесия на величину X, то второе тело смещается на величину x так, что длина l пружины между телами изменяется на $X - x$. При этом по закону Гука на второе тело со стороны первого действует сила $\vec{f}_{21}$, проекция которой на ось x равна $f_{21} = k(X - x)$. На первое тело со стороны верхней пружины действует сила $\vec{f}_1$, а со стороны нижней – направленная в ту же сторону сила $\vec{f}_{12}$, причем проекции этих сил равны $f_1 = -KX$ и $f_{12} = -k(X - x)$ соответственно. В результате второй закон Ньютона для первого и второго тел в проекциях на ось x можно записать следующим образом:

$$M\frac{d^2X}{dt^2} = -KX - k(X - x) + f_0 \sin \omega t,$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = k(X - x).$$

Так как оба тела совершают вынужденные колебания, т.е. колеблются с частотой вынуждающей силы ω, решение этой системы уравнений будем искать в виде

$$X = A \sin \omega t \quad \text{и} \quad x = a \sin \omega t.$$

Подставляя вторые производные этих выражений по времени

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\omega^2 A \sin \omega t \quad \text{и} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 a \sin \omega t$$

в уравнения движения, после сокращения на $\sin \omega t$ получаем

$$-M\omega^2 A + KA + k(A - a) - f_0 = 0,$$

$$-m\omega^2 a - k(A - a) = 0.$$

Из второго уравнения следует, что амплитуда колебаний первого тела $A = \left(1 - m\omega^2/k\right)a$ обращается в ноль, когда частота ω вынужденных колебаний равна частоте собственных колебаний второго тела, т.е. $\omega = \sqrt{k/m} = \omega_0$. Из первого уравнения получаем, что в случае $A = 0$ амплитуда колебаний второго тела равна $a = -f_0/k$, причем колебания этого тела происходят по гармоническому закону

$$x = -\frac{f_0}{k}\sin \omega t = \frac{f_0}{k}\sin(\omega t + \pi).$$

Таким образом, при $A = 0$, т.е. при $X = A \sin \omega t = 0$, действующая со стороны второго тела на первое сила

$$f_{12} = -k(X - x) = kx = -f_0 \sin \omega t = f_0 \sin(\omega t + \pi)$$

равна по величине и противоположна по фазе вынуждающей силе f, поэтому первое тело вообще не колеблется!

Прибор для экспериментальной проверки теории. Начнем с конструкции прибора. Оказывается, в нем вовсе не обязательно использовать обычные цилиндрические пружины. Гораздо проще построить прибор на основе плоских пружин – пружинящих полосок, работающих на изгиб. Далее, для возбуждения вынужденных колебаний предлагается воспользоваться электродвигателем с дисбалансом, подключенным к регулируемому источнику тока. Это позволит плавно менять скорость вращения вала и, следовательно, частоту вынуждающей силы, создаваемой несбалансированной нагрузкой на валу.

Внешний вид рекомендуемого прибора схематически изображен на рисунке 2. Один из концов упругой полоски *1* зажат в лапке штатива, а на другом конце расположен микроэлектродвигатель *2*. На валу двигателя находится шкив *3*, который соединен пассиком *4* со шкивом *5*. На шкиве *5* на некотором расстоянии от оси вращения закреплен дисбаланс *6*. В направляющих полоски с возможностью перемещения расположен пружинный маятник *7*, на конце которого закреплен легкий груз *8*.

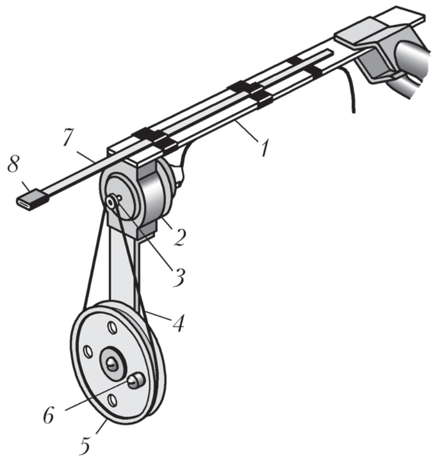


Рис. 2

Упругую полоску размером $4 \times 20 \times 300$ мм лучше всего изготовить из винипласта. Микроэлектродвигатель можно взять любого типа, лишь бы напряжение питания его было 4,5 В или 9 В. К упругой полоске микродвигатель прикрепите жестяным хомутиком или изолентой. Шкив, расположенный на валу двигателя, должен иметь диаметр порядка 10 мм. Второй шкив диаметром 50 мм закрепите на дюралевой стойке так, чтобы расстояние между осями вращения шкивов составляло примерно 75 мм. На этом шкиве на расстоянии 15 мм от его оси расположите дисбаланс, в качестве которого можно использовать винт подходящей длины с гайкой и контргайкой. Пружинный маятник размером $0{,}28 \times 5 \times 380$ мм, выполняющий роль резонансного демпфера, нетрудно изготовить из стальной пружины от механического будильника. На конце пружины расплющите отрезок дюралевой трубки так, чтобы получился грузик размером $2 \times 6 \times 6$ мм. Пружину маятника пропустите через две дюралевые направляющие, которые выполнены в форме обжимок и расположены на упругой полоске. Для питания электродвигателя можно использовать имеющийся в любом школьном кабинете физики регулируемый по напряжению источник постоянного тока.

Экспериментальное исследование. Упругую полоску с микроэлектродвигателем закрепите в лапке штатива так, чтобы длина ее рабочей части составляла примерно 210 мм. Длину демпфера сделайте минимальной. Двигатель подключите к регулируемому по напряжению источнику.

Постепенно увеличивайте напряжение питания. Обратите внимание на то, что плохо сбалансированный двигатель начинает заметно колебаться. Продолжая повышать напряжение питания, добейтесь резонанса. При этом амплитуда колебаний двигателя на упругом основании резко возрастает так, что размах колебаний составляет около 40 мм (рис.3,*а*).

Затем плавно выдвигайте демпфер до длины 150–160 мм. Вы увидите, что колебания двигателя практически прекращаются, а размах колебаний демпфера достигает 100–120 мм (рис.3,*б*).

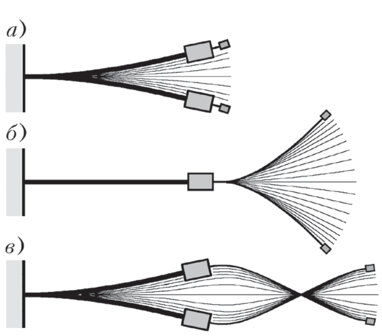


Рис. 3

Дальнейшее выдвижение демпфера до длины 210–220 мм приводит к возобновлению колебаний двигателя, причем их размах составляет 20–30 мм, а размах колебаний демпфера уменьшается примерно до 40 мм (рис.3,*в*).

Приведенные здесь экспериментальные результаты даны для указанных выше параметров колебательной системы. Сделано это для того, чтобы вам легче было продумать конструкцию собственного прибора и сопоставить получаемые результаты с условиями эксперимента.

