XLVII Международная математическая олимпиада

XLVII Международная математическая олимпиада (ММО) прошла с 6 по 18 июля 2006 года. в столице Словении – городе Любляне. Словения – небольшая, но очень красивая страна с разнообразным природным ландшафтом. После двух туров соревнований 498 участников олимпиады из 90 стран познакомились с самыми живописными местами Словении – побывали в пещере близ города Постойна, полюбовались живописным озером и замком Блед, побывали в альпийских предгорьях, искупались в Адриатическом море.

В команду России вошли шесть выпускников, многократных победителей Всероссийских олимпиад:

Александр Магазинов –Ярославль, лицей 33,
Ростислав Девятов – Москва, лицей «Вторая школа»,
Тимофей Образцов – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Павел Затицкий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Алексей Катышев – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Александр Глазман – Санкт-Петербург, ФМЛ 239.

Команда России получила 3 золотые и 3 серебряные медали. Вот результаты выступления наших участников (правильное решение каждой из шести задач оценивалось в 7 баллов):

Участник	Баллы за задачи						Сумма баллов	Медаль
	1	2	3	4	5	6		
А. Магазинов	7	7	7	7	7	7	42	золотая
Р. Девятов	7	7	0	7	7	7	35	золотая
Т. Образцов	7	7	0	7	7	0	28	золотая
П. Затицкий	7	1	2	7	7	1	25	серебряная
А. Катышев	7	7	2	7	0	0	23	серебряная
А. Глазман	7	7	0	7	0	0	21	серебряная

В неофициальном командном зачете наша команда заняла почетное второе место. Вот результаты первых двадцати команд:

№	Страна	Общее число баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
1.	Китай	214	6	0	0
2.	Россия	174	3	3	0
3.	Корея	170	4	2	0
4.	Германия	157	4	0	2
5.	США	154	2	4	0
6.	Румыния	152	3	1	2
7.	Япония	146	2	3	1
8.	Иран	145	3	3	0
9.	Молдавия	140	2	1	3
10.	Тайвань	136	1	5	0
11.	Польша	133	1	2	3
12.	Италия	132	2	2	0
13.	Вьетнам	131	2	2	2
14.	Гонконг	129	1	3	2
15.	Таиланд	123	1	3	2
16.	Канада	123	0	5	1
17.	Венгрия	122	0	5	1
18.	Словакия	118	1	2	3
19.	Турция	117	0	4	1
20.	Великобритания	117	0	4	1

Особо отметим успехи ярославца Саши Магазинова. В прошлом году он получил на международной олимпиаде золотую медаль, отстав лишь на один балл от абсолютных победителей, а в этом году, несмотря на сложность задач, показал стопроцентный результат – набрал 42 балла.

Кроме Александра, такого же результата смогли добиться лишь двое участников олимпиады: Юрий Борейко из Молдавии и Джию Лию из Китая. Все шесть задач больше не удалось решить никому.

Благодарим всех, кто так или иначе содействовал подготовке и успешному выступлению сборной России. Мы благодарны тренерскому совету сборной в составе: А.Бадзян, С.Берлов, И.Богданов, А.Гарбер, А.Глазырин, В.Дольников, Р.Карасев, Д.Карпов, М.Пратусевич, Г.Челноков, работавшему с командой на летних учебно-тренировочных сборах. Мы также признательны Федеральному агентству по образованию, Российской академии повышения квалификации работников образования, Стипендиальному фонду Владимира Потанина, компании «Спортмастер», оказывавшим содействие в работе по подготовке национальной команды России по математике.

В заключение приводим условия задач олимпиады и их решения, придуманные нашими школьниками во время олимпиады.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Внутри треугольника выбрана точка P такая, что

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB .$$

Докажите, что $AP \geq AI$, причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда P совпадает с I.

(Корея)

2. Диагональ правильного 2006-угольника P называется *хорошей*, если ее концы делят границу P на две части, каждая из которых содержит нечетное число сторон. Стороны P также называются *хорошими*. Пусть P разбивается на треугольники 2003 диагоналями, никакие две из которых не имеют общих точек внутри P. Какое наибольшее число равнобедренных треугольников, каждый из которых имеет две хорошие стороны, может иметь такое разбиение?

(Сербия)

3. Определите наименьшее действительное число M такое, что неравенство

$$\left|ab\left(a^2-b^2\right)+bc\left(b^2-c^2\right)+ca\left(c^2-a^2\right)\right| \leq M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

выполняется для любых действительных чисел a, b, c.

(Ирландия)

4. Найдите все пары (x, y) целых чисел такие, что

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2 .$$

(США)

5. Пусть $P(x)$ – многочлен степени $n>1$ с целыми коэффициентами, k – произвольное натуральное число. Рассмотрим многочлен

$$Q(x)=P\left(P\left(\ldots P\left(P(x)\right)\ldots\right)\right)$$

(здесь P применен k раз). Докажите, что существует не более n целых чисел t таких, что $Q(t) = t$.

(Румыния)

6. Каждой стороне b выпуклого многоугольника P поставлена в соответствие наибольшая из площадей треугольников, содержащихся в P, одна из сторон которых совпадает с b. Докажите, что сумма площадей, соответствующих всем сторонам P, не меньше удвоенной площади многоугольника P.

(Сербия)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1 (А.Катышев). Из условия вытекает, что

$$\angle ABC + \angle ACB =$$
$$= \angle PBA + \angle PCA + \angle PBC + \angle PCB = 2(\angle PBC + \angle PCB),$$

откуда

$$\angle BPC = 180° - (\angle PBC + \angle PCB) =$$
$$= 180° - \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2} =$$
$$= 180° - (\angle IBC + \angle ICB) = \angle BIC.$$

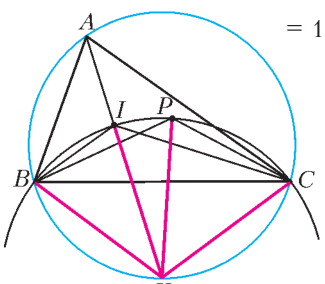

Рис. 1

Поскольку P и I лежат в одной полуплоскости относительно BC, точки B, I, P, C лежат на одной окружности (рис.1). Пусть X – точка пересечения AI с описанной окружностью треугольника ABC. Как известно, $XI = XB = XC$. Действительно,

$$\angle IBX = \angle IBC + \angle CBX = \angle IBC + \angle CAX =$$
$$= \frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle BAC}{2} = \angle IBA + \angle IAB = \angle BIX,$$

следовательно, в треугольнике BIX стороны XI и XB равны. Аналогично, $XI = XC$. Значит, X – центр окружности, проходящей через B, I, C. На этой окружности также лежит точка P. Так как AI проходит через центр этой окружности, то AI – минимальное из расстояний от A до точек этой окружности, причем $AP > AI$ в случае, если точка P не совпадает с точкой I.

