

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 2007 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3–2007» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2041» или «Ф2048». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2042 и М2045 предлагались на III этапе XXXIII Всероссийской олимпиады школьников по математике, задачи М2041, М2044, М2047, М2049 – на XXVIII Турнире городов.

Задачи Ф2050, Ф2053–Ф2056 предлагались на Московской физической олимпиаде этого года.

Задачи М2041–М2050, Ф2048–Ф2057

М2041. Какое наименьшее число ладей нужно поставить на шахматной доске 8×8 , чтобы все белые клетки оказались под боем этих ладей?

Р. Женодаров

М2042. Докажите, что при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ выполнено неравенство

$$(\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\cos x} \geq 2.$$

Н. Агаханов

М2043. Можно ли сконструировать такой набор «Юный паркетчик» из четырех одинаковых многоугольников и квадрата, чтобы из всех пяти деталей можно было сложить квадрат, а из трех одинаковых деталей – равносторонний треугольник?

О. Нечаева

М2044. Пусть $f(x)$ – некоторый многочлен ненулевой степени. Может ли оказаться, что уравнение $f(x) = a$ при любом значении a имеет четное число решений?

П. Кожевников

М2045. На доске записано число $\underbrace{111\dots 11}_{99 \text{ единиц}}$. Двое играют в следующую игру. Игроки ходят по очереди,

причем за ход разрешается либо записать ноль вместо одной из единиц, кроме первой и последней, либо стереть один из нулей. Проигрывает тот, после хода которого число будет делиться на 11. Кто выигрывает при правильной игре?

М. Мурашкин

М2046. Муха села в полдень на секундную стрелку часов и решила ездить, придерживаясь следующего

правила: если одна стрелка обгоняет другую и муха сидит на одной из этих стрелок, то она пересаживается на другую. Сколько оборотов сделает муха к полуночи?

Фольклор

М2047. Из точки T , лежащей внутри треугольника ABC , стороны AB , BC , CA видны под углом 120° каждая. Докажите, что прямые, симметричные прямым AT , BT , CT относительно прямых BC , CA , AB соответственно, пересекаются в одной точке.

А. Заславский

М2048. Найдите такое наибольшее натуральное k , что найдется натуральное $n > 1$, для которого каждое из чисел $n, n^2, \dots, n^k$ представимо в виде $x^2 + y^2 + 1$, где x, y – целые числа.

В. Сендеров

М2049. От правильного октаэдра с ребром 1 отрезали 6 углов – пирамидок с квадратным основанием и ребром $1/3$. Получился многогранник, грани которого – квадраты и правильные шестиугольники. Можно ли копиями такого многогранника замостить пространство?

А. Канель

М2050. В однокруговом турнире по волейболу (без ничьих) участвовало 2^n команд, причем команда «Чемпион» заняла первое место. Назовем команду *плохой*, если она выиграла у «Чемпиона». Оргкомитет планирует провести турнир по олимпийской системе и предполагает, что все встречи закончатся так же, как в предыдущем турнире. Докажите, что можно так составить расписание, что «Чемпион» опять победит, при-

чем все плохие команды проиграют (и прекратят участие) уже в первых двух турах.

Б.Френкин, Л.Остроумова

Ф2048. Материальная точка движется с постоянным ускорением. Ее координаты в начальный момент $(0, 0, 0)$, через 1 секунду после начала движения $(1, 1, 2)$, еще через секунду $(2, 3, 4)$. Какой угол составляет вектор начальной скорости точки с вектором ее ускорения?

А.Зильберман

Ф2049. В системе (рис.1) трения нет. Массы грузов на левом блоке M и $2M$, на правом блоке — $2M$ и $4M$. Найдите ускорение самого легкого груза при движении.

А.Блоков

Ф2050. Снаряд, летевший вертикально, взорвался в верхней точки своей траектории, распавшись на три осколка с массами $m_1 = 2m$, $m_2 = 3m$ и $m_3 = 4m$, которые полетели в разные стороны с одинаковыми начальными скоростями. Через некоторое время после взрыва расстояние между осколками с массами m_1 и m_2 оказалось равным L . Чему было равно в этот момент расстояние между осколками с массами m_1 и m_3 , если ни один из осколков еще не достиг земли? Влиянием воздуха и массой взрывчатого вещества снаряда пренебречь.

А.Якута

Ф2051. По горизонтальному столу катится без проскальзывания велосипедное колесо. Его диаметр 1 м, масса 1 кг, скорость центра 1 м/с. В некоторый момент к колесу приклеился маленький кусочек жвачки массой 2 г, лежавший на столе. Скорость центра колеса теперь меняется. Оцените отличие минимальной скорости колеса от его начальной скорости.

Р.Колесов

Ф2052. Однородное плоское тело вращается относительно вертикально оси, лежащей в плоскости тела (рис.2). Тело раскрутили до угловой скорости ω_0 и отпустили. На тело действует сила сопротивления воздуха такая, что избыточное давление пропорционально скорости v участка поверхности с коэффициентом k (т.е. $\Delta F = k\Delta S v$). Масса тела M , его «поперечная» площадь S . Сколько оборотов совершит тело до полной остановки?

А.Киселев

Ф2053. На столе стоит вертикальный теплоизолированный цилиндрический сосуд, в который вставлены два поршня (рис.3). Верхний поршень — тяжелый, теплонепроницаемый и может двигаться в цилиндре без трения. Нижний поршень — легкий и теплопроводящий, но между ним и стенками

сосуда существует трение. В каждой из частей сосуда находится по ν молей идеального одноатомного газа. Вначале система находилась в тепловом равновесии, а обе части сосуда имели высоту L . Потом систему медленно нагрели, сообщив ей количество теплоты ΔQ . На какую величину ΔT изменилась температура газов, если нижний поршень при этом не сдвинулся с места? При каком наименьшем значении силы трения F между нижним поршнем и стенками это возможно? Какова теплоемкость системы C в этом процессе? Теплоемкостью стенок сосуда и поршней пренебречь.

Д.Вагин, М.Семенов

Ф2054. Над ν молями идеального одноатомного газа проводят циклический процесс, график которого изображен на pV -диаграмме (рис.4). Цикл состоит из вертикального $(1-2)$ и горизонтального $(3-1)$ участков и «лестницы» $(2-3)$ из n ступенек, на каждой из которых давление и объем газа изменяются в одно и то же число раз. Отношение максимального давления газа к минимальному равно k , отношение максимального объема к минимальному также равно k . Найдите КПД тепловой машины, работающей по данному циклу.

О.Шведов

Ф2055. Электрическая цепь (рис.5) состоит из идеальной батарейки с ЭДС U_0 , идеального амперметра и четырех одинаковых нелинейных элементов, для каждого из которых, в отличие от закона Ома, связь силы тока I и напряжения U имеет вид $I = \alpha U^2$. Какой ток I_0 показывает амперметр?