Обсуждение результатов. Главным элементом исследуемой колебательной системы является упругая винипластовая полоска. Параметры ее отнюдь не критичны: мы изготовили до десятка приборов, подобных описанному, и хотя в каждом из них использовались разные двигатели и разные упругие элементы, все они прекрасно работали. Поэтому в отсутствие винипласта в качестве пружинного маятника вы можете использовать, например, пластмассовую ученическую линейку, если она обладает достаточной гибкостью и упругостью, закрепив ее изолентой на подставке из деревянных брусков.

Сделав рекомендованный прибор, детально исследуйте наблюдаемые явления. В небольшой статье невозможно дать подробное описание всего интересного. Укажем только, что помимо изгибных колебаний упругой полоски двигатель с дисбалансом легко возбуждает еще и крутильные колебания, которые, кстати, также можно демпфировать. Для этого нужно демпфирующий маятник закрепить с возможностью изменения его длины перпендикулярно упругой полоске возле ее конца. При достижении резонанса крутильных колебаний брусок с двигателем весьма интенсивно прыгает по столу, а при достаточно хорошем демпфировании их – останавливается и стоит как вкопанный.

И последнее. Можно ли *заранее* подобрать легкий маятник так, чтобы он демпфировал колебания массивного? Для ответа на этот вопрос будем рассуждать так.

Пусть на конце закрепленной горизонтально упругой полоски висит груз массой m, при этом максимальный изгиб полоски равен h (рис.4). Тогда действующая на груз сила тяжести по модулю равна силе упругости, которую в первом приближении можно считать пропорциональной изгибу полоски: $mg = kh$,

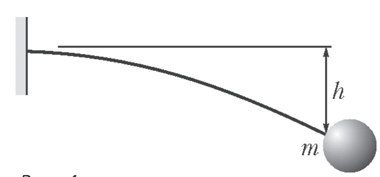


Рис. 4

где k – жесткость плоской пружины. Частота собственных колебаний обсуждаемой системы задается известной формулой $\omega = \sqrt{k/m}$. Подставляя сюда значение жесткости k из предыдущего равенства, получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Таким образом, частота собственных колебаний груза, висящего на конце расположенной горизонтально плоской пружины, обратно пропорциональна корню квадратному из величины максимального изгиба пружины.

Теперь понятно, как подобрать требуемый по параметрам демпфер. Для этого нужно измерить, на сколько изгибается широкая плоская пружина под действием силы тяжести электродвигателя. Затем сделать узкую тонкую пружинку произвольной длины – хотя бы из бронзовой или латунной фольги. Наконец, закрепить на конце демпфирующей пружинки такой груз, чтобы она изгибалась ровно настолько, насколько изогнута основная пружина, колебания которой нужно демпфировать.

Красиво, изящно и... неожиданно.

Работа газа при переходе из начального состояния в конечное

В.МОЖАЕВ

Бесконечно малая работа δA, совершаемая газом при бесконечно малом квазистатическом расширении, в котором его объем увеличивается на dV, равна

$$\delta A = p\,dV\,, \qquad (1)$$

где p – внутренне давление газа. В случае квазистатических процессов, когда любое состояние газа является равновесным, внутреннее давление p равно внешнему давлению. Только тогда состояние газа может быть описано двумя параметрами p и V, и только тогда имеет смысл формула (1).

Квазистатические процессы, в строгом смысле этого слова, никогда не реализуются в природе, но к ним возможно подойти сколь угодно близко. Многие реальные процессы можно считать приблизительно квазистатическими с той или иной степенью приближения.

Чтобы от элементарной работы δA перейти к работе A для конечного процесса, например при переходе из начального состояния газа с объемом V_1 в конечное состояние с объемом V_2, надо просуммировать элементарные работы, или вычислить интеграл:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV\,. \qquad (2)$$

Такое вычисление возможно только тогда, когда давление является определенной функцией объема. Между тем, согласно уравнению состояния идеального газа, давление p зависит не только от V, но и от температуры T. Меняя в ходе процесса различным образом температуру газа, можно перевести его из начального состояния в конечное бесчисленным количеством способов. Каждому из этих способов соответствует своя функция $p = p(V)$ и свое значение интеграла в формуле (2). Таким образом, работа газа A не определяется заданием его начального и конечного состояний. Ее величина зависит от способа (или пути) перехода газа из начального состояния в конечное.

Для графического представления работы обычно используется координатная плоскость pV. Состояние газа на такой плоскости задается точкой, причем по горизонтальной оси откладывается объем V, а по вертикальной – давление p. Когда газ совершает квазистатический процесс, точка, изображающая его состояние, описывает на плоскости pV непрерывную линию.

Пусть газ квазистатически переходит из состояния *1* в состояние *2* вдоль кривой *1M2* (рис.1). Эта кривая соответствует определенной зависимости давления от объема и однозначно определяет работу газа – она численно равна площади криволинейной трапеции $1M2V_2V_1$. Если газ заставить переходить из того же начального в то же конечное состояние вдоль другой кривой, например *1N2*, то соответствующая работа изобразится другой площадью, а именно $1N2V_2V_1$.

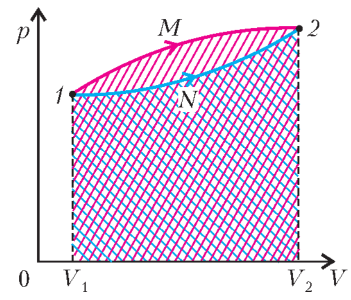


Рис. 1

Если газ обратимым путем переходит из состояния *2* в состояние *1* вдоль кривой *2M1* или *2N1*, то, очевидно, работа численно равна тем же площадям, но со знаком минус. На математическом языке это означает, что в этом случае газ совершил отрицательную работу, а с физической точки зрения – что не газ совершил работу, а над газом была совершена работа некоторыми внешними силами.

А теперь перейдем к разбору конкретных задач.

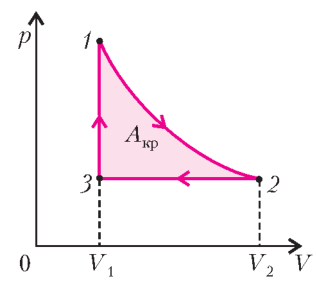


Рис. 2

Задача 1. *Моль идеального газа совершает круговой процесс (замкнутый цикл), изображенный на рисунке 2. Участок 1–2 – изотерма при температуре* T_1, *процесс 2–3 – изобара, переход 3–1 – изохора. Отношение объемов* $V_2/V_1 = \alpha$. *Определите: 1) работу газа на каждом участке; 2) работу, совершенную газом в круговом процессе.*

На участке *1–2* связь между давлением газа p и объемом V имеет вид

$$p = \frac{RT_1}{V}\,,$$

где R – универсальная газовая постоянная. Работа газа в этом процессе, согласно формуле (2), равна

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = RT_1\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = RT_1 \ln\alpha\,.$$

Поскольку $\alpha > 1$, то $A_{12} > 0$, т.е. газ совершает работу.

