

Материалы вступительных экзаменов 2006 года

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Найдите наибольшее значение параметра a , при котором неравенство $2x^2 - 6x - 1,5 \geq a$ верно для любого действительного x .

2. Решите неравенство

$$|\sqrt{17-x} - x| \leq x + 2.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{2 \sin 4x - \sqrt{3} - 2 \sin 2x + 2\sqrt{3} \cos 2x}{2 \sin 4x + \sqrt{3}} = 0.$$

4. Груз вначале погрузили в вагоны вместимостью по 80 тонн, но один вагон остался загружен не полностью. Тогда весь груз переложили в вагоны вместимостью по 60 тонн. При этом понадобилось на 8 вагонов больше, и все равно один вагон остался загружен не полностью. Наконец, груз переложили в вагоны вместимостью по 50 тонн. При этом понадобилось еще на 5 вагонов больше, и все вагоны оказались полностью загруженными. Сколько было тонн груза?

5. Отрезок AD является биссектрисой прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = \pi/2$). Окружность радиуса $\sqrt{15}$ проходит через точки A, C, D и пересекает гипотенузу AB в точке E так, что $AE : AB = 3 : 5$. Найдите площадь треугольника ABC .

6. Какую фигуру на координатной плоскости определяет система неравенств

$$\begin{cases} y \geq |x + 2| - 1, \\ y \leq 8 - |x - 1|? \end{cases}$$

Ответ обоснуйте. Найдите площадь данной фигуры.

Вариант 2

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} -x + ay = 2, \\ ax - y = 3a - 5 \end{cases}$$

при различных значениях параметра a ?

2. Решите уравнение

$$3\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = 7.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{8 + \frac{1}{\log_x 3}} - \sqrt{10 \log_9 x + 20} + 2 = 0.$$

4. Решите уравнение

$$\sin 2x + \sin 6x = \sqrt{3} \cos 2x.$$

5. В ромбе $ABCD$ из вершины тупого угла B на сторону AD опущен перпендикуляр BE . Найдите углы ромба, если $2\sqrt{3}CE = \sqrt{7}AC$.

6. Три бригады, работая одновременно, выполняют дневную норму цеха за 5 часов. Вторая бригада, работая отдельно, выполняет норму цеха на 5 часов быстрее, чем одна третья бригада. За какое время вторая бригада выполнит норму цеха, если известно, что третья бригада выполнила бы ее вдвое быстрее, чем первая?

Вариант 3

(олимпиада-2006, все факультеты)

1. В арифметической прогрессии, все члены которой являются целыми числами, второй член равен 4, а сумма квадратов третьего и четвертого членов меньше 16. Чему может быть равен первый член прогрессии?

2. Можно ли расположить числа от 1 до 7 в вершинах фигуры, показанной на рисунке 1, так, что все числа в вершинах попарно различны, а сумма чисел в вершинах каждого из трех четырехугольников равна 14?

3. Решите неравенство

$$\frac{8}{9} \cdot \frac{3^x}{3^x - 2^x} \leq 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x.$$

4. Четырехугольник $PQRT$ вписан в окружность. Длины его сторон PQ и RT равны 9 и 6 соответственно, а длины диагоналей PR и QT равны 8 и 10 соответственно. Найдите отношение площадей треугольника PQR и четырехугольника $PQRT$.

5. Решите уравнение

$$x - |x - |x + 1|| = \sqrt{5 - |2 - |6 - x||}.$$

6. Решите уравнение

$$\frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{2 - \cos^2 x} = \frac{4 + 2 \cos \frac{6x}{5}}{\cos 3x + \cos x}.$$

7. Решите уравнение

$$x^5(x-1)^5 + \dots + (x-2006)^5 = 0.$$

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Камень, брошенный с поверхности земли под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, дважды побывал на одной и той же высоте h спустя время $t_1 = 3$ с и $t_2 = 5$ с после начала

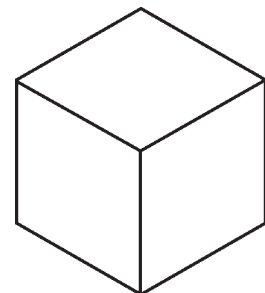


Рис. 1

движения. Найдите начальную скорость камня v_0 . Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

2. Брусок массой $M = 2 \text{ кг}$ движется вдоль горизонтальной плоскости под действием силы $F = 20 \text{ Н}$, направленной вверх под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту (рис.2). Коэффициент трения скольжения бруска о плоскость $\mu = 0,1$. Найдите ускорение бруска a . Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

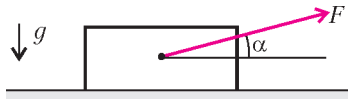


Рис. 2

3. Электроплитка имеет три секции с одинаковыми сопротивлениями. При параллельном их соединении вода закипает через $t_0 = 6 \text{ мин}$. Через какое время t закипит вода такой же массы и такой же начальной температуры при соединении секций, показанном на рисунке 3?