2 (А. Глазман). *Ответ*: 1003.

Пусть концы некоторой диагонали D разбивают границу P на две части, содержащие k и $2006 - k$ сторон соответственно, $k \le 1003$. Число k назовем *длиной* диагонали D (сторону многоугольника P считаем диагональю длины 1). Таким образом, хорошие диагонали (или стороны) – это диагонали нечетной длины.

Рассмотрим разбиение многоугольника P на треугольники 2003 диагоналями. Треугольник из разбиения назовем *хорошим*, если он равнобедренный и имеет две стороны нечетной длины. В хорошем треугольнике есть две равные боковые стороны, каждая длины l, и основание, длина которого равна $2l$ или $2006 - 2l$, т.е. четна. Итак, в хорошем треугольнике боковые стороны имеют нечетную длину, а основание – четную длину.

Оценим число хороших треугольников.

Докажем следующую лемму: *Пусть диагональ D длины k из рассматриваемого разбиения делит P на две части. Тогда в меньшей из частей имеется не более $\left[\frac{k}{2}\right]$ хороших треугольников.* (Меньшей назовем часть, не содержащую центр многоугольника P. Если $k = 1003$, т.е. D проходит через центр, то меньшей объявим любую из двух частей. Если $k = 1$, то меньшая часть – отрезок.)

При $k = 1$ утверждение леммы очевидно – в меньшей части вообще нет треугольников. Применим индукцию по k, т.е. предположим, что лемма верна для диагоналей длины 1, 2, …, $k - 1$, и рассмотрим меньшую часть Q для некоторой диагонали AB длины $k \ge 2$. В разбиении имеется треугольник ABC, лежащий в Q. Часть Q разбивается на треугольник ABC и меньшие части R и S для диагоналей AC и BC (рис.2). Так как часть Q меньшая, то длины диагоналей AC и BC меньше k и дают в сумме k. Пусть длины диагоналей AC и BC равны a и b, $a + b = k$. По предположению

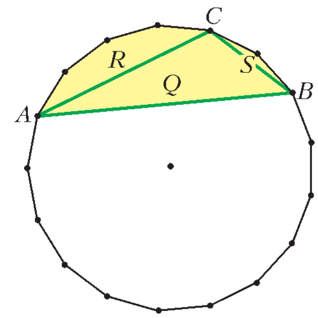

Рис. 2

индукции, в частях R и S не более $\left[\frac{a}{2}\right]$ и $\left[\frac{b}{2}\right]$ хороших треугольников соответственно. Если треугольник ABC не является хорошим, то в части Q не больше чем $\left[\frac{a}{2}\right] + \left[\frac{b}{2}\right] \le \left[\frac{a+b}{2}\right] = \left[\frac{k}{2}\right]$ хороших треугольников. Если же треугольник ABC хороший, то его равными сторонами могут быть только AC и BC. Тогда $a = b = \frac{k}{2}$ нечетно, и в части Q хороших треугольников не больше чем $1 + \left[\frac{a}{2}\right] + \left[\frac{b}{2}\right] = 1 + \frac{a-1}{2} + \frac{b-1}{2} = \frac{k}{2} = \left[\frac{k}{2}\right]$. Переход обоснован, и лемма доказана.

Рассмотрим в разбиении треугольник KLM, внутри или на границе которого содержится центр многоугольника P. Многоугольник разбит на треугольник KLM и меньшие части для диагоналей KL, LM, MK (рис.3). Пусть длины диагоналей KL, LM, MK равны x, y, z соответственно, $x + y + z = 2006$. Воспользуемся леммой.

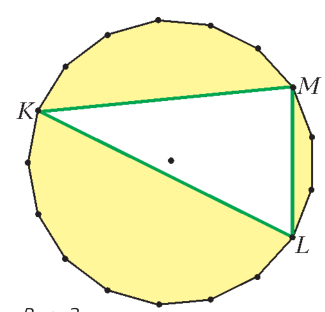

Рис. 3

Если треугольник KLM не является хорошим, то в разбиении P не больше чем $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{y}{2}\right] + \left[\frac{z}{2}\right] \le \left[\frac{x+y+z}{2}\right] = 1003$ хороших треугольников. Если же треугольник KLM хороший, то два из чисел x, y, z нечетны (пусть, скажем, x и y нечетны). Тогда в разбиении P хороших треугольников не больше чем

$$1 + \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{y}{2}\right] + \left[\frac{z}{2}\right] = 1 + \frac{x-1}{2} + \frac{y-1}{2} + \frac{z}{2} = \frac{x+y+z}{2} = 1003.$$

Приведем пример с 1003 хорошими треугольниками. Занумеруем вершины (подряд по часовой стрелке) числами 1, 2, …, 2006 и соединим диагоналями вершины 1 и 3, 3 и 5, … …, 2005 и 1. Эти диагонали отрезают 1003 хороших треугольника, а оставшийся 1003-угольник можно разбить на треугольники произвольно.

3 (А. Магазинов). *Ответ*: $\frac{9\sqrt{2}}{32}$.

Заметим, что левая часть неравенства раскладывается на множители как $\left|(b-a)(c-b)(a-c)(a+b+c)\right|$. Это выражение симметрично относительно переменных a, b, c, поэтому положим для определенности $a \le b \le c$. Обозначим $s_1 = (b-a)^2$, $s_2 = (c-b)^2$, $s_3 = (a-c)^2$, $s = (a+b+c)^2$, $k = a^2+b^2+c^2$. Легко видеть, что $s_1+s_2+s_3+s = 3k$.

Заменим b на середину отрезка между a и c, т.е. рассмотрим тройку a', b', c', где $a' = a$, $b' = \frac{a+c}{2}$, $c' = c$. Очевидно, $s_3' = (a'-c')^2 = s_3$. Кроме того, $s_1s_2 \le s_1's_2'$, поскольку

$$(b-a)(c-b) \le \left[\frac{(b-a)+(c-b)}{2}\right]^2 = \left[\frac{c-a}{2}\right]^2 = (b'-a')(c'-b'),$$

а также $s_1+s_2 \ge s_1'+s_2'$, поскольку

$$(b-a)^2+(c-b)^2 = (c-a)^2 - 2(b-a)(c-b) = (c'-a')^2 - 2(b-a)(c-b) \ge$$
$$\ge (c'-a')^2 - 2(b'-a')(c'-b') = (b'-a')^2 + (c'-b')^2.$$