На изобаре *2–3* давление газа остается неизменным:

$$p = \frac{RT_1}{V_2}\,,$$

а работа равна

$$A_{23} = \frac{RT_1}{V_2}\int_{V_1}^{V_2} dV = RT_1\left(\frac{V_1 - V_2}{V_2}\right) = -RT_1\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right).$$

Получается, что $A_{23} < 0$, т.е. над газом совершается работа.

На изохоре *3–1* объем газа не изменяется, т.е. $dV = 0$, поэтому работа равна нулю:

$$A_{31} = 0\,.$$

В этом случае ни газом, ни над газом работа не совершается.

Очевидно, что работа газа в данном круговом процессе будет равна

$$A_{кр} = A_{12} + A_{23} + A_{31} = RT_1\left(\ln\alpha - \frac{\alpha - 1}{\alpha}\right).$$

На рисунке 2 эта работа численно равна площади выделенной фигуры *1–2–3*.

Задача 2. *Моль гелия расширяется из начального состояния 1 до конечного состояния 3 в двух процессах (рис.3).*

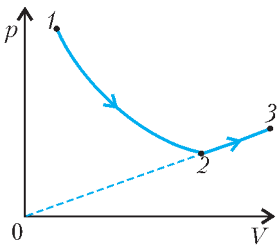


Рис. 3

Сначала расширение идет в процессе 1–2 с постоянной теплоемкостью $C = \frac{3}{4}R$ *(R – универсальная газовая постоянная). Затем газ расширяется в процессе 2–3, когда его давление p прямо пропорционально объему V. Найдите работу, совершенную газом в процессе 1–2, если в процессе 2–3 он совершил работу A. Температуры начального (1) и конечного (3) состояний равны.*

Поскольку температуры газа в начальном и конечном состояниях одинаковы, переход из состояния *1* в состояние *3* происходит с сохранением внутренней энергии газа. По первому началу термодинамики, в этом случае суммарное подведенное к газу количество теплоты полностью идет на работу, совершенную газом. Воспользуемся этим обстоятельством и найдем количество теплоты, подведенное к газу на участках *1–2* и *2–3*.

Обозначим состояние газа в точке *3* через p_3, V_3 и T_3, а в точке *2* – через p_2, V_2 и T_2. Работу газа *A* на участке *2–3* выразим через площадь трапеции $23V_3V_2$ (рис.4):

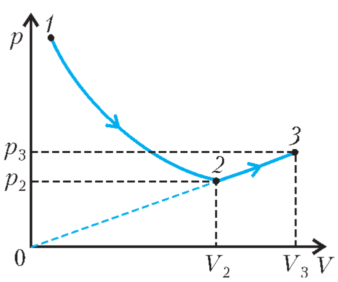


Рис. 4

$$A = \frac{1}{2}(p_3 + p_2)(V_3 - V_2).$$

Из подобия треугольников $03V_3$ и $02V_2$ запишем

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{V_3}{V_2}.$$

Учитывая, что $p_3V_3 = RT_3$ и $p_2V_2 = RT_2$, из совместного решения предыдущих двух уравнений найдем

$$T_3 - T_2 = \frac{2A}{R}.$$

Теперь мы можем записать подведенное к газу количество теплоты на участке *1–2*:

$$Q_{12} = C(T_2 - T_3) = -\frac{2CA}{R}$$

и на участке *2–3*:

$$Q_{23} = C_V(T_3 - T_2) + A = \frac{2C_VA}{R} + A,$$

где $C_V = \frac{3}{2}R$ — молярная теплоемкость гелия при постоянном объеме.

В соответствии с первым началом термодинамики,

$$Q_{12} + Q_{23} = A_{12} + A,$$

где A_{12} – искомая работа газа на участке *1–2*. Тогда окончательно получим

$$A_{12} = Q_{12} + Q_{23} - A = \frac{2(C_V - C)A}{R} = \frac{3}{2}A.$$

Задача 3. *На рисунке 5 показан круговой процесс для ν молей гелия, состоящий из двух участков линейной зависимости давления p от объема V и одной изобары. Известно, что на изобаре 3–1 над газом была совершена работа A (A > 0), а температура газа уменьшилась в* $\alpha = 4$ *раза. Состояния 2 и 3 принадлежат одной изотерме. Точки 1 и 2 на диаграмме pV лежат на прямой, проходящей через начало координат. Определите: 1) температуру газа в точке 1; 2) работу газа за цикл.*

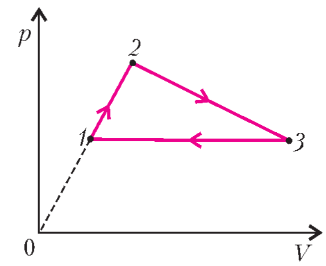


Рис. 5

Обозначим температуру гелия в точке *1* через T_1, тогда температура гелия в точке *3* будет $T_3 = \alpha T_1$. Работа над газом на изобаре равна

$$A = p_1(V_3 - V_1) = \nu R(T_3 - T_1) = \nu R(\alpha - 1)T_1.$$

Отсюда

$$T_1 = \frac{A}{\nu R(\alpha - 1)} = \frac{A}{3\nu R}.$$

Перейдем ко второму вопросу. Работу за цикл $A_ц$ будем искать через площадь треугольника *123*:

$$A_ц = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_3 - V_1).$$

Для изобарического процесса $V \sim T$, поэтому

$$V_3 - V_1 = V_1(\alpha - 1).$$

Поскольку точки *1* и *2* лежат на прямой, проходящей через начало координат, то

$$p_2 = \frac{V_2}{V_1}p_1.$$

С другой стороны, точки *2* и *3* лежат на изотерме, поэтому

$$p_2V_2 = p_3V_3.$$

Учитывая, что $p_1 = p_3$, находим

$$p_2 = \sqrt{\frac{V_3}{V_1}}p_1 = \sqrt{\alpha}\,p_1.$$

После подстановки в выражение для работы за цикл получим

$$A_ц = \frac{1}{2}p_1V_1(\sqrt{\alpha} - 1)(\alpha - 1) =$$

$$= \frac{1}{2}\nu RT_1(\sqrt{\alpha} - 1)(\alpha - 1) = \frac{(\sqrt{\alpha} - 1)A}{2} = \frac{A}{2}.$$

Задача 4. *Моль гелия совершает работу A в замкнутом цикле (рис.6), состоящем из адиабаты 1–2, изотермы 2–3 и изобары 3–1. Найдите работу, совершенную гелием в изотермическом процессе, если разность температур между максимальной и минимальной в цикле равна* ΔT.