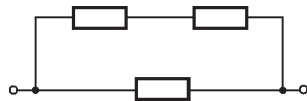


Рис. 3

4. Температура нагревателя Карно $T_1 = 390 \text{ К}$, а температура холодильника $T_2 = 300 \text{ К}$. Количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя в каждом цикле, равно $Q_1 = 60 \text{ кДж}$. Вычислите количество теплоты Q_2 , отдаваемое холодильнику в каждом цикле.

5. В водоем на одну и ту же глубину помещены два точечных источника: первый источник красного света, второй – фиолетового. Абсолютный показатель преломления воды для красных лучей $n_1 = 1,328$, для фиолетовых – $n_2 = 1,335$. Найдите отношение радиусов кругов R_1 и R_2 на поверхности воды, в пределах которых возможен выход в воздух лучей от первого и второго источников соответственно. Абсолютный показатель преломления воздуха считать равным единице.

Вариант 2

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. В течение времени $t_1 = 5 \text{ ч}$ поезд двигался со скоростью $v_1 = 60 \text{ км/ч}$, а затем в течение времени $t_2 = 4 \text{ ч}$ – со скоростью $v_2 = 15 \text{ км/ч}$. Найдите среднюю скорость поезда $v_{\text{ср}}$ за все время движения.

2. Призма находится на горизонтальном шероховатом столе (рис.4). На поверхность призмы, составляющую угол α с горизонтом, положили брусок массой m ипустили. Он стал соскальзывать, а призма осталась в покое. Коэффициент трения скольжения между бруском и призмой μ . Найдите силу трения $F_{\text{тр}}$ между призмой и столом.

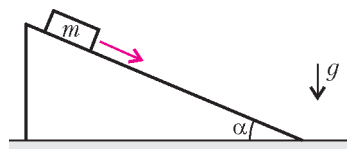


Рис. 4

3. Два резистора с сопротивлениями $R_1 = 10 \text{ Ом}$ и $R_2 = 20 \text{ Ом}$, соединенные друг с другом параллельно, подключены к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 6 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r = 2 \text{ Ом}$. Найдите тепловую мощность P , выделяющуюся на сопротивлении R_1 . Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

4. В цилиндре под поршнем находится воздух при температуре $T_1 = 300 \text{ К}$ и давлении $p_1 = 100 \text{ кПа}$. Воздух сжимают так, что его объем уменьшается в 20 раз, а давление возрастает до $p_2 = 6000 \text{ кПа}$. Найдите конечную температуру воздуха T_2 .

5. Оптическая система состоит из двух линз – рассеивающей с фокусным расстоянием, равным по модулю $|F_1| = 10 \text{ см}$, и собирающей с фокусным расстоянием $F_2 = 15 \text{ см}$, распо-

ложенных вдоль общей главной оптической оси на расстоянии $a = 30 \text{ см}$ друг от друга. Перед системой со стороны рассеивающей линзы на расстоянии $d_1 = 12 \text{ см}$ от нее на главной оптической оси помещен точечный источник света. На каком расстоянии f_2 от второй линзы получится изображение источника, даваемое системой этих линз?

Вариант 3

(олимпиада-2006, все факультеты)

1. Ведущая шестерня радиусом R вращается с постоянной угловой скоростью Ω и приводит во вращение шестерню радиусом r . В некоторый момент времени метки A и B , выбитые на шестернях, совпадают (рис.5). Через какой наименьший промежуток времени t_0 относительная скорость меток станет равной нулю? Оси вращения шестерен неподвижны.

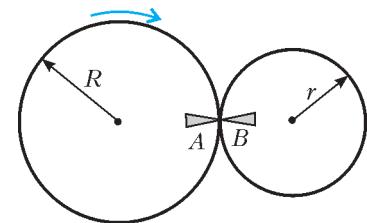


Рис. 5

2. Упругая шайба падает плашмя на горизонтальную абсолютно твердую поверхность таким образом, что в момент падения ее скорость равна $v_0 = 4,5 \text{ м/с}$ и направлена под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Коэффициент трения скольжения между шайбой и поверхностью $\mu = 0,25$. Чему равно расстояние s между местом второго и местом третьего удара шайбы о поверхность? Влиянием силы тяжести за время удара можно пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

3. Сосуд квадратного сечения со стороной a заполнен водой до высоты $h = 40 \text{ см}$. Силы давления воды на боковую стенку сосуда и на его дно равны друг другу. Найдите сторону квадрата a .