Д.Харабадзе

Ф2056. Тридцать одинаковых резисторов сопротивлением R каждый соединены между собой в пространстве так, что они являются ребрами выпуклого правильного многогранника (рис.6): а) двадцатигранника (икосаэдра); б) двенадцатигранника (додекаэдра). Какое со-

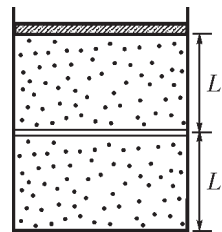


Рис. 3

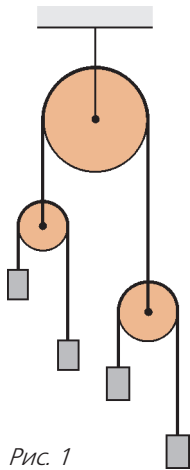


Рис. 1

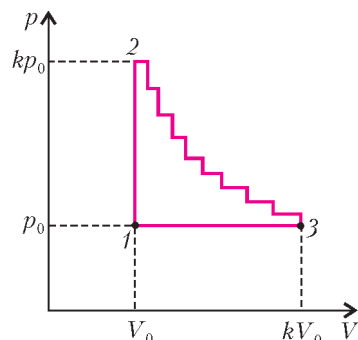


Рис. 4

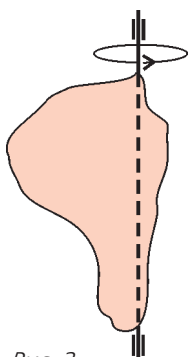


Рис. 2

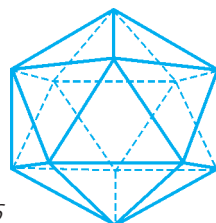
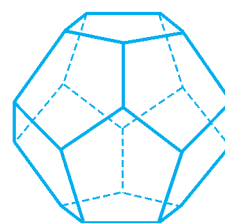


Рис. 6



противление будет представлять описанная выше система а) или б), если подключиться к паре ее наиболее удаленных вершин? Сколько разных значений сопротивления можно будет получить в случае а) и в случае б), если подключиться к всевозможным парам вершин этих многогранников?

Справка: грани икосаэдра – это 20 правильных треугольников, в каждой из 12 вершин сходятся по 5 треугольников; грани додекаэдра – это 12 правильных пятиугольников, в каждой из 20 вершин сходятся по 3 пятиугольника.

С.Кротов

Ф2057. Конденсатор емкостью C и две одинаковые катушки индуктивностью L каждая соединены параллельно и подключены к внешней цепи. В некоторый момент конденсатор не заряжен, а токи катушек равны I и $2I$. В этот момент очень быстро параллельно подключают еще пять таких же катушек, а внешнюю цепь отключают. Найдите максимальное значение заряда конденсатора и максимальное значение силы тока через катушку номер 7 (последняя из подключенных катушек). Элементы цепи считайте идеальными.

З.Рафаилов

Решения задач M2021–M2025, Ф2033–Ф2042

M2021. В зале находится компания из n человек, среди которых есть пары знакомых. Известно, что если в зале останется 98 человек, то их всегда можно будет разбить на 49 пар знакомых. Какое наименьшее число пар знакомых могло быть в такой компании, если: а) $n = 99$; б) $n = 100$?

Ответ: а) 99; б) 150.

Если для некоторого человека A в компании найдется 97 не знакомых с ним людей, то A и эти 97 человек образуют группу из 98 человек, которую нельзя разбить на 49 пар знакомых, – противоречие. Таким образом, у каждого человека в компании не более 96 не знакомых с ним людей, и следовательно, не менее $n - 97$ знакомых. Поэтому количество пар знакомых не менее $n(n - 97)/2$, что при $n = 99$ и $n = 100$ равно 99 и 150 соответственно.

Остается привести примеры. Рассадим людей по кругу на равном расстоянии друг от друга.

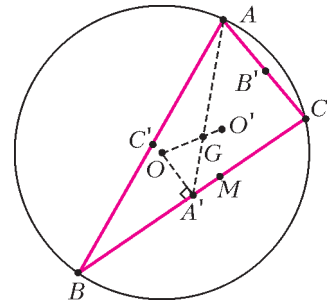
Для 99 человек пусть двое знакомы, если они соседи (т.е. сидят рядом за столом). Если зал покинул один человек, то оставшихся можно разбить на пары соседей.

Для 100 человек $A_1, A_2, \dots, A_{100}$ пусть знакомы сидящие рядом и кроме того пусть имеются пары «диаметрально противоположных» знакомых $A_1 - A_{51}, A_2 - A_{52}, \dots, A_{50} - A_{100}$. Если зал покинули два человека с номерами разной четности, то оставшихся можно разбить на пары соседей. Пусть зал покинули два человека с номерами одной четности, для определенности A_1 и A_{2k+1} , где $k \leq 25$. Тогда выберем пару знакомых $A_2 - A_{52}$, а оставшихся 96 человек можно разбить на пары соседей.

П.Кожевников

M2022. Дана окружность, точка A на ней и точка M внутри нее. Рассматриваются хорды BC , проходящие через M . Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон всевозможных треугольников ABC , касаются фиксированной окружности.

Пусть O – центр данной окружности ω , O' – центр окружности ω' , проходящей через середины A', B', C' сторон треугольника ABC , G – точка пересечения медиан треугольника ABC (см. рисунок). Обозначим через R и R' радиусы окружностей ω и ω' соответственно. Так как $OA' \perp BC$, то A' лежит на (фиксированной) окружности γ с диаметром OM . При гомотетии h с центром в A и коэффициентом $2/3$ точка A' переходит в G , поэтому G лежит на фиксированной окружности γ_1 – образе γ при гомотетии h .



Треугольник $A'B'C'$ получается из треугольника ABC гомотетией с центром G и коэффициентом $-1/2$, поэтому $R' = R/2$, а точка O' такова, что $\overline{OG} = 2\overline{GO'}$. Это означает, что при гомотетии h_1 с центром в O и коэффициентом $3/2$ точка G переходит в O' , поэтому O' лежит на фиксированной окружности γ_2 – образе γ_1 при гомотетии h_1 .

Итак, радиусы всевозможных окружностей ω' равны $R/2$, а их центры лежат на фиксированной окружности γ_2 с центром O_2 и радиусом r . Значит, окружности ω' касаются окружности с центром O_2 и радиусом $R/2 + r$ (а также при $R/2 \neq r$ касаются окружности с центром O_2 и радиусом $|R/2 - r|$).

П.Кожевников

M2023. Пусть a, b, c – отличные от нуля целые числа, сумма которых равна нулю. Докажите, что:

- а) $(ab)^5 + (bc)^5 + (ca)^5$ делится на $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2$;
- б) $a^n + b^n + c^n$ делится на $a^4 + b^4 + c^4$ при любом натуральном n , дающем при делении на 3 остаток 1;
- в) $(ab)^n + (bc)^n + (ca)^n$ делится на $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2$ при любом натуральном n , дающем при делении на 3 остаток 2.

Введем обозначения: $A_n = a^n + b^n + c^n$, $B_n = (ab)^n + (bc)^n + (ca)^n$, $s_n = (x + y)^n + (-x)^n + (-y)^n$, где $n \in \mathbf{N}$.

Лемма 1. Многочлен s_n делится на $x^2 + xy + y^2$ (делимость s_n на многочлен $P(x, y)$ здесь и ниже означает, что при любых $x, y \in \mathbf{Z}$ имеем $s_n = P(x, y)l(x, y)$, где $l \in \mathbf{Z}$) в точности если n не делится на 3.

Доказательство. Имеем $s_1 : x^2 + xy + y^2$, $s_2 : x^2 + xy + y^2$. Отсюда вследствие легко доказываемого тождества

$$s_{n+3} = (x^2 + xy + y^2)s_{n+1} + xy(x + y)s_n, \text{ где } n \in \mathbf{N}, \quad (*)$$

следует, что $s_n : x^2 + xy + y^2$ при любом n , не делящем-

ся на 3.

Предположим, что существует такое n , что n делится на 3 и s_n делится на $x^2 + xy + y^2$. Тогда вследствие (*)

$s_3 = 3xy(x + y)$ делится на $x^2 + xy + y^2$. Полагая $x = 1$, $y = 2$, получаем противоречие.

Лемма 2. Если n при делении на 3 дает в остатке единицу, то s_n делится на $(x^2 + xy + y^2)^2$.

Доказательство проводится с помощью тождества (*) и леммы 1.

(Заметим, что лемма 2 дает точное условие. Это легко доказать с помощью производной и комплексных чисел. Таким же образом доказывается, что s_n делится на $(x^2 + xy + y^2)^3$ лишь при $n = 1$.)