Теперь тройку чисел a', b', c' сдвинем на некоторое число x, т.е. рассмотрим тройку $a'' = a'+x$, $b'' = b'+x$, $c'' = c'+x$. Ясно, что $s_1'' = (b''-a'')^2 = s_1'$, $s_2'' = (c''-b'')^2 = s_2'$, $s_3'' = (c''-a'')^2 = s_3'$. При фиксированных a', b', c' квадратичная функция $(a'+b'+c'+3x)^2$ принимает все неотрицательные значения, поэтому за счет выбора x добьемся, чтобы $s'' = (a''+b''+c'')^2 = (a'+b'+c'+3x)^2$ стало равным числу $3k - (s_1''+s_2''+s_3'')$. (Число $3k-(s_1''+s_2''+s_3'')$ неотрицательно, и даже не меньше s, так как

$$3k-(s_1''+s_2''+s_3'') = (s_1+s_2+s_3+s) - (s_1'+s_2'+s_3') = s + \left[(s_1+s_2)-(s_1'+s_2')\right].)$$

У троек a, b, c и a'', b'', c'' совпадают суммы квадратов, так как $3\left(a^2+b^2+c^2\right) = 3k = s_1''+s_2''+s_3''+s'' = 3\left(a''^2+b''^2+c''^2\right)$. Но $s_1s_2 \le s_1''s_2''$, $s_3 = s_3''$, $s \le s''$, значит, $s_1s_2s_3s_4 \le s_1''s_2''s_3''s_4''$, т.е. квадрат левой части исходного неравенства для тройки a, b, c не меньше, чем для тройки a'', b'', c''. Это означает, что для поиска минимального M достаточно рассматривать только тройки $a \le b \le c$ с условием $b-a = c-b$.

Зафиксируем $k = a^2+b^2+c^2 \ge 0$. Пусть $s_1 = (b-a)^2 = s_2 = (c-b)^2 = t$, тогда $s_3 = (c-a)^2 = 4t$, $s = (a+b+c)^2 = 3k-(s_1+s_2+s_3) = 3k-6t$, отсюда квадрат левой части $F(t) = \left[(b-a)(c-b)(a-c)(a+b+c)\right]^2 = 12\left(kt^3-2t^4\right)$. Вычислив производную $F'(t) = 12\left(3kt^2-8t^3\right) = 12t^2(3k-8t)$, видим, что $F(t)$ возрастает при $t < \frac{3k}{8}$, убывает при $t > \frac{3k}{8}$ и имеет максимум при $t = \frac{3k}{8}$. Отсюда $F(t) \le F\left(\frac{3k}{8}\right) = \frac{81}{512}k^4$, поэтому при $M = \sqrt{\frac{81}{512}} = \frac{9\sqrt{2}}{32}$ исходное неравенство верно. С другой стороны, при $a = \sqrt{2}-3$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{2}+3$ имеем $k = 24$, $t = 9 = \frac{3k}{8}$, и при $M = \frac{9\sqrt{2}}{32}$ исходное неравенство превращается в равенство.

4 (Т.Образцов). *Ответ*: (0; −2), (0; 2), (4; −23), (4; 23).

Если $x < 0$, то $1 < 1+2^x+2^{2x+1} < 1+1+2 = 4$, поэтому решений нет.

При x = 0, 1, 2 левая часть уравнения равна 4, 11, 37 соответственно. Точный квадрат получается только при $x = 0$, что дает пары $(0; \pm 2)$.

Пусть $x \ge 3$. Положим $y \ge 0$ (пары (x,y) и $(x,-y)$ входят в множество решений одновременно). Если $y \le 2^x$, то $y^2 \le 2^{2x} < 1+2^x+2^{2x+1}$, если же $y \ge 2^{x+1}$, то $y^2 \ge 2^{2x+2} = 2^{2x+1}+2^{2x}+2^{2x} > 1+2^x+2^{2x+1}$, поэтому возможно только $2^x < y < 2^{x+1}$. Преобразуем уравнение к виду $(y-1)(y+1) = 2^x\left(2^{x+1}+1\right)$. Числа $y-1$ и $y+1$ оба четные, причем одно из них не делится на 4, значит, другое делится на 2^{x-1} и не делится на 2^x, т.е. имеет вид $2^{x-1}(2k-1)$ для натурального k. При $k = 1$ имеем $2^{x-1}(2k-1) = 2^{x-1} < 2^x$, а если $k \ge 3$, то $2^{x-1}(2k-1) > 4\cdot 2^{x-1} = 2^{x+1}$. Но по доказанному $2^x \le y \pm 1 \le 2^{x+1}$, значит, возможно только $k = 2$. Остаются две возможности: либо $y-1 = 3\cdot 2^{x-1}$, либо $y+1 = 3\cdot 2^{x-1}$. Подставляя в исходное уравнение $y = 3\cdot 2^{x-1} \pm 1$, получаем $1+2^x+2^{2x+1} = 9\cdot 2^{2x-2} \pm 6\cdot 2^{x-1}+1$, $2^x+2^{2x+1} = 8\cdot 2^{2x-2} + 2^{2x-2} \pm 3\cdot 2^x$, $2^x = 2^{2x-2} \pm 3\cdot 2^x$. В одном случае получаем $2^{2x-2}+2\cdot 2^x = 0$, что невозможно, в другом случае $4\cdot 2^x = 2^{2x-2}$, $2^{x+2} = 2^{2x-2}$, $x+2 = 2x-2$, $x = 4$ и $y = \pm 23$.

5 (П.Затицкий). Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Если $T(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, y и z – различные целые числа, то $T(y)-T(z)$ делится на $y-z$.*

Действительно, если $T(x) = a_lx^l + a_{l-1}x^{l-1} + \ldots + a_1x + a_0$, то $T(y)-T(z) = a_l\left(y^l-z^l\right) + a_{l-1}\left(y^{l-1}-z^{l-1}\right) + \ldots + a_1(y-z)$, и каждое из слагаемых делится на $y-z$.

Лемма 2. *Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_l$ – различные числа, $l \ge 2$, и пусть $b_1, b_2, \ldots, b_l$ таковы, что для всех $1 \le i < j \le l$ выполнено $\left|a_i-a_j\right| = \left|b_i-b_j\right|$. Тогда найдется такая линейная функция $f(x) = \pm x + c$, что $f(a_i) = b_i$ для всех i = 1, ..., l.*

Предположим, что в равенстве $\left|a_i-a_j\right| = \left|b_i-b_j\right|$ для двух пар индексов (r,s) и (s,t) модуль раскрывается с разными знаками, т.е. пусть $a_r-a_s = b_r-b_s$ и $a_s-a_t = b_t-b_s$. Складывая, получаем $a_r-a_t = b_r+b_t-2b_s$. Но $a_r-a_t = \pm(b_r-b_t)$, откуда $b_s = b_r$ или $b_s = b_t$ – противоречие. Из доказанного вытекает, что если $a_1-a_2 = b_1-b_2$, то для i = 3, 4, ..., l выполнено $a_1-a_i = b_1-b_i$, и, далее, для всех $1 \le i < j \le l$ выполнено $a_i-a_j = b_i-b_j$, значит, можно взять $f(x) = x+(b_1-a_1)$. Если же $a_1-a_2 = b_2-b_1$, то для i = 3, 4, ..., l выполнено $a_1-a_i = b_i-b_1$, и, далее, для всех $1 \le i < j \le l$ выполнено $a_i-a_j = b_j-b_i$, и можно положить $f(x) = x+(b_1-a_1)$.