4. Два баллона одного и того же объема $V = 1 \text{ л}$ соединены тонкой трубкой с закрытым краном В первом баллоне находится сухой воздух под давлением $p_{\text{в}} = 750 \text{ мм рт.ст.}$, а в другой баллон после откачки до глубокого вакуума помещена капелька воды массой $m = 0,1 \text{ г}$. Какое давление p будет в баллонах после открытия крана и установления равновесия, если температура баллонов постоянна и равна $t = 22^\circ \text{ C}$, а давление насыщенного водяного пара при этой температуре составляет $p_{\text{нас}} = 20 \text{ мм рт.ст.}$? Молярная масса воды $M_{\text{воды}} = 0,018 \text{ кг/моль}$.

Для справки: $1 \text{ атм} \approx 10^5 \text{ Па} \approx 760 \text{ мм рт.ст.}$

5. В коробке собрана некоторая электрическая цепь и сделаны два вывода A и B (рис.6). При подключении к ним идеального амперметра и гальванического элемента с ЭДС $\mathcal{E} = 1,5 \text{ В}$ и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением сила тока оказалась равной $I_1 = 1 \text{ А}$. Когда полярность элемента изменили на противоположную, ток уменьшился в два раза, не меняя своего направления. Предложите схему какой-нибудь одной, по возможности простой, цепи, находящейся внутри коробки, и рассчитайте ее параметры.

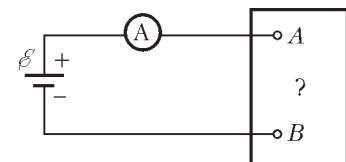


Рис. 6

6. Протон движется по окружности радиусом $R = 80 \text{ см}$ в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,3 \text{ Тл}$. Найдите скорость протона v . Масса протона $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$, его заряд $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$.

7. В линзе с фокусным расстоянием $F = 6,7 \text{ см}$ получено прямое изображение предмета с поперечным увеличением

$\Gamma = 3$. Чему равно расстояние L от предмета до изображения?

Публикацию подготовили А.Леднев, А.Пичкур

Московский государственный институт
электронной техники
(технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{5}{7}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

2. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{5x-1}{x+5}} - 1.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2(x^2 - 3x) \leq -\log_{0,5}(6 - 4x).$$

4. Решите уравнение

$$\sin 2006x = \cos 1003x.$$

5. Центр круга, описанного около равнобедренной трапеции, принадлежит ее большему основанию. Найдите основания трапеции, если известно, что площадь круга равна 169π , а высота трапеции равна 12.

6. При каких значениях x числа 3 , 3^{x+1} , $4 - 11 \cdot 3^x$ являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии?

7. Через сторону квадрата проведена плоскость, составляющая с плоскостью квадрата угол 60° . Под каким углом наклонены к этой плоскости диагонали квадрата?

8. Постройте график функции

$$y = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}.$$

9. Решите уравнение

$$\sqrt{x^4 + x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 4x + 2} = x^2 - 2.$$

10. От пристани A одновременно отправились вниз по течению реки катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 км, затем повернул обратно и вернулся в A , потратив на весь путь 14 часов. Найдите скорость катера в стоячей воде и скорость течения реки, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от A .

11. При каких значениях параметра a имеет ровно один экстремум на промежутке $(-2; 0)$ функция

$$f(x) = \frac{a}{3}x^3 - \frac{a-6}{2}x^2 + 2x + a^3?$$

Вариант 2

1. Найдите $\log_2 18$, если $\log_2 3 = a$.

2. Решите уравнение

$$2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} = 5^{x+1} - 5^{x+2}.$$

3. Решите уравнение

$$x \cdot |x+1| + |x| \cdot (x+1) = 4.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{x^2}{x^2 + 3x - 4} \leq 1.$$

5. Решите уравнение

$$2 \sin 3x \cdot \cos x + 2 \cos 3x \cdot \sin(\pi + x) = 1.$$

6. Цилиндр с площадью основания, равной 5π , вписан в шар. Найдите объем цилиндра, если объем шара равен 36π .

7. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Найдите длину этой окружности, если известно, что боковая сторона и меньшее основание трапеции равны 5 и 2 соответственно.