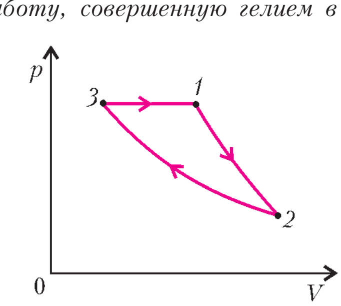


Рис. 6

Очевидно, что максимальная температура гелия в цикле будет в точке *1*. Обозначим эту температуру через T_1. Минимальная температура газа будет на изотерме *2–3*, обозначим ее через T_{23}. Согласно условию задачи,

$$T_1 - T_{23} = \Delta T.$$

Для кругового процесса, в соответствии с первым началом термодинамики, суммарное подведенное к газу количество теплоты равно работе газа, совершенной им в данном замкнутом цикле:

$$Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} = A .$$

Тепло, подведенное на адиабате *1–2*, равно нулю:

$$Q_{12} = 0 .$$

На изотерме *2–3* внутренняя энергия гелия остается неизменной, и подведенное тепло равно работе газа:

$$Q_{23} = A_{23} .$$

При изобарическом процессе *3–1* подведенное к газу тепло идет на увеличение его внутренней энергии и на работу газа:

$$Q_{31} = C_V\left(T_1 - T_{23}\right) + p_{31}\left(V_1 - V_3\right) = \left(C_V + R\right)\Delta T .$$

Окончательно получим

$$A_{23} + \left(C_V + R\right)\Delta T = A .$$

Отсюда найдем работу гелия на изотерме *2–3*:

$$A_{23} = A - \left(C_V + R\right)\Delta T = A - \frac{5}{2}R\Delta T .$$

Задача 5. *Подвижный поршень массой m, подвешенный на пружине, делит объем откачанного вертикального цилиндра на две части (рис.7). В положении равновесия высота нижней части цилиндра равна H_0, а удлинение пружины при этом составляет x_0. В нижнюю часть цилиндра впрыскивают ν молей воды. После того как вся вода испарилась, поршень переместился вверх на величину $x_1 = \alpha x_0$ ($\alpha = 3/2$). Найдите: 1) установившуюся температуру пара; 2) работу, совершенную паром. Теплоотводом через стенки цилиндра пренебречь.*

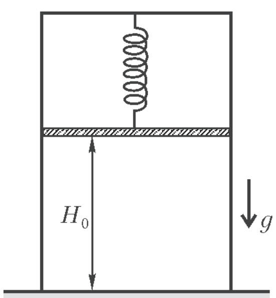


Рис. 7

Запишем условие механического равновесия поршня до впрыскивания воды:

$$mg = kx_0 ,$$

где k – жесткость пружины. После испарения воды и установления нового равновесия поршня объем пара будет

$$V_п = \left(H_0 + \alpha x_0\right)S ,$$

где S – площадь внутреннего поперечного сечения цилиндра. Давление пара при этом будет равно

$$p_п = \frac{mg + kx_0\left(\alpha - 1\right)}{S} = \frac{\alpha mg}{S} .$$

Рассматривая пар как идеальный газ, из уравнения состояния найдем температуру пара:

$$T_п = \frac{p_п V_п}{\nu R} = \frac{\alpha mg\left(H_0 + \alpha x_0\right)}{\nu R} .$$

Работа, совершенная паром, пойдет на приращение потенциальной энергии поршня и пружины. Если отсчитывать потенциальную энергию поршня от его положения при отсутствии воды в цилиндре, то суммарная потенциальная энергия поршня и пружины в начальный момент равна

$$W_1 = \frac{kx_0^2}{2} = \frac{mgx_0}{2} .$$

Потенциальная энергия в конечном состоянии составляет

$$W_2 = \frac{kx_0^2\left(\alpha - 1\right)^2}{2} + mg\alpha x_0 = \frac{mgx_0\left(\alpha^2 + 1\right)}{2} .$$

Работа пара равна изменению потенциальной энергии:

$$A_п = W_2 - W_1 = \frac{\alpha^2 mgx_0}{2} = \frac{9}{8}mgx_0 .$$

Задача 6. *Какую максимальную работу можно получить от периодически действующей тепловой машины, нагревателем которой служит $m_1 = 1$ кг воды при начальной температуре $T_1 = 373$ К, а холодильником – $m_2 = 1$ кг льда при температуре $T_2 = 273$ К, к моменту, когда растает весь лед? Чему будет равна температура воды нагревателя в этот момент? Удельная теплота плавления льда $q = 80$ ккал/кг. Зависимостью теплоемкости воды от температуры пренебречь.*

Работа, совершаемая любой тепловой машиной в замкнутом цикле, по первому началу термодинамики равна

$$A = Q_1 - Q_2 ,$$

где Q_1 – количество теплоты, подведенное к рабочему телу за цикл, а Q_2 – отведенное количество теплоты. Коэффициент полезного действия (КПД) тепловой машины равен

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} .$$

Максимальную работу можно получить (теоретически), если тепловая машина будет работать по циклу Карно. КПД цикла Карно зависит только от температур T_1 и T_2 нагревателя и холодильника:

$$\eta_К = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} .$$

Сравнивая два выражения для КПД, найдем, что для цикла Карно

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} .$$

В нашем случае количество теплоты Q_2, отведенное от рабочего тела и переданное холодильнику, будет идти на плавление льда, и температура холодильника T_2 будет оставаться постоянной (пока не растает весь лед) и равной 273 К. А вот температура нагревателя (горячая вода) будет уменьшаться после каждого цикла, и к моменту, когда лед растает, температура воды нагревателя будет заметно меньше начальной, равной 373 К. Следовательно, температура нагревателя будет переменной величиной.

Пусть в некоторый произвольный момент времени температура нагревателя была T, а за бесконечно малое время работы тепловой машины она уменьшилась на dT. Количество теплоты, переданное рабочему телу за это время, равно

$$dQ_1 = -c_в m_1 dT ,$$

где $c_в$ – удельная теплоемкость воды. Количество теплоты, переданное холодильнику, составляет

$$dQ_2 = q\,dm_2 ,$$

где dm_2 – бесконечно малое количество растаявшего льда. Воспользовавшись соотношением между Q и T для цикла Карно, получим

$$-\frac{q\,dm_2}{c_в m_1 dT} = \frac{T_2}{T} .$$

После разделения переменных T и m_2 это уравнение будет иметь вид

$$\frac{dT}{T} = -\frac{q\,dm_2}{c_в m_1 T_2} .$$

Проинтегрируем обе части данного уравнения:

$$\int_{T_1}^{T_к} \frac{dT}{T} = -\frac{q}{c_в m_1 T_2} \int_0^{m_2} dm_2 ,$$

где $T_к$ – конечная температура воды в нагревателе к моменту, когда весь лед растает. После интегрирования получим

$$\ln \frac{T_к}{T_1} = -\frac{q m_2}{c_в m_1 T_2} ,$$

откуда найдем

$$T_к = T_1 \exp\left(-\frac{q m_2}{c_в m_1 T_2}\right) = 278{,}3\ К .$$

Теперь мы можем определить суммарное количество теплоты, полученное от нагревателя к моменту полного таяния льда:

$$Q_1 = c_в m_1 (T_1 - T_к) .$$

Суммарное количество теплоты, переданное при этом холодильнику, равно

$$Q_2 = q m_2 .$$

Следовательно, от тепловой машины можно получить максимальную работу

$$A_{max} = Q_1 - Q_2 = c_в m_1 (T_1 - T_к) - q m_2 = 61{,}5\ кДж .$$

Упражнения

1. Моль гелия, расширяясь в процессе *1–2* (рис.8), где его давление p меняется прямо пропорционально его объему V, совершает работу A. Из состояния *2* гелий расширяется в процессе *2–3*, в котором его теплоемкость остается постоянной и равной $C = R/2$. Какую работу совершит гелий в процессе *2–3*, если температуры начального (1) и конечного (3) состояний равны?