б) Положим в лемме 2 $x = a$, $y = b$. Так как $A_4 = \frac{A_2^2}{2}$,

а $A_2^2 = 4(a^2 + ab + b^2)^2$, то A_n делится на $\frac{A_4}{2}$. Обозначим

$d = \text{НОД}(|a|, |b|, |c|) \equiv (|a|, |b|, |c|)$, и пусть число 2 входит в разложение d в степени α . Тогда в A_4 двойка входит в степени $4\alpha + 1$, а в A_n при $n \geq 4$ – в степени $\beta \geq n\alpha + 1 \geq 4\alpha + 1$. Окончательно: A_n делится на A_4 .

в) Из леммы 1 следует, что при любом $k \geq 0$ число A_{3k+2} делится на A_2 , откуда $A_{3k+2}^2 = A_{6k+4} + 2B_{3k+2}$ делится на $A_2^2 = 2A_4$. Из пункта б) следует, что A_{6k+4} делится на A_4 . Значит, $2B_{3k+2}$ делится на $A_4 = 2B_2$, откуда B_{3k+2} делится на B_2 .

а) Дадим непосредственное доказательство этого частного случая утверждения пункта в). Имеем

$$\begin{aligned} & ((ab)^2 + \dots)((ab)^3 + \dots) = \\ & = ((ab)^5 + \dots) + a^2b^2c^2(a(b^3 + c^3) + \dots). \end{aligned}$$

Далее,

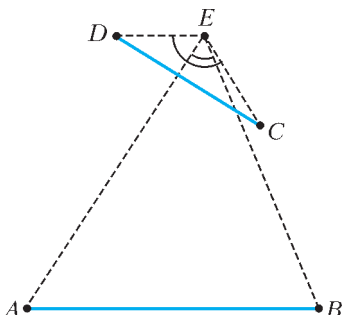
$$\begin{aligned} a(b^3 + c^3) + \dots &= a(-a)(b^2 - bc + c^2) + \dots = \\ &= (-a^2(b^2 + c^2) - \dots) + abc(a + \dots). \end{aligned}$$

Поскольку сумма в последних скобках равна нулю, делимость доказана.

Из этого простого рассуждения и родились постепенно все пункты задачи M2023.

В.Произволов, В.Сендеров

M2024. Существует ли выпуклый многоугольник, в котором каждая сторона равна какой-то диагонали, а каждая диагональ равна какой-то стороне?



Ответ: нет.

Предположим противное, и пусть AB – наибольшая сторона многоугольника, CD – наименьшая диагональ, E – такая вершина, что точка E и отрезок AB лежат по разные стороны от прямой CD (см. рисунок). Так как $AE \leq AB$ и $BE \leq AB$,

то $\angle AEB \geq 60^\circ$. С другой стороны, так как $DE \geq CD$ и $CE \geq CD$, то $\angle CED \leq 60^\circ$. Противоречие.

Б.Френкин

M2025*. Натуральные числа a, b, c, d образуют возрастающую арифметическую прогрессию.

а) Докажите, что для любого нечетного n произведение $abcd$ может оказаться n -й степенью натурального числа.

б) Докажите, что произведение $abcd$ не может быть квадратом натурального числа.

а) Пусть t нечетно. Будем искать прогрессию в виде $1 \cdot 2^x \cdot 3^y, 2 \cdot 2^x \cdot 3^y, 3 \cdot 2^x \cdot 3^y, 4 \cdot 2^x \cdot 3^y$. Найдем $y \geq 0$ такое, что $4y + 1 \vdots t$. Для этого достаточно положить

$$y = \frac{1}{4}(t-1) \quad \text{при} \quad t \equiv 1 \pmod{4} \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{4}(3t-1) \quad \text{при} \quad t \equiv 3 \pmod{4}.$$

Далее можно взять $x = 3y$.

б) Без ограничения общности будем считать, что члены прогрессии взаимно просты в совокупности: $\text{НОД}(a, b, c, d) \equiv (a, b, c, d) = 1$.

Нетрудно показать, что каждую арифметическую прогрессию, удовлетворяющую условиям пункта б), можно представить в одном из следующих видов:

$$\begin{aligned} & \div x^2, \quad y^2, \quad z^2, \quad t^2 \\ & \div 3x^2, \quad 2y^2, \quad z^2, \quad 6t^2 \\ & \div 6x^2, \quad y^2, \quad 2z^2, \quad 3t^2, \end{aligned}$$

где $x, y, z, t \in \mathbf{N}$.

Рассмотрим первый случай. Из системы

$$\begin{cases} 2y^2 = x^2 + z^2, \\ 2z^2 = y^2 + t^2 \end{cases}$$

имеем

$$2(yt)^2 - 2(xz)^2 = z^2t^2 - x^2y^2,$$

откуда

$$(2(u^2 - v^2))^2 + 4u^2v^2 = (z^2t^2 + x^2y^2)^2,$$

где $u = yt$, $v = xz$. Получаем

$$u^4 - u^2v^2 + v^4 = B^2, \quad \text{где} \quad u, v, B \in \mathbf{N}, \quad u \neq v. \quad (1)$$

Рассмотрим второй случай. Из системы

$$\begin{cases} 3x^2 + z^2 = 4y^2, \\ y^2 + 3t^2 = z^2 \end{cases}$$

имеем $x^2 + t^2 = y^2$. Так как $(a, b, c, d) = 1$, то число x нечетно, $(x, y) = 1$. Отсюда

$$(y+t, y-t) = 1, \quad y+t = u^2, \quad y-t = v^2,$$

где $u, v \in \mathbf{N}$. Перепишав второе равенство системы в виде

$$(y+t)^2 - (y+t)(y-t) + (y-t)^2 = z^2$$

и сделав замену, мы опять приходим к (1).

Третий случай аналогичен второму.

Докажем, что (1) невозможно.

Латинскими буквами мы будем обозначать в доказательстве натуральные числа.

Без ограничения общности будем считать $u > v$, $(u, v) = 1$. Перепишем (1) в виде

$$(u^2 - v^2)^2 + (uv)^2 = B^2. \quad (2)$$

Пусть u, v – нечетные числа. Поскольку $(u^2 - v^2, uv) = 1$, существуют m и n такие, что $(m, n) = 1$, m и n – разной четности, $u^2 - v^2 = 2mn$, $uv = m^2 - n^2$. Получаем

$$\begin{aligned} m^4 - m^2 n^2 + n^4 &= (m^2 - n^2)^2 + (mn)^2 = \\ &= (uv)^2 + \frac{(u^2 - v^2)^2}{4} = \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Мы получили равенство вида (2), в левой части которого стоят числа разной четности m и n .

Пусть u, v – числа разной четности. Будем считать, что u нечетно (случай нечетного v аналогичен). Существуют m и n такие, что $(m, n) = 1$, m и n – разной четности, $u^2 - v^2 = m^2 - n^2$, $uv = 2mn$. При этом m нечетно, поскольку в противном случае было бы $1 \equiv u^2 \equiv -n^2 \equiv -1 \pmod{4}$. Обозначив $v_0 = \frac{v}{2}$, получаем $uv_0 = mn$. Из этого равенства легко вывести, что существуют a, b, c, d такие, что $u = ac$, $v_0 = bd$, $m = ad$, $n = bc$. Поскольку $(u, v_0) = 1$, то $(a, b) = (c, d) = 1$. Из нечетности чисел u, m следует, что a, c, d нечетны. Значит, вследствие четности n , число b четно. Подставляя $u = ac$, $v = 2v_0 = 2bd$, $m = ad$, $n = bc$ в равенство $u^2 - v^2 = m^2 - n^2$, получаем

$$(a^2 + b^2)c^2 = (a^2 + 4b^2)d^2.$$

Обозначим $l = (a^2 + b^2, a^2 + 4b^2)$. Поскольку $3a^2 : l$, $3b^2 : l$, $(a, b) = 1$, то $3 : l$. При $l = 3$ было бы $a^2 + b^2 : 3$, откуда $a : 3$, $b : 3$ – в противоречии с $(a, b) = 1$. Получили $l = 1$. Отсюда $d^2 : a^2 + b^2$, $c^2 : a^2 + 4b^2$. Далее, поскольку $(c, d) = 1$, то $a^2 + b^2 : d^2$, $a^2 + 4b^2 : c^2$. Следовательно, $a^2 + b^2 = d^2$, $a^2 + (2b)^2 = c^2$. Поскольку $(a, b) = 1$, a нечетно, то $(a, 2b) = 1$. Значит, существуют u_1 и v_1 такие, что $(u_1, v_1) = 1$, u_1 и v_1 – числа разной четности, $a = u_1^2 - v_1^2$, $b = u_1 v_1$. Подставляя последние два равенства в $a^2 + b^2 = d^2$, получаем $u_1^4 - u_1^2 v_1^2 + v_1^4 = d^2$. При этом $u_1 v_1 = b < 2bd = v \leq uv$, откуда $u_1 v_1 < uv$.