Леммы доказаны.

Перейдем к решению задачи. Обозначим $Q_l(x) = P\left(P\left(\ldots P\left(P(x)\right)\ldots\right)\right)$, где P применен l раз. Предположим, что для некоторого k найдутся $n+1$ таких различных целых чисел $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$, что $Q_k(t_i) = t_i$ для i = 1, 2, ..., $n+1$. Согласно лемме 1,

$$t_i - t_j = Q_k(t_i) - Q_k(t_j) \vdots Q_{k-1}(t_i) - Q_{k-1}(t_j) \vdots \ldots \vdots P(t_i) - P(t_j) \vdots t_i - t_j.$$

Отсюда

$$\left|t_i - t_j\right| = \left|P(t_i) - P(t_j)\right|,$$

значит, по лемме 2, найдется такая линейная функция $f(x)$, что $f(t_i) = P(t_i)$ для всех i = 1, 2, …, n + 1. Но отсюда следует, что многочлен $P(x) - f(x)$ степени n имеет n + 1 корней $t_1, t_2, \ldots t_{n+1}$ – противоречие.

6 (Р.Девятов). В решении будет использовано понятие *суммы Минковского* двух выпуклых многоугольников и *неравенство Брунна–Минковского* (см., например, статью Н.Васильева «Сложение фигур» в «Кванте» № 4 за 1976 г.).

Пусть граница многоугольника P (при обходе против часовой стрелки) составлена из векторов $\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_n}$. Допустим, что при проектировании на прямую l_1, перпендикулярную $\overrightarrow{p_1}$, многоугольник P перейдет в отрезок длины h_1. Ясно, что h_1 равно полусумме длин проекций векторов $\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_n}$ на прямую l_1 (рис.4) и $\frac{p_1 h_1}{2}$ – площадь, сопоставленная стороне p_1.

Пусть P' – многоугольник, полученный из P центральной симметрией; его граница (при обходе против часовой стрелки) составлена из векторов $\overrightarrow{p_1'} = -\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2'} = -\overrightarrow{p_2}$, …, $\overrightarrow{p_n'} = -\overrightarrow{p_n}$. Рассмотрим сумму Минковского Q многоугольников P и P', т.е. многоугольник, граница которого составлена из векторов $\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_1'}, \overrightarrow{p_2}, \overrightarrow{p_2'}, \ldots, \overrightarrow{p_n}, \overrightarrow{p_n'}$, взятых в таком порядке, чтобы Q оказался выпуклым. В многоугольнике Q стороне $\overrightarrow{p_1}$ (или стороне $\overrightarrow{p_1'}$) сопоставлена площадь $\frac{p_1 H_1}{2}$, где H_1 равно полусумме длин проекций векторов $\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_1'}, \overrightarrow{p_2}, \overrightarrow{p_2'}, \ldots, \overrightarrow{p_n}, \overrightarrow{p_n'}$ на прямую l_1, т.е. $H_1 = 2h_1$. Аналогично рассматривая все стороны, получаем, что сумма $A(P)$ площадей, соответствующих сторонам в многоугольнике P, вчетверо меньше, чем сумма $A(Q)$ площадей, соответствующих сторонам в многоугольнике Q:

$$A(Q) = \frac{p_1 H_1}{2} + \frac{p_1' H_1}{2} + \frac{p_2 H_2}{2} + \frac{p_2' H_2}{2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{p_n H_n}{2} + \frac{p_n' H_n}{2} = 2p_1 h_1 + 2p_2 h_2 + \ldots + 2p_n h_n = 4A(P).$$

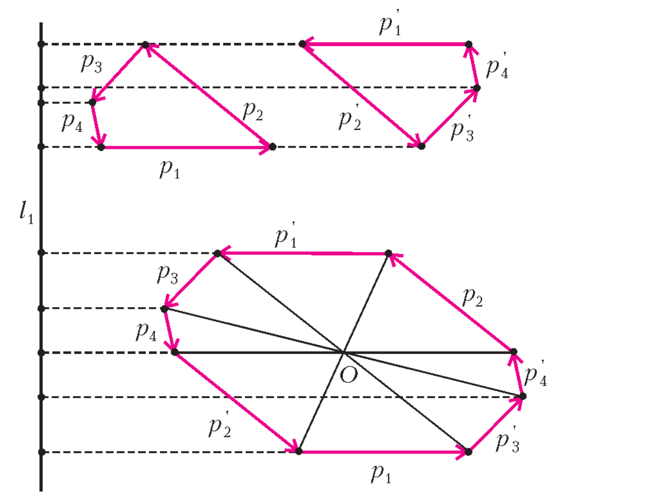

Рис. 4

Многоугольник Q имеет центр симметрии O. Соединив O с вершинами, разобьем Q на треугольники. Из симметрии следует, что высота в треугольнике, отвечающем стороне p_1 (или p_1'), равна $\frac{H_1}{2}$. Складывая площади всех треугольников, получаем, что площадь $S(Q)$ многоугольника Q равна

$$\frac{p_1 H_1}{2} + \frac{p_1' H_1}{2} + \frac{p_2 H_2}{2} + \frac{p_2' H_2}{2} + \ldots + \frac{p_n H_n}{2} + \frac{p_n' H_n}{2} = \frac{A(Q)}{2}.$$

Для завершения решения достаточно установить, что $S(Q) \geq 4S(P)$. Но это неравенство получается из применения к P и P' неравенства Брунна–Минковского: если два выпуклых многоугольника имеют площади S_1 и S_2, а их сумма Минковского имеет площадь S, то $\sqrt{S} \geq \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$.

Публикацию подготовили
Н.Агаханов, П.Кожевников, Д.Терёшин

XXXVII Международная физическая олимпиада

Очередная международная олимпиада школьников по физике проходила в Сингапуре с 8 по 17 июля 2006 года. Основные события разворачивались на территории Наньянгского университета, точнее сказать – целого комплекса университетов и колледжей, по площади соответствующего небольшому городу. В олимпиаде участвовали 388 школьников из 85 стран, и еще 3 страны прислали своих представителей.