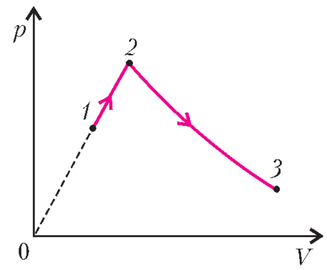


Рис. 8

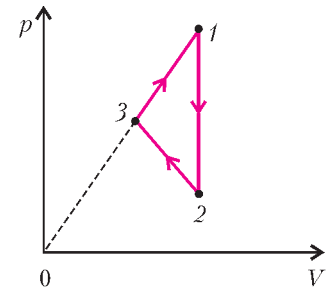


Рис. 9

2. Цикл для ν молей гелия состоит из двух участков линейной зависимости давления p от объема V и одной изохоры (рис.9). В изохорическом процессе *1–2* от газа было отведено количество теплоты Q ($Q > 0$), и его температура уменьшилась в 4 раза. Температуры в состояниях *2* и *3* равны. Точки *1* и *3* на диаграмме pV лежат на прямой, проходящей через начало координат. 1) Найдите температуру T_1 в точке *1*. 2) Найдите работу газа за цикл.

3. Моль гелия совершает работу A в замкнутом цикле, состоящем из изобары *1–2*, изохоры *2–3* и адиабатического процесса *3–1* (рис.10). Сколько тепла было подведено к газу в изобарическом процессе, если разность максимальной и минимальной температур гелия в цикле равна ΔT ?

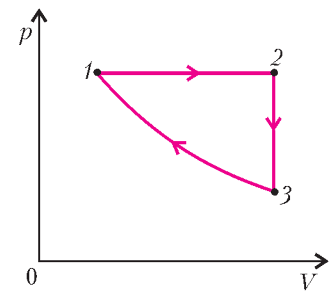


Рис. 10

Формулы геометрии помогают алгебре

В.МИРОШИН

В школьном курсе математики приводятся три формулы, позволяющие находить:

а) расстояние между точками с координатами x_1 и x_2 на числовой прямой: это модуль их разности, т.е. $d = |x_2 - x_1|$;

б) расстояние между точками $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ числовой плоскости: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$;

в) расстояние от точки $(x_0; y_0)$ до прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$: $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Довольно часто удается использовать эти формулы при решении алгебраических задач. Для этого, как правило, нужно истолковать данное алгебраическое выражение как расстояние или сумму расстояний до некоторых точек или прямых. С такими задачами мы и собираемся вас познакомить.

Сумма расстояний

Задача 1. *Найдите минимум выражения*

$$f(x, y) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{x^2 + y^2} .$$

Решение. Данное выражение представляет сумму расстояний от некоторой точки $M(x; y)$ координатной плоскости до двух точек: $K(3; 4)$ и начала координат $O(0; 0)$.

Используя известное «неравенство треугольника», получим, что сумма расстояний $MK + MO$ не может быть меньше расстояния KO, причем минимум достигается для любой точки M, лежащей на отрезке KO. Итак, $MK + MO \ge OK = 5$.

Ответ: 5.

Замечание. Для точек, лежащих на координатной оси, неравенство может быть записано в виде $|x - a| + |x - b| = |a - b| \Leftrightarrow (x - a)(x - b) \le 0$.

Задача 2 (МГУ, мехмат). *Найдите минимум выражения*

$$f(x, y) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} + |x - y| .$$

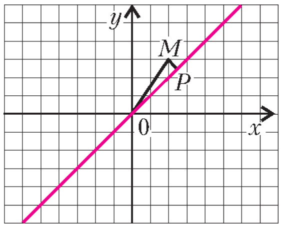


Рис. 1

Решение. Минимальное значение второго слагаемого достигается на прямой, заданной уравнением $y = x$. В этом случае второе слагаемое равно нулю. Осталось минимизировать первое слагаемое, которое есть расстояние от некоторой точки $(x;\ y)$ до точки $M(2;3)$ (рис.1).

Найдем на прямой $y = x$ точку, наименее удаленную от точки $M(2;3)$. Это будет основание P перпендикуляра, проведенного из точки M на прямую. И расстояние будет равно расстоянию от точки M до прямой: $\frac{|2-3|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Сумма двух слагаемых будет такой же.

Докажем, что найденное значение будет действительно наименьшим. Пусть $|x-y| = a,\ a > 0$. Имеем

$$|x-y| = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - x = a \\ y - x = -a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x + a \\ y = x - a, \end{array}\right. \quad a > 0.$$

Данная совокупность задает пару прямых, параллельных прямой $y = x$, пересекающих ось ординат в точках $(0;a)$ и $(0;-a)$. В этом случае минимум первого слагаемого есть расстояние от точки $(2;3)$ до ближайшей из прямых $y = x + a$ или $y = x - a$. Это расстояние равно длине отрезка MQ (рис. 2).

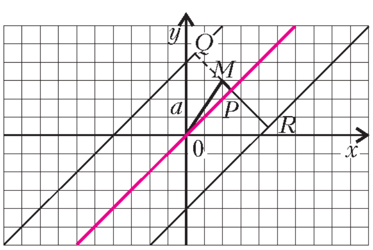


Рис. 2

Очевидно, что выполнено неравенство $a > MP + MQ$, откуда $MP < a - MQ < a + MQ$. Если же точка Q лежит между точками M и P, то в этом случае и вовсе $a > MP - MQ \Leftrightarrow MP < a + MQ$, что и требовалось доказать.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Задача 3 (МГУ, мехмат). *Найдите наименьшее значение выражения* $\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} + |x| + |y|$.

Решение. Решим эту задачу подобно предыдущей. Обозначим сначала $f(x,y) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} + |x| + |y|$. Рассмотрим два последних слагаемых. Пусть $|x| + |y| = a,\ a \ge 0$.

Если $a = 0$, то

$$|x| + |y| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Осталось найти значение данного выражения:

$$f(0,0) = \sqrt{13}.$$

Если $a > 0$, то уравнение $|x| + |y| = a$ задает на координатной плоскости квадрат с вершинами в точках $(0;a)$, $(0;-a)$, $(a;0)$, $(-a;0)$. Найдем на указанном квадрате точку, наименее удаленную от точки $M(2;3)$.