Таким образом, утверждение доказано методом спуска. *Замечания*

1. Ясно, что утверждение пункта б) справедливо и для прогрессий с рациональными (но уже не обязательно целыми) положительными членами. Однако на прогрессии с произвольными целыми (не обязательно положительными) членами это утверждение распространить нельзя. Это показывает пример прогрессий вида $-m, -n, n, m$, где $n \in \mathbf{N}$.

2. Результат пункта б) – обобщение теоремы Ферма, по

которой не существует четырех различных квадратов натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию.

Рассмотрим вопрос о непостоянных арифметических прогрессиях вида a^2, b^2, c^2 , где $a, b, c \in \mathbf{N}$, $(a, b, c) = 1$. Легко показать, что таких прогрессий (и даже прогрессий вида a^2, b^4, c^2) бесконечно много (оба утверждения доказываются почти одинаково). Бесконечно много и прогрессий вида a^4, b^2, c^2 , уже в случае $a = 1$.

Существует и прогрессия a^4, b^4, c^2 : при $a = 1$, $b = 13$, $c = 239$. Можно доказать, что и таких прогрессий бесконечно много (по этому поводу см., например, книгу В.Серпинского «О решении уравнений в целых числах», с.69–71, www.math.ru). Однако прогрессий вида a^4, b^2, c^4 не существует, это тоже доказывается методом спуска. В частности, не существует прогрессий a^4, b^4, c^4 .

3. Рассмотрим арифметическую прогрессию a, b, c из различных натуральных чисел. Тем же способом, что и выше, легко доказать, что произведение abc может оказаться любой натуральной степенью, не кратной 3. Наметим доказательство того, что равенство $abc = e^3$ выполняться не может.

Пусть оно выполняется. Представим прогрессию в одном из трех видов:

$$\begin{aligned} &\div x^3, y^3, z^3 \\ &\div 2x^3, y^3, 4z^3 \\ &\div 4x^3, y^3, 2z^3, \end{aligned}$$

где $x, y, z \in \mathbf{N}$.

В первом случае имеем $x^3 + z^3 = 2y^3$, во втором $x^3 + 2z^3 = y^3$ (третий случай аналогичен второму). Однако доказано, что первое равенство выполняется лишь при $x = y = z$, второе – выполняться вообще не может. Это утверждение эквивалентно следующему.

Теорема. $2 = 1^3 + 1^3$ – единственное представление числа 2 в виде суммы кубов двух рациональных чисел. Из этого глубокого и важного предложения легко получаются такие утверждения.

Следствие 1. Уравнение $x^3 + 1 = y^2$ имеет в натуральных числах единственное решение: $(2, 3)$.

Следствие 2. Ни при каком $n > 1$ сумма $1^3 + \dots + n^3$ не является кубом натурального числа.

Следствие 3. Ни при каком $n > 1$ сумма $1^2 + \dots + n^2$ не является кубом натурального числа.

Легко показать, что следствия 1 и 2 эквивалентны, и вывести следствие 3 из следствия 2.

Утверждение следствия 1 было хорошо известно школьникам уже в математических кружках около полувека назад. Широко распространено убеждение, что это утверждение не имеет элементарного доказательства. (Это убеждение отразилось, например, в российском издании ценной и содержательной книги Чарльза Тригга «Задачи с изюминкой».) Однако в действительности даже приведенная выше теорема имеет абсолютно элементарное (хотя достаточно сложное и весьма длинное) доказательство.

Отметим, что справедливо гораздо более общее, нежели следствие 1,

Предложение. Система чисел (3, 2, 2, 3) – единственное решение уравнения $x^y - z^t = 1$ в натуральных числах, больших 1.

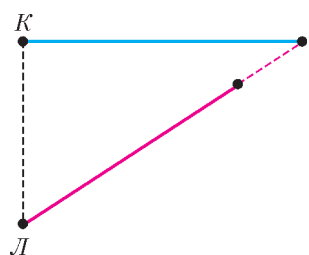
К обсуждению этой глубоко нетривиальной теоремы мы намерены вскоре вернуться в нашем журнале.

Возвращаясь к следствиям 2 и 3, отметим, что уравнение в натуральных числах $1^2 + \dots + x^2 = y^2$ имеет ровно два решения: (1, 1) и (24, 70). Известны различные доказательства этого факта. Однако все они неэлементарны.

С суммами же $1^3 + \dots + n^3$ дело обстоит по-другому. Легко доказать, что любая такая сумма – точный квадрат; несколько сложнее – что среди таких сумм бесконечно много четвертых степеней. Если же вы докажете, что при $n > 1$ восьмых степеней среди таких сумм нет, – значит, вы хорошо поняли решение этой задачи (по-видимому, самой трудной задачи в «Задачнике «Кванта» по математике в 2006 году).

В.Сендеров

Ф2033. По прямой дороге бежит кролик, его скорость постоянна и равна $v = 2$ м/с. Кролика замечает лиса – она находится в этот момент на расстоянии $L = 40$ м от дороги (кролик в этот момент также находится на расстоянии L от лисы). Лиса бросается в погоню, ее скорость равна по величине скорости кролика. На каком минимальном расстоянии от кролика лиса сможет оказаться через время $t = 40$ с после начала погони? Считать лису и кролика материальными точками.



Кролик за 40 секунд убежит на 80 метров, именно в эту точку и должна бежать лиса (см. рисунок). Найдем расстояние между участниками забега:

$$l = \sqrt{40^2 + 80^2} \text{ м} - 80 \text{ м} \approx 9,44 \text{ м}.$$

Ясно, что если у лисы времени будет побольше, то она сможет подобраться к кролику сколь угодно близко...

З.Рафаилов

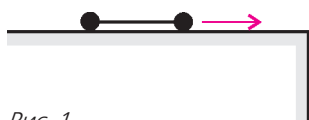


Рис. 1

Ф2034. По гладкой горизонтальной поверхности подставки скользит маленькая гантелька, состоящая из очень тонкого легкого стерженька длиной 5 см и двух маленьких массивных шариков на концах (рис.1). Скорость гантельки направлена вдоль стержня и составляет 2 м/с. Соскользнув с края подставки, гантелька продолжает движение. Оцените число оборотов, которое она совершит, падая с высоты 30 м.

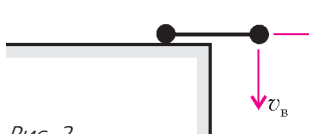


Рис. 2

«Передний» шарик гантельки проскочит край

подставки и сразу начнет набирать вертикальную скорость, направленную вниз, под действием силы тяжести (рис.2). За то малое время, пока к краю подбедет второй шарик, гантелька не успеет заметно повернуться, поэтому

$$v_b = g\tau = g \frac{L}{v_r} = 10 \cdot \frac{0,05}{2} \text{ м/с} = 0,25 \text{ м/с}$$

(кстати, можно оценить и угол поворота гантельки за это время: $\alpha = 0,5v_b (L/v_r)/L = 1/16$ рад $\approx 4^\circ$). Угловая скорость вращения далее не изменяется, она составляет $\omega = v_b/L$, и за время падения с высоты $H = 30$ м гантелька повернется на угол

$$\phi = \omega t = \frac{v_b}{L} \sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 12,3 \text{ рад}.$$

Это почти 2 полных оборота.