В сборную России вошли:

Евгений Богер – Киров, ФМЛ (учителя физики: П.Е.Канин – Кировский ФМЛ и М.В.Гырдымов – Центр дополнительного образования «Одаренный школьник»),

Сергей Зоркин – Иркутск, лицей ИрГУ (учитель физики – Э.Г.Аман),

Павел Мостовых – Санкт-Петербург, школа 306 (учителя физики: И.А.Барыгин – ФТИ им. А.Ф.Иоффе и Е.М.Степаненко – школа 306),

Антон Попов – Челябинск, лицей 31 (учитель физики – И.А.Иоголевич),

Александр Киселев – Москва, школа 1189 им. И.В. Курчатова (учитель физики – С.В.Толоконников).

Команду России возглавили профессор МФТИ С.М.Козел и доцент МФТИ В.П.Слободянин. В качестве наблюдателя от России (прибывшего на олимпиаду за счет поддержки спонсоров) присутствовал учитель физики Челябинского лицея 31 И.А.Иоголевич. Как и в предыдущие годы, подготовка сборной команды России проводилась на базе Московского физико-технического института.

Состязающимся на олимпиаде были предложены три теоретических задания, каждое из которых оценивалось в 10 баллов, и одно экспериментальное – 20 баллов. Как теоретические, так и экспериментальное задания были достаточно трудными и громоздкими.

По итогам соревнований золотые медали получили 37 участников, серебряные — 49 и бронзовые — 82 участника олимпиады.

Сравнительные результаты выступления на олимпиаде 14 лучших команд (по количеству и «качеству» медалей) приведены в таблице:

N	Страна	Золотых медалей	Серебряных медалей	Бронзовых медалей
1.	Китай	5		
2.	США	4	1	
3.	Индонезия	4	1	
4.	Корея	4	1	
5.	Россия	2	3	
6.	Венгрия	1	4	
7.	Иран	1	4	
8.	Таиланд	1	4	
9.	Тайвань	3	1	1
10.	Германия	2	1	2
11.	Индия	2		3
12.	Азербайджан	1	3	1
13.	Румыния	1	2	2
14.	Сингапур	1	1	3

Члены сборной команды России показали следующие результаты:

Участник	Теория (30 баллов)	Эксперимент (20 баллов)	Сумма баллов (50)	Медаль
Зоркин Сергей	22,90	15,25	38,15	золото
Киселев Александр	27,30	10,15	37,45	золото
Богер Евгений	23,60	10,40	34,00	серебро
Попов Антон	19,50	12,00	31,50	серебро
Мостовых Павел	20,80	9,80	30,60	серебро

Условия теоретических заданий олимпиады приведены ниже. Здесь же кратко расскажем об экспериментальном туре, на котором за 5 часов участникам предлагалось выполнить комплексное задание, состоящее из четырех частей, объединенных общей тематикой. Используя оборудование СВЧ диапазона радиоволн с длиной волны порядка 3 см, необходимо было выполнить следующие упражнения: измерить длину волны с помощью радиоинтерферометра, аналогичного оптическому интерферометру Майкельсона; определить показатель преломления диэлектрика для радиоволн, используя явление интерференции в толстой плоскопараллельной диэлектрической пластине; исследовать явление туннелирования радиоволн через узкий зазор между двумя парафиновыми призмами при полном внутреннем отражении; исследовать явление интерференционного отражения радиоволн от пространственной решетки, состоящей из системы металлических проволок, образующих двумерную решетку, и определить постоянную решетки.

Физическое содержание предложенного эксперимента заслуживает самой высокой оценки, однако объем экспериментального задания оказался запредельным. Каждая из четырех частей эксперимента могла бы служить основой для хорошего самостоятельного экспериментального задания. В результате ни один участник олимпиады не смог выполнить эксперимент до конца.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

Задача 1. Гравитация в нейтронном интерферометре

Описание явления. Мы рассматриваем известный эксперимент с нейтронным интерферометром в идеализированном упрощенном варианте, в рамках которого обсуждаются идеальные делители пучков нейтронов и нейтронные зеркала, расположенные внутри интерферометра. В этом эксперименте изучается влияние гравитации на волны де Бройля нейтронов.

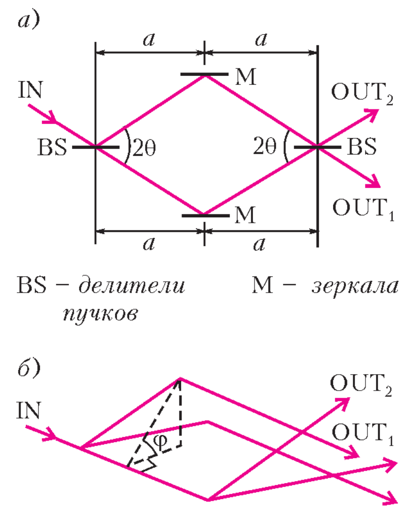

Рис. 1

Схема нейтронного интерферометра, который аналогичен оптическому интерферометру, показана на рисунке 1,*а*. Нейтроны попадают в интерферометр через вход «IN», следуют по двум возможным путям и регистрируются в одном из двух выходных каналов «OUT_1» или «OUT_2». Два плеча интерфорометра ограничивают область в форме ромба, площадь которого составляет несколько квадратных сантиметров.

Нейтронные волны де Бройля (с длиной волны порядка 10^{-10} м) интерферируют так, что при горизонтальном расположении интерферометра все нейтроны попадают в выходной канал «OUT_1». Интерферометр может поворачиваться на произвольный угол φ вокруг горизонтальной оси, совпадающей с направлением входного пучка (рис.1,*б*). При повороте интерферометра наблюдается перераспределение нейтронов между выходными каналами «OUT_1» и «OUT_2», которое периодически зависит от угла поворота φ.

Геометрия опыта. При $\varphi = 0$ плоскость интерферометра расположена горизонтально; при $\varphi = 90°$ эта плоскость вертикальна, и выходы расположены над осью поворота.

1) Чему равна площадь ромба A, ограниченная плечами интерферометра? (1 балл)

2) Чему равна высота H выходного канала «OUT_1» над горизонтальной плоскостью, содержащей ось вращения? (1 б.)

Выразите A и H через величины a, θ и φ.

Относительная оптическая длина пути. Относительная оптическая длина пути $N_{\text{опт}}$ (число) определяется как отношение геометрической длины пути (расстояния) к длине волны λ. Если λ изменяется вдоль пути, то $N_{\text{опт}}$ получается интегрированием величины λ^{-1} по пути.