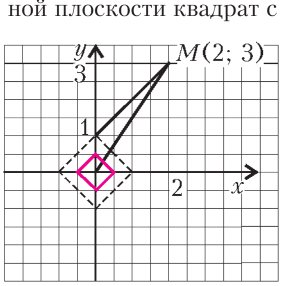


Рис. 3

Если $0 < a \le 1$, то такой точкой будет вершина квадрата $(0;a)$ (рис. 3). Но по неравенству треугольника сумма $f(x,y) = \sqrt{(2)^2 + (a-3)^2} + a$ в этом случае будет больше, чем расстояние от точки $M(2;3)$ до начала координат, т.е. больше $\sqrt{13}$.

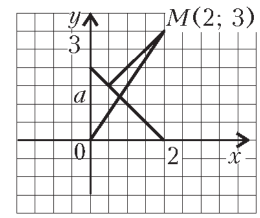


Рис. 4

Если $a > 1$, то ближайшей к точке $M(2;3)$ будет точка, являющаяся основанием перпендикуляра, опущенного из точки $M(2;3)$ на отрезок прямой $x + y = a$, содержащий сторону квадрата (рис.4). В этом случае имеем

$$f(a) = \frac{|2+3-a|}{\sqrt{2}} + a = \frac{|5-a|}{\sqrt{2}} + a.$$

Если $1 < a \le 5$, то

$$f(a) = a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{5}{\sqrt{2}},$$

$$a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{5}{\sqrt{2}} > 1 + 2\sqrt{2} > \sqrt{13}.$$

Если $a > 5$, то

$$f(a) = a\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{5}{\sqrt{2}},$$

$$a\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{5}{\sqrt{2}} > 5 > \sqrt{13}.$$

Таким образом, $\min\left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} + |x| + |y|\right) = \sqrt{13}$.

Ответ: $\sqrt{13}$.

Задача 4 (XIV Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»). *Найдите наименьшее значение функции* $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 - 14x + 58}$.

Решение. Запишем функцию в виде $f(x) = \sqrt{(x-3)^2 + 4} + \sqrt{(x-7)^2 + 9}$. Дадим геометрическую трактовку полученному выражению. Правая часть есть сумма расстояний от точки $(x;\ 0)$ до точек $(3;\ 2)$ и $(7;-3)$. Точка $(x;\ 0)$ лежит на оси абсцисс, а две другие точки – в разных полуплоскостях от нее. Минимум суммы расстояний, как легко видеть, будет достигаться тогда, когда точка $(x;\ 0)$ будет лежать на отрезке, соединяющем точки $(3;\ 2)$ и $(7;-3)$, и будет равен длине этого отрезка.

Итак, $\min f(x) = \sqrt{(7-3)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{41}$.

Ответ: $\sqrt{41}$.

Задача 5 (РГГУ). *Найдите наименьшее значение функции*

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} + \sqrt{2x^2 - 2x + 5} + \sqrt{2x^2 - 6x + 9} + \sqrt{2x^2 - 10x + 13}.$$

Решение. Вид функции свидетельствует о том, что «лобовое» решение с помощью производной приведет к вычислительным трудностям. На мысль использовать формулу для расстояния наводят одинаковые старшие коэффициенты квадратных трехчленов, а также вид первого из них.

Преобразуем подкоренные выражения, представив их в «узнаваемом» виде:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + (x+1)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (x+1)^2} + \sqrt{x^2 + (x-3)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (x-3)^2}.$$

Осталось заметить, что правая часть равенства есть сумма расстояний от точки $M(x;x)$ до четырех точек

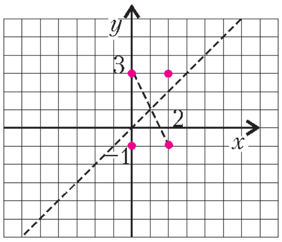


Рис. 5

$(0;-1)$, $(2;-1)$, $(0;3)$, $(2;3)$ координатной плоскости (рис.5).

Указанные точки – вершины прямоугольника, а точка, сумма расстояний от которой до его вершин минимальна, – это точка пересечения его диагоналей. Сумма расстояний от любой другой точки плоскости до вершин прямоугольника будет больше. Это следует из неравенства треугольника. Осталось заметить, что прямая $y = x$ проходит через точку пересечения диагоналей, имеющую координаты $(1;1)$. Следовательно, $\min f(x) = f(1) = 4\sqrt{5}$.

Ответ: $4\sqrt{5}$.

Задача 6. *Решите систему*

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+(y-4)^2} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}|x-2y-2| = 2\sqrt{5}, \\ x \ge 2. \end{cases}$$

Решение. Пусть $(x;y)$ – координаты некоторой точки плоскости. Тогда уравнение системы – это сумма расстояний от этой точки до точки $M(0;4)$ и до прямой, заданной уравнением $x - 2y - 2 = 0$. Заметим еще, что правая часть уравнения равна расстоянию от точки M до указанной прямой. Множество точек плоскости, обладающих данным свойством, – перпендикуляр, опущенный из точки M на прямую (рис.6). Очевидно, что для любой точки N, не принадлежащей этому перпендикуляру, сумма расстояний до точки M и до прямой будет больше.

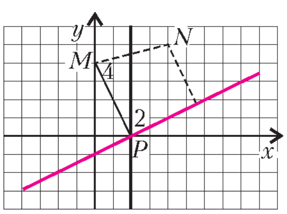


Рис. 6

Проведем перпендикуляр MP. Точка P – основание перпендикуляра – будет иметь координаты $(2;0)$. Учитывая неравенство системы, получим, что только ее координаты будут являться искомыми решениями всей системы.

Ответ: $(2;0)$.

Задача 7 (МГУ, ВМК). *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2-16x-12y+100} + \sqrt{x^2+y^2+4x-20y+104} = 2\sqrt{29}, \\ (x-7)^2+(y-5)^2 = 16. \end{cases}$$

Решение. Представляя подкоренные выражения в виде суммы двух квадратов, получим

$$\sqrt{(x-8)^2+(y-6)^2} + \sqrt{(x+2)^2+(y-10)^2} = 2\sqrt{29}.$$

Левая часть равенства есть сумма расстояний от точки $M(x;y)$ координатной плоскости до точек с координатами $(8;6)$ и $(-2;10)$. Правая часть равенства – расстояние между этими точками.