А.Повторов

Ф2035. Проводится расчет броска камня через тонкую вертикальную стенку. Расчет показал, что при бросании под углом 30° к горизонту минимальная скорость составляет 100 м/с, а при броске под углом 60° достаточно 40 м/с. Какой скорости может хватить, если разрешено подойти к стенке поближе? Бросок производят с поверхности земли.

Запишем уравнение траектории, проходящей через верхнюю точку стены:

$$H = L \tan \alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

где H – высота стены, L – расстояние от точки броска до нижней точки стены, v_0 – начальная скорость камня, α – угол броска. Мы бросаем оба раза из одной точки, находящейся на уровне поверхности земли, скорости и углы для этих случаев даны в условии задачи. Подставляя заданные значения, получаем простую систему уравнений

$$H = L \tan 30^\circ - \frac{10L^2}{2 \cdot 100^2 \cos^2 30^\circ},$$

$$H = L \tan 60^\circ - \frac{10L^2}{2 \cdot 40^2 \cos^2 60^\circ}.$$

Отсюда легко найти высоту стены: $H \approx 45$ м. Для такой стены скорость «ближнего» броска составляет примерно 30 м/с. Нет смысла считать точнее – данные в условии явно округлены.

З.Простов

Ф2036. На гладкой горизонтальной поверхности находится узкая коробка длиной $L = 0,2$ м и массой $M = 100$ г, посередине коробки покоится маленький шарик массой $m = 10$ г. Коробке ударом придают скорость $v = 10$ см/с параллельно ее длинной стороне. Шарик может двигаться только вдоль коробки, ударяясь абсолютно упруго о ее торцы. Сколько ударов произойдет за первую минуту после начала движения коробки? Найдите смещение коробки за это время.

Первый удар произойдет через 1 секунду. Заметим, что при абсолютно упругом лобовом ударе двух тел оста-

ется неизменной их относительная скорость (это легко доказать, а знать этот факт полезно, многие задачи становятся проще...). Тогда каждый следующий удар будет происходить через 2 секунды после предыдущего. За оставшиеся 59 секунд произойдет 29 ударов, и еще секунду будет «безударное» движение. Найдем скорость коробки после первого удара, воспользовавшись законами сохранения импульса и энергии

$$mv = mu_1 + Mu_2 \quad \text{и} \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{Mu_2^2}{2}.$$

Учтем, что $M = 10m$, тогда одно возможное значение скорости коробки будет $u_{21} = 2v/11$, второе – $u_{22} = 0$. После первого удара получается первое значение, после второго скорость должна измениться, но суммарные импульс и энергия системы остаются прежними, а возможные решения уравнений мы уже перечислили, поэтому коробка после второго удара остановится. Затем все снова повторится. За две секунды коробка проедет расстояние $u_2 L/v = 2L/11 = 2/55$ м, следующие две секунды она не двигается. Тогда смещение коробки за минуту составит

$$l = \frac{2L}{11} \cdot 14 + \frac{L}{11} = \frac{29L}{11} \approx 0,5 \text{ м}.$$

А.Шариков

Ф2037. В сосуде постоянного объема находится смесь гелия и кислорода. Смесь нагревают от 300 К до 400 К, при этом половина атомов гелия покидают сосуд через очень мелкие трещины в стенках, а давление газа остается прежним. Во сколько раз изменяется при этом плотность смеси? Моль кислорода имеет массу 32 г, моль гелия – 4 г.

Это совсем простая задача. Пусть количества гелия и кислорода вначале равны v_1 и v_2 соответственно. Общее количество вещества в системе после нагрева должно составлять $0,5v_1 + v_2$. Поскольку давление газа не изменяется,

$$(v_1 + v_2)T_1 = (0,5v_1 + v_2)T_2,$$

откуда $v_1 = v_2$. Итак, количество атомов гелия вначале было равно количеству молекул кислорода. Объем смеси при нагревании не изменился, тогда отношение плотностей будет равно

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{0,5M_1 + M_2}{M_1 + M_2} = \frac{0,5 \cdot 4 + 32}{4 + 32} = \frac{17}{18}.$$

Г.Азов

Ф2038. С порцией гелия производят циклический процесс – расширение газа при постоянном давлении, затем охлаждение газа при неизменном его объеме и, наконец, сжатие газа без подвода тепла снаружи до начального давления. Может ли термодинамический КПД такого цикла оказаться больше 50%?

Работа в цикле равна (см. рисунок)

$$A = p_1(V_2 - V_1) - A_1,$$

где A_1 – работа газа при адиабатическом расширении

от V_1 до V_2 (газ в данном процессе адиабатически сжимается, поэтому соответствующее слагаемое берется со знаком «минус»).

Тепло газ получает только на участке изобарического расширения. Гелий – одноатомный газ, поэтому полученное на изобаре количество теплоты составляет

$$Q = \nu C_p \Delta T = \frac{C_p p_1 \Delta V}{R} = 2,5 p_1 (V_2 - V_1),$$

где $C_p = 2,5R$ – молярная теплоемкость одноатомного газа при постоянном давлении.

Термодинамический КПД данного цикла

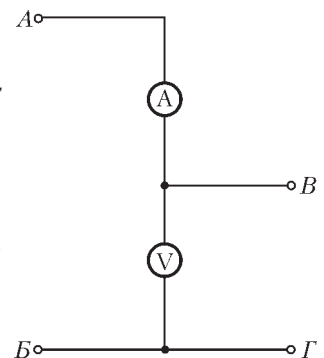
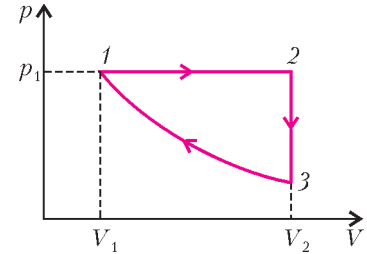
$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{p_1(V_2 - V_1) - A_1}{2,5 p_1 (V_2 - V_1)} \leq \frac{1}{2,5} = 0,4$$

и, тем более, меньше 50%.

А.Зильберман

Ф2039. Стрелочные вольтметры высокого класса точности имеют, как правило, очень низкое сопротивление, и включать их в цепь для измерения напряжения во многих случаях просто недопустимо – слишком сильно при этом изменится режим схемы (напряжение между исследуемыми точками при подключенном вольтметре станет совсем другим). Для измерения напряжений порядка 5 В предлагается использовать схему, состоящую из точного вольтметра V – предел измерений 10 В, сопротивление прибора 1000 Ом, класс точности 0,2, т.е. погрешность не превосходит 0,2% от максимального значения шкалы, и микроамперметра A – ток полного отклонения 100 мкА, сопротивление прибора 1000 Ом, класс точности 2,5, т.е. погрешность не превышает 2,5% от максимального значения его шкалы. К точкам А и Б схемы (см. рисунок) подключают измеряемое напряжение, между точками В и Г включают регулируемый источник напряжения – лабораторный блок питания, напряжение которого можно очень плавно изменять в широких пределах. При измерении напряжение источника плавно изменяют, добиваясь минимального тока через микроамперметр. За результат принимают показание вольтметра при «нулевом» токе через микроамперметр. Будем считать, что минимальный ток, уверенно фиксируемый микроамперметром, составляет 2 мкА. Определите погрешность измерений получившегося «вольтметра» и его сопротивление.