3) Найдите разность $\Delta N_{\text{опт}}$ относительных оптических длин путей плеч интерферометра при его повороте на угол φ. Выразите ответ через величины a, θ и φ, массу нейтрона M, де-бройлевскую длину волны нейтронов λ_0, ускорение свободного падения g и постоянную Планка h. (3б.)

4) Введите объемный параметр $V = \dfrac{h^2}{gM^2}$ и выразите $\Delta N_{\text{опт}}$ через величины A, V, λ_0 и φ. Приведите численное значение параметра V при $M = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг, $g = 9{,}800$ м $\cdot$ с$^{-2}$ и $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с. (1б.)

5) Сколько периодов изменения интенсивности потока нейтронов в выходном канале «OUT_1» – от максимальной до минимальной и обратно к максимальной – произойдет при изменении угла поворота φ от $-90°$ до $90°$? (2б.)

Экспериментальные данные. В эксперименте использовался интерферометр со следующими параметрами: $a = 3{,}600$ см и $\theta = 22{,}10°$, при этом наблюдалось 19,00 полных периодов изменения интенсивности при изменении угла поворота в указанных выше пределах.

6) Чему равнялась величина λ_0 в этом эксперименте? (1б.)

7) В другом аналогичном эксперименте с использованием нейтронов с де-бройлевской длиной волны $\lambda_0 = 0{,}2000$ нм наблюдалось 30,00 полных периодов. Чему равнялась площадь ромба A в этом случае? (1б.)

Подсказка: если $|\alpha x| \ll 1$, то $(1+x)^\alpha$ можно заменить на $1+\alpha x$.

Задача 2. Наблюдение за движущимся стержнем

Физическая модель. Отверстие камеры-обскуры находится в точке $x = 0$ на расстоянии D от оси x (рис.2). С помощью этой камеры получается изображение стержня путем открытия отверстия на очень маленький промежуток времени. Вдоль оси x на одинаковых расстояниях друг от друга нанесены метки. По ним на снимках, полученных с помощью камеры-обскуры, можно определить кажущуюся (видимую на снимке) длину стержня. На снимке длина покоящегося стержня равна L. Однако стержень не покоится, а движется с постоянной скоростью v вдоль оси x.

Общие соотношения. Пусть на изображении, полученном с помощью камеры-обскуры, бесконечно малый отрезок стержня находится в точке $\tilde{x}$.

1) Каково *реальное положение* данного отрезка на оси x в момент получения снимка? Ответ необходимо выразить через $\tilde{x}$, D, L, v и скорость света $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ м/с. Воспользуйтесь обозначениями $\beta = \dfrac{v}{c}$ и $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, если это позволяет упростить окончательный результат. (0,6 балла)

2) Найдите также обратное соотношение, т.е. выразите $\tilde{x}$ через x, D, L, v и c. (0,9 б.)

Примечание: реальное положение – это положение в системе отсчета, в которой камера покоится.

Кажущаяся длина стержня. Камера-обскура фиксирует изображение в момент, когда реальное положение середины стержня на оси x соответствует точке x_0.

3) Выразите кажущуюся (видимую на снимке) длину стержня через заданные в условии величины. (1,5 б.)

4) Как зависит кажущаяся длина стержня от времени? (1,5 б.)

Симметричный снимок. На одном из снимков, полученных с помощью камеры-обскуры, оба конца стержня расположены на одном и том же расстоянии от отверстия камеры.

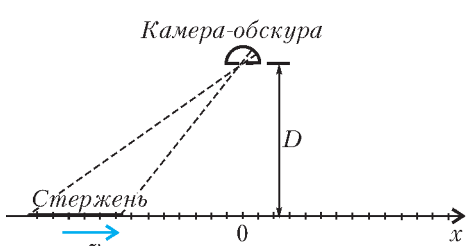

Рис. 2

5) Чему равна кажущаяся длина стержня на этом снимке? (0,8 б.)

6) Каково реальное положение середины стержня в момент, когда сделан этот снимок? (1 б.)

7) Где на этом снимке находится изображение середины стержня? (1,2 б.)

Очень ранний и очень поздний снимки. Один из снимков получен в ранний момент времени, когда стержень был очень далеко от камеры и приближался к ней. Второй снимок получен в поздний момент времени, когда стержень уже удалился на большое расстояние от камеры. На одном из этих снимков длина стержня равна 1,00 м, на другом – 3,00 м.

8) Какая длина соответствует раннему и позднему снимкам? (0,5 б.)

9) Определите скорость стержня v. (1 б.)

10) Определите длину покоящегося стержня L. (0,6 б.)

11) Численно определите кажущуюся длину стержня на симметричном снимке (вопрос 5). (0,4 б.)

Задача 3

Это задание состоит из пяти независимых частей. Каждая из них требует не точного ответа, а только оценки по порядку величины.

Цифровая камера. Рассмотрим цифровую фотокамеру с квадратной матрицей со стороной $L = 35$ мм и разрешением $N_p = 5$ мегапикселей. Фокусное расстояние объектива камеры $f = 38$ мм. На объективе указывается одно из так называемых F-чисел (2; 2,8; 4; 5,6; 8; 11; 16; 22), которое обозначается $F_\#$ и определяется как отношение фокусного расстояния объектива к диаметру D его апертуры, т.е. $F_\# = f/D$.

1) Какое наилучшее пространственное разрешение Δx на матрице может быть достигнуто оптической системой данной камеры? Выразите ваш результат через длину волны света λ и число $F_\#$. Найдите числовое значение Δx для $\lambda = 500$ нм. (1 балл)

2) Для заданного размера матрицы найдите число мегапикселей матрицы, необходимое для достижения полученного значения наилучшего пространственного разрешения. (0,5 б.)

3) Иногда фотографы стараются использовать камеры с уменьшенным размером апертуры. Предположим, что мы располагаем камерой с $N_0 = 16$ мегапикселей и вышеуказанными размерами матрицы и фокусного расстояния объектива. Какое значение $F_\#$ следует выбрать, чтобы качество изображения не было ограничено оптикой камеры? (0,5 б.)

4) Известно, что человеческий глаз обладает угловым разрешением φ, приблизительно равным 2 угловым секундам, и что минимальное разрешение обычного принтера составляет 300 точек на дюйм. На каком минимальном расстоянии от глаза следует держать распечатанную на таком принтере фотографию, чтобы не различать отдельных точек? (0,5 б.)

Данные: 1 дюйм = 25,4 мм; 1 угловая секунда = $= 2{,}91 \cdot 10^{-4}$ рад.

Яйцо вкрутую. Яйцо, взятое непосредственно из холодильника при температуре $T_0 = 4$ °С, кладут в кастрюлю с кипящей водой с температурой T_1. Температура воды все время поддерживается постоянной.