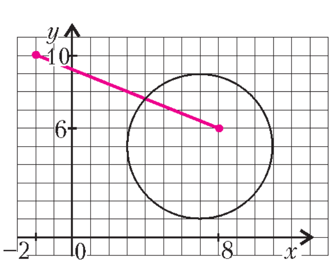


Рис. 7

Геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек есть расстояние между этими точками, – это отрезок, соединяющий данные точки (рис.7). Поэтому первое уравнение системы задает отрезок, соединяющий точки $(8;6)$ и $(-2;10)$. Составим уравнение этой прямой:

$$\frac{x+2}{8+2} = \frac{y-10}{6-10} \Leftrightarrow \frac{1}{5}(x+2) = -\frac{1}{2}(y-10) \Leftrightarrow 5y + 2x - 46 = 0.$$

Найдем точку пересечения этой прямой с окружностью, заданной вторым уравнением, принадлежащую указанному отрезку. Запишем систему

$$\begin{cases} 2x + 5y - 46 = 0, \\ (x-7)^2 + (y-5)^2 = 16, \\ 6 \le y \le 10. \end{cases}$$

Выразив из первого уравнения переменную $x = 23 - \frac{5}{2}y$ и подставив во второе уравнение, получим

$$\left(16 - \frac{5}{2}y\right)^2 + (y-5)^2 = 16 \Leftrightarrow \frac{29}{4}y^2 - 90y + 265 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{180 - 2\sqrt{415}}{29} \\ y = \dfrac{180 + 2\sqrt{415}}{29}. \end{array} \right.$$

Учитывая ограничения системы, получим, что $y = \dfrac{180 + 2\sqrt{415}}{29}$. Теперь найдем абсциссу точки пересечения: $x = 23 - \dfrac{5(90+\sqrt{415})}{29} = \dfrac{217 - 5\sqrt{415}}{29}$.

Ответ: $\left(\dfrac{217 - 5\sqrt{415}}{29}; \dfrac{180 + 2\sqrt{415}}{29}\right)$.

Разность расстояний

До сих пор мы рассматривали задачи, в которых присутствовали суммы расстояний. Но есть задачи, в которых рассматривается и разность расстояний между точками.

Очень часто при решении алгебраических уравнений можно встретить уравнения, содержащие следующие комбинации:

1) $|x-a| - |x-b| = b - a, \quad b > a$;
2) $|x-a| - |x-b| = a - b, \quad b > a$;
3) $|x-a| - |x-b| = |b-a|, \quad b > a$.

В этих случаях разность расстояний от некоторой точки x числовой прямой до точек a и b в указанном порядке либо равна расстоянию между ними, либо противоположна ему.

Имеем

1) $|x-a| - |x-b| = b - a \Leftrightarrow x \ge b$;
2) $|x-a| - |x-b| = a - b \Leftrightarrow x \le a$;
3) $|x-a| - |x-b| = |b-a| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge b \\ x \le a \end{array} \right. \Leftrightarrow (x-a)(x-b) \ge 0$.

В первых двух случаях геометрическое место точек – луч прямой, в третьем – два луча.

В случае точек на плоскости картина не меняется.

Задача 8 (ГФА). *Среди решений неравенства*

$$\sqrt{x^2+y^2} \ge 13 + \sqrt{(x-5)^2+(y-12)^2}$$

найдите те, при которых сумма $x + y$ принимает наименьшее значение.

Решение. Запишем неравенство следующим образом:

$$\sqrt{x^2+y^2} - 13 \ge \sqrt{(x-5)^2+(y-12)^2}.$$

Заметим, что $13 = \sqrt{5^2+12^2}$. Тогда левая часть неравенства есть разность расстояний от начала координат до некоторой точки $M(x;y)$ и до точки $(5;12)$. Причем это расстояние не меньше расстояния между точкой M и точкой $(5;12)$.

Найдем ГМТ, заданное неравенством. Имеем

$$\sqrt{x^2+y^2}-13 \ge \sqrt{(x-5)^2+(y-12)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}-13 \ge 0, \\ x^2+y^2-26\sqrt{x^2+y^2}+169 \ge x^2-10x+y^2-24y+169 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \ge 169, \\ 5x+12y \ge 0, \\ 25x^2+120xy+144y^2 \ge 169x^2+169y^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \ge 169, \\ y \ge -\dfrac{5}{12}x, \\ 144x^2-120xy+25y^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \ge 169, \\ y \ge -\dfrac{5}{12}x, \\ (12x-5y)^2 \le 0. \end{cases}$$

Последнее неравенство системы может быть верным только тогда, когда выражение, стоящее в его левой части, равно нулю. Получим

$$\sqrt{x^2+y^2}-13 \ge \sqrt{(x-5)^2+(y-12)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \ge 169, \\ y \ge -\dfrac{5}{12}x, \\ 12x-5y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \ge 169, \\ y \ge -\dfrac{5}{12}x, \\ y = \dfrac{12}{5}x. \end{cases}$$

Таким образом, геометрическое место точек, заданных неравенством, – это луч прямой $y=\frac{12}{5}x$, лежащий вне внутренней части круга радиуса 13 с центром в начале координат, а также в полуплоскости, заданной неравенством $y \ge -\frac{5}{12}x$.

Прямая $x+y=c$ пересекает луч при $c \ge 17$ (рис.8), так что наименьшее значение c, при котором прямая указанного вида будет иметь общую точку с лучом, будет равно 17.

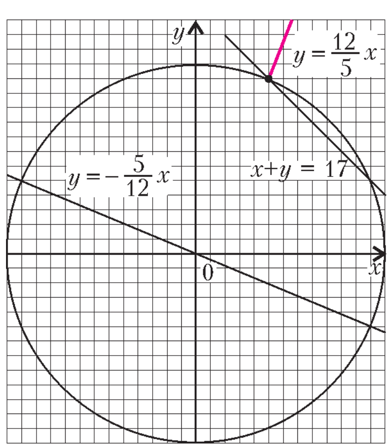


Рис. 8

Ответ: (5; 12).

Задача 9. *Найдите значения параметра a, при каждом из которых система уравнений*

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{(x-a)^2+\left(y-a^2\right)^2}=|a|\sqrt{1+a^2}, \\ (x-4)^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Записав первое уравнение системы в виде

$$\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{(x-a)^2+\left(y-a^2\right)^2}=\sqrt{a^2+a^4},$$

видим, что разность расстояний от точки $M(x;\,y)$ до начала координат, точки O, и точки $A\left(a;a^2\right)$ равна AO, отсюда следует, что точка $(x;\,y)$ лежит на луче прямой $y=ax$ с началом в точке A.

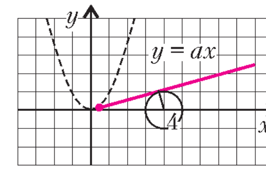


Рис. 9

Так как система описывает пересечение окружности и луча, начало которого лежит вне окружности, то система будет иметь единственное решение только в том случае, когда указанный луч прямой $y=ax$ будет касаться окружности (рис.9). Имеем

$$a=\operatorname{tg}\alpha, \text{ где } \sin\alpha=\frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$a=\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{4^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{15}}$.

Сумма расстояний до вершин треугольника

Задача 10. *Найдите наименьшее значение выражения*
$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(x+5)^2+(y-3)^2}.$$

Решение. В этой задаче нужно найти минимум суммы расстояний от точки $(x;y)$ до вершин треугольника с координатами $(0;0)$, $(3;0)$, $(-5;3)$ (рис. 10). Мы имеем дело с частным случаем одной из наиболее известных геометрических задач на нахождение наибольших и наименьших значений.