Погрешность измерения напряжения складывается из неточности вольтметра и неточности определения «ба-

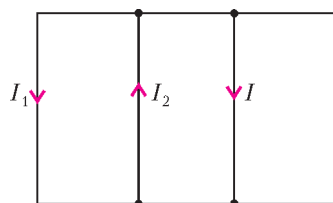


ланса» напряжений. Первая погрешность составляет 0,2% от максимального значения шкалы вольтметра, т.е. 0,02 В, вторая равна произведению сопротивления микроамперметра и минимального тока через него, который мы можем зафиксировать, т.е. $10^3 \text{ Ом} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ А} = 0,002 \text{ В}$, что на порядок меньше первого вклада в погрешность измерений. Погрешность микроамперметра на результат не влияет – микроамперметр вообще мог бы иметь только одно «нулевое» значение на шкале. Всего получается погрешность не более 0,022 В, что составляет примерно 0,2% от максимального значения шкалы прибора, – в результате мы практически реализуем класс точности нашего вольтметра, т.е. 0,2%. «Входной» ток нашего вольтметра не превышает 2 мкА, поэтому сопротивление получается равным $5 \text{ В} / (2 \cdot 10^{-6} \text{ А}) = 2,5 \cdot 10^6 \text{ Ом}$, что во много раз превышает сопротивление обычных «стрелочных» вольтметров на данное значение измеряемого напряжения! При таком способе измерений удастся объединить точность прибора (вольтметра) и высокую чувствительность микроамперметра.

З.Хитров

Ф2040. Параллельно включены катушки с индуктивностями 1 Гн и 2 Гн, резистор сопротивлением 100 Ом и конденсатор емкостью 100 мкФ. К цепи подключают внешний источник напряжения, и после нескольких переключений элементов в некоторый момент через катушки протекают равные по величине токи 0,2 А, а через резистор в этот момент течет ток 0,1 А. Затем внешний источник отключают, предоставляя параллельную цепь самой себе. Найдите полный заряд, который после этого протечет через резистор, а также полное количество теплоты, которое выделится в резисторе. Элементы цепи считать идеальными.

Обозначим направления и величины токов на «скелете» цепи в начальный момент (см. рисунок): I_1 – через катушку индуктивностью



катушку индуктивностью $2L = 2 \text{ Гн}$, I_2 – через катушку индуктивностью L и I – через резистор сопротивлением $R = 100 \text{ Ом}$. Начиная с этого момента ЭДС индукции катушек все время

одинаковы, а значит, и изменения магнитного потока катушек равны друг другу. Тогда при токе J через катушку индуктивностью $2L$ ток через катушку индуктивностью L будет равен (направления токов-стрелок оставим прежними) $2I_1 + I_2 - 2J$, и через большое время этот ток станет равным J (к этому времени конденсатор будет окончательно разряжен и ток через резистор упадет до нуля). Отсюда $J = (2I_1 + I_2)/3$. В условии задачи не сказано, куда текут начальные токи. Очевидно, что нужно рассмотреть два случая – токи направлены в одну сторону ($I_1 = -I_2$) и в разные стороны ($I_1 = I_2$). При этом направление тока через резистор для нас несущественно. Тогда в первом случае $J = I_1/3$, во втором случае $J = I_1$, т.е. токи через

катушки после длительных изменений вернуться к начальным значениям.

Теперь можно закончить решение задачи. В любой момент времени ЭДС индукции любой из катушек равна напряжению на резисторе, т.е.

$$2L\Delta I_1 = RI\Delta t = R\Delta q_R.$$

При суммировании получится в левой части $2L(J - I_1)$, в правой части Rq_R . Окончательно, для первого случая прошедший через резистор заряд будет равен

$$|q_R| = \frac{4LI_1}{3R} = 2,67 \cdot 10^{-3} \text{ Кл},$$

для второго случая заряд получится нулевым.

Баланс энергий для первого случая дает количество теплоты

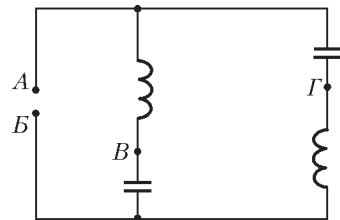
$$W_1 = \frac{4LI_1^2}{3} + \frac{CI^2R^2}{2} = 0,0583 \text{ Дж}.$$

Для второго случая энергии катушек в начальный момент и в конце одинаковы, остается только второе слагаемое, т.е.

$$W_2 = \frac{CI^2R^2}{2} = 0,005 \text{ Дж}.$$

А.Старов

Ф2041. Источник переменного напряжения включен между точками А и Б цепи (см. рисунок). При какой частоте источника амплитуда напряжения, измеренного между точками В и Г, будет равно в 10 раз больше амплитуды напряжения источника? Конденсаторы имеют емкости $C = 10 \text{ мкФ}$, катушки – индуктивности $L = 1 \text{ Гн}$.



Токи через первую и вторую LC-цепочки одинаковы, напряжения конденсатора и катушки в каждой цепочке противофазны. Отсюда следует, что напряжение между точками В и Г равно сумме модулей напряжений катушки и конденсатора, а между точками А и Б – их разности. Тогда

$$U_1 + U_2 = 10(U_1 - U_2), \text{ или } 9U_1 = 11U_2.$$

Если напряжение на катушке больше, чем на конденсаторе, то

$$9\omega L = \frac{11}{\omega C},$$

и для частоты получаем

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{11}{9LC}} = 349,6 \text{ с}^{-1}, \text{ или } f_1 = \frac{\omega}{2\pi} = 55,6 \text{ Гц}.$$

Но есть и вторая возможность, когда напряжение конденсатора больше по величине, чем напряжение катушки. В этом случае частота равна

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{9}{11LC}} = 286 \text{ с}^{-1}, \text{ или } f_2 = 45,5 \text{ Гц}.$$

В первом случае частота выше резонансной частоты

последовательного LC -контура (она равна примерно 50,3 Гц), во втором случае – ниже.

Ф.Азов

Ф2042. На гладкой горизонтальной поверхности находится груз массой $M = 2$ кг, к его боковым стенкам прикреплены две одинаковые пружины жесткостью $k = 100$ Н/м каждая (рис.1). Одна из пружин прикреплена концом к стене, конец другой пружины мы перемещаем по горизонтали. Координата точки A при этом изменяется по закону $x = 0,02 \cos 20t$ (в этой формуле время t измеряется в секундах, координата x – в метрах). Найдите амплитуду колебаний груза на этой частоте.

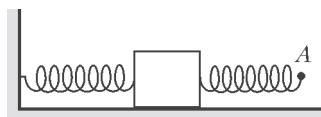


Рис. 1

Установившиеся колебания груза происходят с частотой вынуждающей силы $\omega = 20$ с⁻¹, на груз действует сила $k(x - y) - ky$ (рис.2), ускорение груза определяется этой силой. Для упрощения вычислений полагаем длины пружин в недеформированном

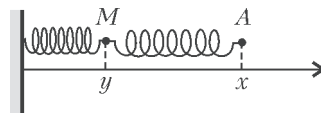


Рис. 2

положении равными нулю – выражения получаются попроще, а дополнительные силы, постоянные по величине, на колебания с частотой ω влияния не оказывают. Координата груза $y(t)$ определяется из уравнения

$$My'' = -2ky + kx.$$

Если записать $y = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$, то получим

$$-MA_0\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) + 2kA_0 \cos(\omega t + \varphi) = 0,02k \cos \omega t.$$

Для нахождения сдвига фаз – угла φ – рассмотрим момент времени t_1 , для которого $\omega t_1 = \pi/2$. Если частота отлична от резонансной, то получаем $\sin \varphi = 0$. Возьмем $\varphi = 0$. Тогда амплитуда колебаний груза будет равна

$$A_0 = \frac{0,02k}{2k - M\omega^2} = -0,0033 \text{ м}.$$

Амплитуда на данной частоте получилась отрицательной – колебания груза противофазны колебаниям точки A . Можно получить «нормальную», положительную амплитуду колебаний, если немного вернуться назад и взять значение $\varphi = \pi$. Для меньшей частоты (ниже резонансной) колебания груза будут происходить в фазе с вынуждающими колебаниями конца пружины.