5) Какое количество энергии U необходимо затратить для того, чтобы яйцо сварилось? (0,5 б.)

6) Найдите поток тепла J, который протекает через поверхность яйца. (0,5 б.)

7) Найдите тепловую мощность P, передаваемую яйцу. (0,5 б.)

8) Как долго нужно варить яйцо для того, чтобы оно сварилось вкрутую? (0,5 б.)

Подсказка: вы можете использовать упрощенную форму закона Фурье: $J = \kappa \Delta T / \Delta r$, где ΔT – разность температур на расстоянии Δr, которое можно принять равным характерному линейному размеру в данной задаче; поток тепла J имеет размерность $Вт \cdot м^{-2}$.

Данные: плотность $\rho = 10^3$ кг $\cdot$ м$^{-3}$; удельная теплоемкость яйца $c = 4{,}2$ Дж $\cdot$ К$^{-1} \cdot$ г$^{-1}$; радиус яйца $R = 2{,}5$ см; температура свертывания альбумена (яичного белка) $T_c = 65$ °С; коэффициент передачи тепла $\kappa = 0{,}64$ Вт $\cdot$ К$^{-1} \cdot$ м$^{-1}$ (предполагается одинаковым для жидкой и твердой фаз альбумена).

Молния. Предлагается рассмотреть простейшую модель молнии. Молния возникает за счет накопления электрических зарядов в облаках. При этом нижняя часть облака обычно заряжается положительно, а верхняя часть – отрицательно. Земля под облаком также заряжается отрицательно. Когда возникающее электрическое поле превышает значение, при котором происходит пробой воздуха, возникает электрический разряд, который и представляет собой молнию.

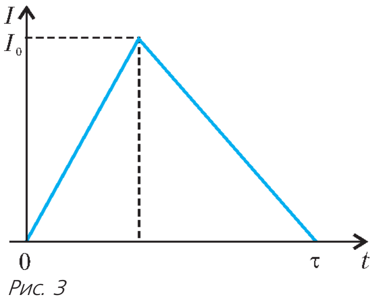

Рис. 3

Ответьте на следующие вопросы, используя данную упрощенную зависимость силы тока I от времени t (рис.3; здесь $I_0 = 100$ кА, $\tau = 0,1$ мс). Расстояние между нижней частью облака и земной поверхностью $h = 1$ км; напряженность электрического поля, приводящая к пробою влажного воздуха, $E_0 = 300\ \text{кВ}\cdot\text{м}^{-1}$; полное число молний на Земле за год $32\cdot 10^6$; население Земли $6,5\cdot 10^9$ человек.

9) Какова величина полного заряда Q, протекающего при разряде молнии? (0,5 б.)

10) Какова средняя сила тока I, протекающего между нижней частью облака и земной поверхностью во время молнии? (0,5 б.)

11) Вообразим, что энергию всех молний, происходящих в год, можно накопить и равномерно распределить между всеми людьми, населяющими Землю. Сколько времени будет гореть лампочка мощностью 100 Вт, которую Вы включили, используя Вашу долю энергии? (1 б.)

Капиллярные сосуды. Будем считать кровь несжимаемой вязкой жидкостью с плотностью ρ, близкой к плотности воды, и динамической вязкостью $\eta = 4,5\ \text{г}\cdot\text{м}^{-1}\cdot\text{с}^{-1}$. Смоделируем кровеносные сосуды прямыми цилиндрическими трубками радиусом r и длиной L. Течение крови по сосудам описывается законом Пуазейля $\Delta p = RD$ – гидродинамическим аналогом закона Ома в электричестве. Здесь Δp – разность давлений на входе и на выходе кровеносного сосуда, $D = Sv$ – объем крови, протекающей за одну секунду через поперечное сечение кровеносного сосуда площадью S при скорости потока крови v, R – гидравлическое сопротивление, которое определяется формулой $R = \dfrac{8\eta L}{\pi r^4}$. Во время соматической фазы циркуляции крови (от левого желудочка к правому предсердию) величина кровяного потока для спокойного состояния организма составляет $D \approx 100\ \text{см}^3\cdot\text{с}^{-1}$.

Ответьте на следующие вопросы, предполагая, что все капиллярные сосуды соединены параллельно, каждый из них имеет радиус $r = 4$ мкм и длину $L = 1$ мм, а приложенная разность давлений составляет $\Delta p = 1$ кПа.

12) Оцените количество капиллярных сосудов в теле человека. (1 б.)

13) С какой скоростью v кровь протекает через капилляры? (0,5 б.)

Небоскреб. У основания небоскреба высотой 1 км температура уличного воздуха равна $T_н = 30\ °\text{C}$. Задача состоит в оценке температуры воздуха $T_в$ у шпиля небоскреба. Рассмотрите тонкий слой воздуха (идеальный газ азот с показателем адиабаты $\gamma = 7/5$), который медленно поднимается до высоты z, где давление меньше, чем внизу. Предположите, что слой при подъеме расширяется адиабатически так, что его температура падает до температуры окружающего воздуха.

14) Как относительное изменение температуры dT/T зависит от относительного изменения давления dp/p? (0,5 б.)

15) Выразите изменение давления dp через изменение высоты dz. (0,5 б.)

16) Какова температура у шпиля небоскреба? (1 б.)

Данные: постоянная Больцмана $k = 1,38\cdot 10^{-23}$ Дж·К$^{-1}$; масса молекулы азота $m = 4,65\cdot 10^{-26}$ кг; ускорение свободного падения $g = 9,80\ \text{м}\cdot\text{с}^{-2}$.

Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин

Московская городская олимпиада студентов по физике

II тур Всероссийской физической олимпиады среди студентов технических вузов прошел 21 мая 2006 года в Московском государственной техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана.

По результатам соревнований первые пять команд приглашены для участия в III туре олимпиады. Это команда Московского института стали и сплавов (МИСиС), набравшая 80 баллов; команда МГТУ им. Н.Э.Баумана, набравшая 72 балла; команда Московского института электронной техники – 62 балла; команда Московского авиационного института – 51 балл; команда Российского университета нефти и газа им. И.М.Губкина – 50 баллов.

Победители в личном зачете: И.Ковтунов (МИСиС) – первое место; А.Бурцев (МГТУ им. Н.Э.Баумана) – второе место; А.Шатанов (МИСиС) – третье место.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Автомобиль движется змейкой вдоль оси x, при этом период змейки равен L, а амплитуда колебаний равна A. Определите максимальную среднюю скорость вдоль оси x, которую может достичь автомобиль, если коэффициент трения между дорогой и колесами автомобиля μ.