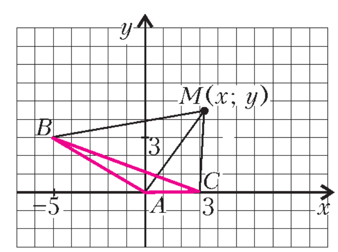


Рис. 10

Общая формулировка этой задачи такова: *Дан треугольник ABC. Найти в его плоскости точку P, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна.*

Такая точка называется *точкой Торричелли.*

Теорема. *Если больший угол треугольника меньше $120°$, то точка Торричелли – точка, лежащая внутри треугольника, из которой все его стороны видны под углом $120°$. Если больший угол треугольника не менее $120°$, то точка Торричелли – вершина тупого угла.*

Существует несколько способов доказательства данной теоремы. Приведем то, которое не использует методов исследования функций.

Лемма 1. *Точка, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна, не может лежать вне этого треугольника.*

Доказательство. Пусть некоторая точка M, обладающая указанными свойствами, лежит вне треугольника (рис. 11). Соединим ее с вершиной B треугольника. Точку пересечения отрезков AC и BM обозначим M_1. Очевидно, что выполнено неравенство

$$MA+MB+MC >$$
$$> M_1A+M_1B+M_1C.$$

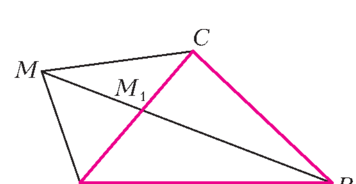


Рис. 11

Лемма доказана.

Таким образом, точка, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна, лежит либо в плоскости треугольника, либо на одной из его сторон.

Лемма 2. *Если наибольший угол треугольника менее $120°$, то искомая точка – точка, лежащая внутри треугольника, из которой все вершины треугольника видны под углом $120°$.*

Доказательство. Выберем внутри треугольника ABC произвольную точку P и найдем сумму расстояний от нее до вершин треугольника, т.е. $PA + PB + PC$ (рис.12). Повернем треугольник вокруг, например, вершины B на угол $60°$. При этом вершина A перейдет в точку A_1, вершина C, соответственно, в точку C_1, а сама точка P – в точку P_1. Треугольник PBP_1 – равносторонний, и поэтому $PB = P_1B = PP_1$. Получим $PA + PB + PC = P_1A_1 + P_1P + PC$. Равенство длин отрезков $PA = P_1A_1$ следует из того, что поворот – это движение плоскости. По свойству ломаной получаем, что сумма расстояний будет наименьшей, если точка P будет лежать на отрезке A_1C. Аналогично рассуждая, получим, что искомая точка должна лежать и на отрезке BC_1. Таким образом, точка P – пересечение отрезков A_1C и BC_1.

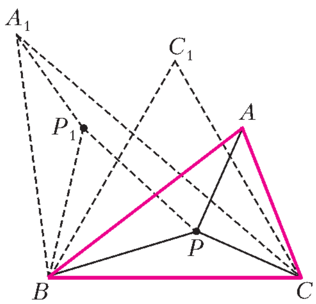


Рис. 12

Итак, если точка P лежит на прямой A_1C, то $\angle BP_1P + \angle A_1P_1B = 180°$, откуда следует, что $\angle A_1P_1B = \angle APB = 120°$. Аналогично, $\angle APC = 120°$. Так как наибольший угол треугольника меньше $120°$, то точка P лежит внутри треугольника.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Если больший угол треугольника не менее $120°$, то точка, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна, – вершина тупого угла.*

Доказательство. Пусть $\angle BAC > 120°$ и P – произвольная точка внутри треугольника (рис.13). Построим равносторонний треугольник PAP_1. Рассуждая как в предыдущем случае, получим, что $\Delta APB = \Delta AP_1B_1$, $PA + PB + PC = PC + PP_1 + PB_1$. Так как $PA + PB + PC \geq AC + AB_1$ и $AB = AB_1$, то $PA + PB + PC \geq AB + AC$.

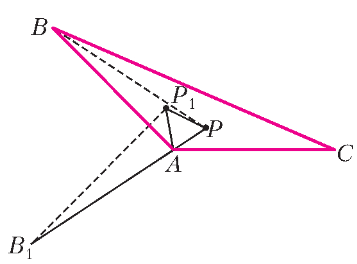


Рис. 13

Лемма доказана.

Доказательство лемм завершает доказательство теоремы.

Решим поставленную выше задачу: найдем минимум суммы расстояний от точки $(x;y)$ до вершин треугольника с координатами $(0;0)$, $(3;0)$, $(-5;3)$.

Решение. Вычислим косинус большего угла треугольника:

$$\cos\angle A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\cdot AB\cdot AC} = \frac{34+9-73}{6\sqrt{34}} = -\frac{5}{\sqrt{34}} < -\frac{1}{2}.$$

Тупой угол данного треугольника более $120°$, поэтому точка, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна, – вершина тупого угла. Искомая сумма равна $\sqrt{34}+3$.

Ответ: $\sqrt{34}+3$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите систему

$$\begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}+0{,}2\left|4y-3x+12\right|=5,\\ 4x-y\leq 0.\end{cases}$$

2. Решите систему

$$\begin{cases}\left|y-2x\right|+\left|\dfrac{\left|x-2\right|}{x-2}-1\right|=0,\\ \sqrt{x^2+(y-10)^2}+\sqrt{(x-6)^2+(y-2)^2}\leq 10.\end{cases}$$

3. Решите систему

$$\begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}+0{,}2\left|4y-3x+12\right|=5,\\ x^2+(y+3)^2\leq 25.\end{cases}$$

4. Решите систему

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}\geq 2\sqrt{5},\\ \sqrt{x^2+(y-8)^2}+\sqrt{(x-6)^2+(y-4)^2}\leq 2\sqrt{13}.\end{cases}$$

5. Решите систему

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}\geq 5,\\ \left|y-x-2\right|+\left|(x-4)(x-8)\right|+(x-4)(x-8)=0.\end{cases}$$

6. Найдите наибольшее значение y, для которого существуют значения x и z, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases}yz+x\sqrt{1-z^2}=1,\\ \sqrt{x^2+y^2}\geq\sqrt{(x-0{,}6)^2+(y+0{,}8)^2}+1.\end{cases}$$

7. Найдите наименьшее значение x, для которого существуют значения y и z, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases}yz+x\sqrt{1-z^2}=1,\\ \sqrt{x^2+y^2}\geq\sqrt{(x-0{,}6)^2+(y-0{,}8)^2}+1.\end{cases}$$

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{(x-a)^2+\left(y-a^2\right)^2}=\left|a\right|\sqrt{1+a^2},\\ (x-10)^2+y^2=36\end{cases}$$

имеет решение.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»
kvant.info

Московский центр непрерывного математического образования
kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»
ceemat.ru