М.Учителев



Победители конкурса

«Задачник «Кванта»

2006 года

Первое место заняли

по математике

Нижибицкий Евгений – г. Краснодар, школа 73;

по физике

Пех Павел – г. Красноярск, школа 145,

Пастухов Владимир –

п. Красное-на-Волге Костромской обл., школа.

Второе место заняли

по математике

Балай Евгений – Киргизия, г. Бишкек, ФМЛ;

по физике

Фея Олег – Украина, г. Днепропетровск, лицей 1,

Абдрахманов Владимир – г. Волгоград, лицей 3.

Третье место заняли

по математике

Есин Алексей – ст. Староникольская Краснодарского кр., школа 55,

Каровски Сергей – Старый Оскол, школа 22;

по физике

Василевич Владимир – г. Армавир, школа 9,

Трегубов Илья – г. Армавир, школа 9.



Победители, занявшие первые места по математике и физике, награждаются комплектами журнала «Квант» за второе полугодие 2007 года.

Задачи

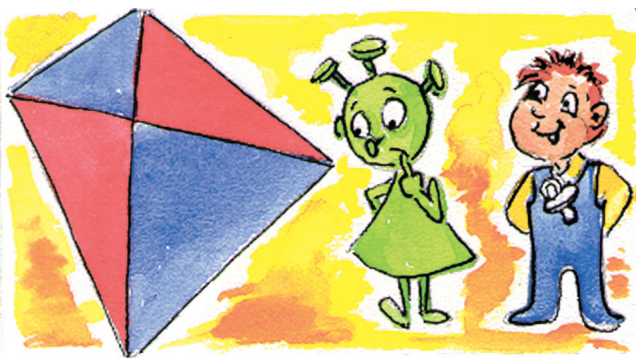
1. Профессор Мумбум-Плюмбум заподозрил, что некоторые студенты спят на его лекции. Чтобы установить число безобразников, он незадолго до начала лекции скрытно установил храпометры во всех углах аудитории, представляющей собой правильный шестиугольник с длиной стороны a . Каждый храпометр улавливает количество спящих на расстоянии, не превышающем a . После лекции оказалось, что все храпометры в сумме зафиксировали 7 спящих. Сколько студентов спало на лекции?

К. Каибханов



2. Диагонали разрезали четырехугольник на треугольники, которые попеременно окрашены в красный и синий цвета. Известно, что сумма площадей красных треугольников равна сумме площадей синих. Докажите, что какая-то диагональ четырехугольника делит его площадь пополам.

В. Произволов



3. Верно ли, что любое натуральное число, делящееся на 9, отличается от некоторого натурального числа n на сумму цифр этого числа n ?

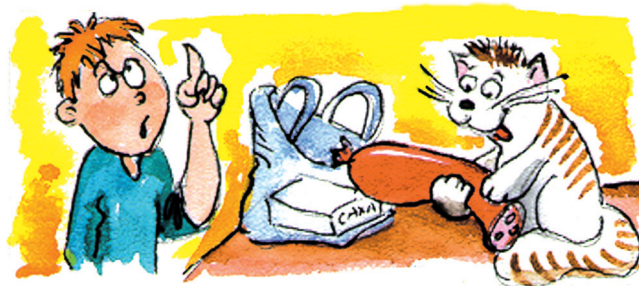
И. Акулич

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.



4. Однажды физик, купив сахар и колбасу, решил проверить их вес на чашечных весах, случайно обнаруженных в магазине. Сахар на левой чашке весов он уравновесил гирей 8 кг на правой чашке, а колбасу на правой чашке уравновесил гирей 2 кг на левой чашке. Каково же было его удивление, когда, придя домой и проверив вес каждого товара на высокоточных электронных весах, он обнаружил, что общий вес его покупки больше 10 килограммов. При этом колбаса оказалась тяжелее сахара. «Ага, весы были неравноплечные!» — решил физик. Сколько в таком случае весят колбаса и сахар, если вес каждого товара выражается целым количеством килограммов?

Г. Гальперин



5. В отчете Французской Академии наук за 1733 год среди прочих результатов и достижений указывается, что когда некое тело подносится близко к лицу, оно «вызывает такие же ощущения, как если бы натолкнуться на невидимую паутину». О каком физическом эффекте идет здесь речь?

С. Кротов



Иллюстрация Д. Гришуковой

Случай с Толей Клюквинным

С. ДВОРЯНИНОВ

УЧИЛСЯ МОЙ ДРУГ ТОЛЯ КАК ВСЕ. НЕПЛОХО. НОРМАЛЬНО. Были, конечно, и проблемы. Его из начальной школы в пятый класс не хотели переводить. Вернее, все хотели, а учитель математики не хотел. Из-за таблицы умножения это было. Никак она Толику не давалась. Все он мог по математике, а умножать — ну не получалось.

И вот в самый последний день учебного года, когда годовые оценки все получили, а Толик не получил, наш Иван Петрович вызвал Клюквина в опустевшую учительскую, чтобы дать ему задание на лето.

Мы с ребятами не спешили расходиться по домам и ждали Толика в нашем классе. Вот, наконец, Толя показался на пороге.

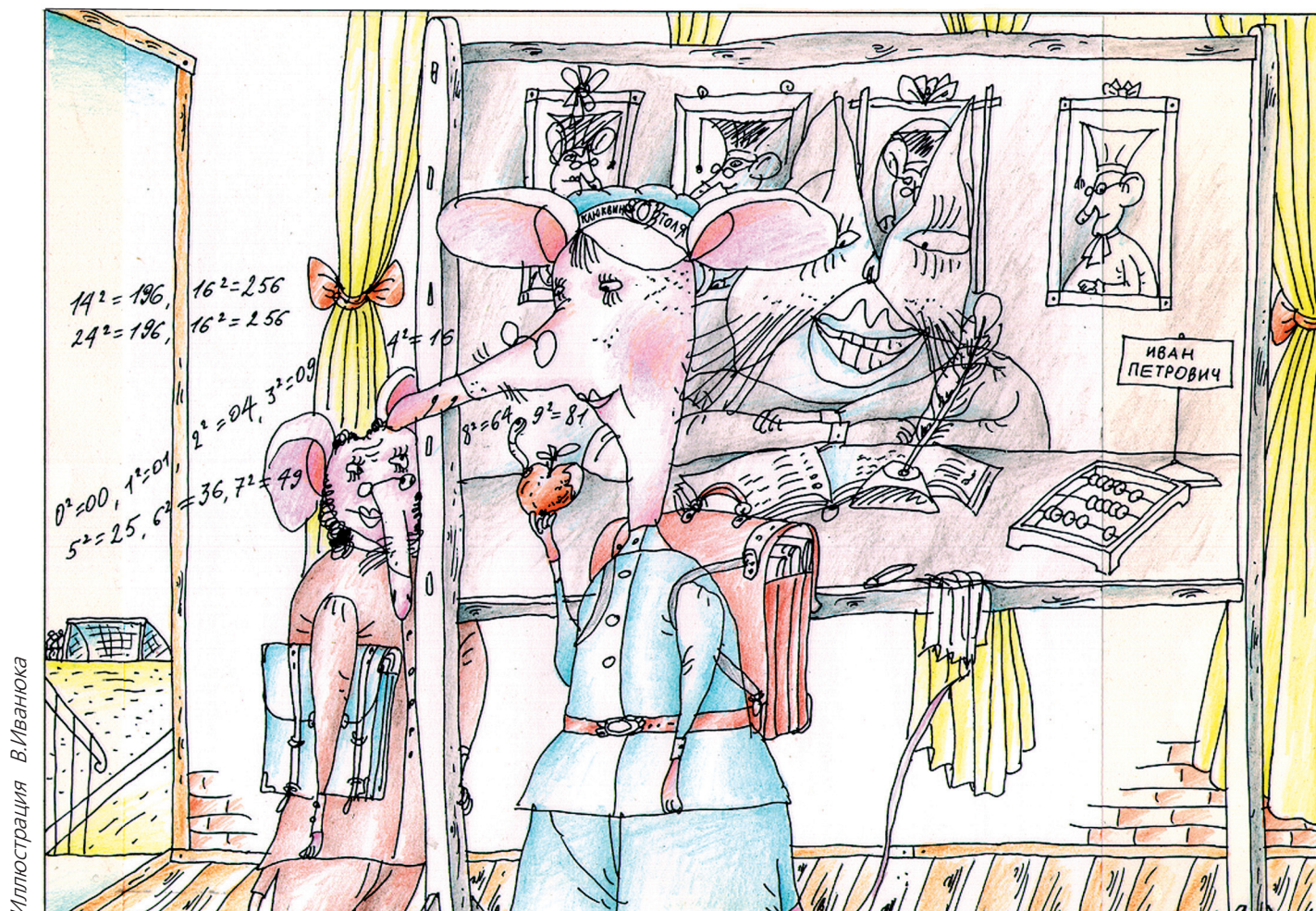
— Ну, что там? Как вопрос решился? — почти хором