2. Цилиндрическое тело радиусом R и массой m стоит на гладкой горизонтальной поверхности, касаясь гладкой стенки таким образом, что ось цилиндра горизонтальна и параллельна стенке. В начальный момент времени центр тяжести тела, смещенный от оси цилиндра на расстояние $R/2$, находится в верхнем положении. Определите собственный момент инерции тела, если известно, что после потери равновесия и последующего абсолютно упругого удара о стенку тело начало двигаться строго поступательно.

3. Вокруг Земли по стационарной круговой орбите радиусом R движется космический корабль со скоростью v. Определите минимальную характеристическую скорость, необходимую для изменения плоскости орбиты на 90°. Характеристическая скорость – это скорость, которую приобретет корабль в свободном пространстве, затратив такое же количество топлива.

4. Цилиндр радиусом R скатывается по наклонному уголку, касаясь цилиндрической поверхностью одной полки уголка и скользя всей торцевой поверхностью по другой полке. Определите ускорение цилиндра, если угол между горизонтальной плоскостью и образующей уголка равен 30°, а углы между горизонтальной плоскостью и полками уголка одинаковы. Коэффициент трения между торцевой поверхностью и уголком равен μ, а проскальзывание между цилиндрической поверхностью и уголком отсутствует.

5. Термодинамический цикл состоит из двух изобар и двух изохор. В качестве рабочего тела используются насыщенный водяной пар и вода, объемом которой можно пренебречь. Максимальная и минимальная температуры равны T_2 и T_1, а давление в цикле изменяется в пять раз. Определите КПД цикла, если удельная теплоемкость воды c, удельная теплота парообразования r, вода за цикл полностью испаряется, а насыщенный пар затем полностью конденсируется.

6. Точечный заряд q перенесли из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии l от металлического незаряженного шара радиусом R. После того как распределение зарядов на поверхности шара «заморозили», заряд q удалили на бесконечность. Определите энергию системы зарядов на поверхности шара.

7. Магнитный дипольный момент p_m ориентирован по оси длинного соленоида длиной L с числом витков N. Магнитный диполь начинает вращаться относительно оси, перпендикулярной оси соленоида, с угловой скоростью ω. Определите максимальное значение ЭДС индукции, наводимой в соленоиде.

8. Какое количество электрических цепей, имеющих различное эквивалентное сопротивление, можно собрать, имея в своем распоряжении три резистора с сопротивлениями $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом?

9. Плоская световая волна с интенсивностью I_0 падает на круглое отверстие, в котором помещается 5 зон Френеля для точки наблюдения, отстоящей от отверстия на L. Какова интенсивность в точке наблюдения, если отверстие закрыто зонной пластинкой, в которой зачернены нечетные зоны, полученные для точки наблюдения, удаленной от отверстия на $1,5L$?

Публикацию подготовили М.Яковлев, В.Голубев

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

Задачи

(см. «Квант» №1)

1. Обозначим через O точку на капитанском мостике, а через $K_1, K_2, \ldots, K_n$ – корабли противника. Вы находитесь в окружении тогда и только тогда, когда сумма углов $\angle K_1OK_2 + \angle K_2OK_3 + \ldots + K_{n-1}OK_n$ больше 180°.

2. Не существуют. Обозначим $k = ad = bc$. Из условия задачи следует, что $abc + b = abd + a$, или $k(a-b) = a-b$. Так как $a \neq b$, то $k = 1$. Но этого не может быть, поскольку целые числа a, b, c, d – попарно неравные.

3. Всегда можно убрать три гирьки так, чтобы равновесие не нарушилось. Укажем, как это сделать.

Если на одной чашке с гирькой массой 1 г окажется гирька с некоторой массой k граммов, а на другой чашке – гирька с массой $k + 1$ граммов, то уберем именно эти три гирьки.

Если предыдущая ситуация не имеет места, то на чашке весов вместе с гирькой 1 г отметим наименьшую гирьку массой k граммов. Заметим, что $k \neq n$, иначе при данных задачи остальные гирьки перевесят эти две гирьки (1 г и n г). Значит, кроме гирьки k граммов на этой же чашке весов имеется гирька $k + 1$ граммов, здесь же находятся и все более тяжелые гирьки с массой вплоть до n граммов (иначе возникнет первая рассмотренная выше ситуация). Соответственно, на другой чашке весов окажутся все гирьки с промежуточной массой между 1 г и k г (исключая 1 и k). Заметим, что $k > 3$, иначе совокупная масса гирек на чашке с гирькой 1 г окажется больше массы гирек на другой чашке. Выберем на этой другой чашке две гирьки с массой 2, и $k - 1$ граммов, а на первой чашке – третью гирьку массой $k + 1$ граммов.

4. Да, верно. Обозначим углы остроугольного треугольника $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Если этот треугольник не является почти прямоугольным, то $\alpha < 75°$. Если он к тому же не является почти равнобедренным, то $\beta < 60°$, $\gamma < 45°$. Но тогда $\alpha + \beta + \gamma < 180°$, чего не может быть.

5. Пусть у команды «Рубильник» было m удачных реализаций. Так как удачные реализации у нее имели место в половине случаев, то неудачных реализаций было столько же, т.е. m. Всего же команда «Рубильник» заработала за игру $5m + 7m = 12m$ очков.

Пусть у команды «Дробильник» было n удачных реализаций. Так как они составили лишь четвертую часть всех случаев, то неудачных реализаций было втрое больше, т.е. $3n$. Всего же команда «Дробильник» заработала $5 \cdot 3n + 7n = 22n$ очков.

Так как в сумме команды набрали 100 очков, то можно составить уравнение

$$12m + 22n = 100,$$

или, поделив обе части на 2:

$$6m + 11n = 50.$$

Осталось решить это уравнение в натуральных числах. Сразу видно, что $n \leq 4$ (иначе левая часть превысит правую). Кроме того, n – четное число (иначе левая часть была бы нечетной и не могла бы равняться 50). Поэтому есть лишь две возможности: $n = 2$ или $n = 4$. В первом случае получаем $6m + 22 = 50$, и $6m = 28$, что невозможно (ибо левая часть делится на 6, а правая – нет). Во втором случае получаем $6m + 44 = 50$, и $6m = 6$, откуда $m = 1$.

Итак, команда «Рубильник» заработала $12m = 12 \cdot 1 = 12$ очков, а команда «Дробильник» набрала $22n = 22 \cdot 4 = 88$ очков. Победа «Дробильника» более чем убедительная!

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №5 за 2006 г.)

6. Верно. В ряду 1, 2, …, 100 числа, соответствующие гирькам на левой чашке весов, напишем красными чернилами, а соответствующие гирькам на правой чашке весов – синими чернилами. Без ограничения общности предположим, что единица написана красными чернилами. Двигаясь слева направо в