мы обратились к нему.

— Да пока не решился... Вернее, мне надо решить одну задачу...

— Какую? Рассказывай! Какую задачу учитель тебе задал?

— Смотрел-смотрел на меня Иван Петрович, — начал Толик, — вздыхал-вздыхал, а потом говорит: «Вот есть интересная задача. Возьми-ка ты, Толя, 2000 идущих подряд натуральных чисел 1, 2, ..., 2000. Каждое из них можно на себя умножить. Это называется — вычислить квадрат. Так вот, рассмотри все эти 2000 квадратов. А сказать ты мне должен, у скольких полученных квадратов цифра десятков нечетная. Лето не только для того, чтобы мяч гонять! Справишься с работой — пойдешь в пятый класс. А нет — на второй год».



— Я тут же в уме прикинул, — горестно заключил Толя, — каникулы длятся почти сто дней, так что мне каждый день надо будет находить двадцать произведений!

Мы все молчали: число 2000 впечатляло. Две тысячи квадратов! Сколько бумаги уйдет! И от этого зависело будущее нашего друга! Ясное дело, никто из нас этому не обрадовался. Ребята в классе были дружные, у нас такая была классная футбольная команда — чемпион района (среди нашего возраста, конечно), Толик — вратарь. Нельзя нам такого друга терять. Толика надо было спасать. Конечно, проще всего каждому взять на себя 200 чисел и найти их квадраты. Но и это работа немалая.

— А компьютер на что? — подал голос Жора-Ноутбук. У нашего полузащитника кроме футбола была еще страсть — компьютер и все, что с ним связано. — Напишем программу, и компьютер нам все посчитает.

— Кто много считает, тот мало думает, — отозвался Ваня-Теоретик. Он тоже всегда с нами в нашей команде. Только запасной.

— На самом деле все просто! — зазвенел его голос в классе. — Если взять все числа от 1 до 2000, то среди них 1000 нечетных. Квадрат нечетного числа оканчивается нечетной цифрой, значит, среди всех квадратов 1000 будут оканчиваться нечетной цифрой. Все!

— Причем тут последняя цифра! — набросились мы на Ваню. — Вечно ты все перепутаешь! Иван Петрович спрашивает о предпоследней цифре!

— Да, — сконфузился наш теоретик, — я поспешил. Обычно в задачах спрашивают о последней цифре, а тут речь идет о предпоследней, о цифре десятков. Это посложнее... — Он вышел к доске и взял мел.

— Пусть p — последняя цифра в десятичной записи натурального числа n . Тогда $n \neq p$ четное число, а число $n - p$ оканчивается нулем и поэтому делится на 10. Следовательно, произведение этих двух чисел $(n + p)(n - p) = n^2 - p^2$ делится на 20. Отсюда следует, что, во-первых, последние цифры чисел n^2 и p^2 совпадают и, во вторых, предпоследние цифры (т.е. количество десятков) либо обе четные, либо обе нечетные. Нас интересует нечетное количество десятков числа n^2 . Значит, надо посмотреть, у квадратов каких цифр количество десятков нечетно.

Тут наш полузащитник Петя не удержался, и на доске мгновенно (так он порой выстреливал мяч на половину футбольного поля противника) появилась такая запись:

$$\begin{aligned} 0^2 &= 00, \quad 1^2 = 01, \quad 2^2 = 04, \quad 3^2 = 09, \quad 4^2 = 16, \\ 5^2 &= 25, \quad 6^2 = 36, \quad 7^2 = 49, \quad 8^2 = 64, \quad 9^2 = 81. \end{aligned}$$

После этого мел перешел к нашему правому крайнему Коле:

— Среди этих десяти чисел число десятков нечетно лишь у $4^2 = 16$ и $6^2 = 36$. Последняя цифра в каждом из этих двух случаев равна 6. Следовательно, следовательно... — он задумался, но тут на помощь пришел наш центральный нападающий Вася, поставивший

последнюю точку в логической комбинации, начатой Ваней-Теоретиком:

— ...Следовательно, число десятков в записи квадрата любого числа n^2 нечетно лишь тогда, когда число n оканчивается цифрой $p = 4$ или $p = 6$. Таких чисел в каждом десятке два. Следовательно, среди квадратов $1^2, 2^2, \dots, 2000^2$ пятая часть, т.е. четыреста, имеют нечетную цифру десятков. Ура! Задача решена! Ответ в твоей, Толик, задаче (или нашей задаче?) такой: из 2000 квадратов идущих подряд натуральных чисел 400 имеют в своей записи нечетную цифру десятков.

Толя Клюквин сперва обрадовался, а потом приуныл:

— Уж больно сложное решение, начну рассказывать, запутаюсь. А проще есть решение?

Тут настал черед нашего невозмутимого Паши-Прагматика. Не в его правилах было увлекаться разными футбольными трюками, он отдавал предпочтение силовым приемам. Обычно он бил у нас одиннадцатиметровые.

— Да что тут рассуждать, для всяких там n и p уравнения составлять! Проще решаем задачу! Практически! Видите, на стене висит таблица? — он показал на пожелтевший лист ватмана. — В ней приведены квадраты ста целых чисел от 1 до 100. У скольких среди этих квадратов цифра десятков нечетная? В первом десятке два таких квадрата, во втором тоже два: $14^2 = 196$ и $16^2 = 256$, в третьем десятке тоже два: $24^2 = 576$ и $26^2 = 676$, и так далее. Всего 20 нужных нам квадратов среди первых ста. И так в каждой следующей сотне, потому что цифра десятков квадрата натурального числа зависит только от последних двух цифр этого натурального числа. Всего в двадцати сотнях имеем $20 \times 20 = 400$ нужных нам квадратов с нечетной цифрой десятков.

Помните, Иван Петрович говорил, что математика — это искусство избегать вычислений? Так что твое летнее задание, Толя, — Паша повернулся к Клюквину, — не на таблицу умножения, не на вычисления двух тысяч квадратов, а на... в общем, на математику!

Толя Клюквин благополучно перешел в пятый класс. Летом у него, как и у всех нас, было много времени для футбола. Да, обязательно надо еще сказать, что после этого случая Толя Клюквин увлекся не только футболом, но и алгеброй с геометрией, и теорией чисел. Таблицу умножения, конечно, выучил-таки, про это и говорить нечего. А кроме того, стал читать всякие математические книжки, в олимпиадах участвовать и даже подписался на физико-математический журнал. Про футбол мы тоже не забывали. Так что со временем нашу ФМШ — физико-математическую школу — люди знающие и понимающие толк в науке и спорте стали называть футбольно-математической школой.