8. Два спортсмена бегают с постоянными скоростями по замкнутой дорожке. На пробег всей дорожки первый спортсмен тратит на 25 секунд меньше второго. Если они стартуют из одной точки в одном и том же направлении, то первый спортсмен впервые догоняет второго через 150 секунд после старта. Через какое время произойдет их первая встреча, если они будут стартовать из одной точки в противоположных направлениях?

9. Решите неравенство

$$\log_{1/2}(\sqrt{5-x} - x + 1) > -3.$$

10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 8xy - 9y^2 = 14, \\ 10y - x^2 = 13. \end{cases}$$

11. При каких значениях параметра a найдутся числа x и y , удовлетворяющие уравнению $\sqrt{2xy+a} = x+y+1$?

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Стержень AB , ориентированный вдоль оси x , движется с постоянной скоростью $v = 0,1$ м/с в положительном направлении оси. Передним концом стержня является точка A , задним – точка B . Найдите длину стержня, если в момент времени $t_A = 10$ с координата точки A равна $x_A = 3$ м, а в момент $t_B = 30$ с координата точки B равна $x_B = 4,5$ м.

2. Двумя нитями, одна из которых горизонтальная, а другая составляет с горизонтом угол $\alpha = 60^\circ$, груз закреплен на тележке (рис.1). С каким ускорением движется тележка по горизонтальной поверхности, если силы натяжения нитей одинаковы по величине? Груз покоится относительно тележки. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

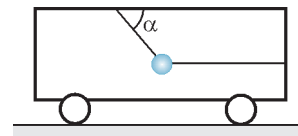


Рис. 1

3. В результате центрального столкновения двух одинаковых частиц, двигавшихся навстречу друг другу со скоростями v и $2v$, скорость более быстрой частицы изменила направление на противоположное и уменьшилась по величине в 2 раза. а) Во сколько раз изменилась величина скорости другой частицы? б) Является ли столкновение частиц абсолютно упругим? Ответ следует обосновать.

4. В одном из двух баллонов содержится углекислый газ, а в другом – водород. Объемы, температуры и давления газов одинаковые. а) Во сколько раз отличаются массы газов в баллонах? б) В каком баллоне масса газа увеличится и во сколько раз, если баллоны соединить тонкой трубкой? Молярные массы водорода и углекислого газа равны $M_{\text{вод}} = 2$ г/моль и $M_{\text{угл}} = 44$ г/моль соответственно.

5. В сосуде под поршнем находится идеальный одноатомный газ, занимая объем $V = 4$ л при давлении $p = 200$ кПа. Во сколько раз увеличится абсолютная температура газа, если его адиабатически сжать, совершив работу $A = 3$ кДж?

6. Точечный заряд q_1 , расположенный в вершине A квадрата $ABCD$, создает в вершине D электрическое поле, модуль вектора напряженности которого $E_1 = 4000$ В/м,

а точечный заряд q_2 , расположенный в вершине B , создает в той же точке D поле $E_2 = 1000$ В/м. Определите отношение зарядов q_1/q_2 .

7. Какой заряд q пройдет через резистор сопротивлением $R = 1$ Ом за время $\tau = 5$ мин, если напряжение на резисторе в течение этого времени равномерно возрастает от нуля до $U = 2$ В?

8. Лампочка, на которой написано $U = 110$ В, $P = 100$ Вт, и катушка индуктивностью $L = 0,5$ Гн соединены последовательно и подключены к генератору переменного напряжения частотой $\nu = 50$ Гц. При этом лампочка горит нормальным накалом. Определите действующие значения тока I через лампочку и напряжения U_L на катушке. Сопротивлением провода, которым намотана катушка, пренебречь.

9. Луч света падает на тонкую рассеивающую линзу с оптической силой $D = -10$ дптр под углом α к главной оптической оси и преломляется в линзе на расстоянии $h = 1$ см от ее оптического центра, как показано на рисунке 2. При каком минимальном значении угла α этот луч после преломления в линзе пересечет ее главную оптическую ось?

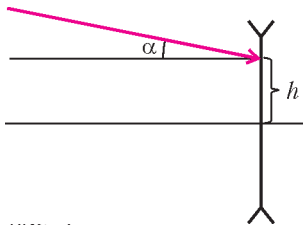


Рис. 2

10. Во сколько раз максимальная скорость электронов, выбиваемых светом из металла при фотоэффекте, меньше скорости света в вакууме? Длина волны света $\lambda = 0,6$ мкм. Работа выхода электронов из металла в 2 раза меньше энергии фотона. Ответ выразите через величину $\lambda_C = h/(mc) = 2,4 \cdot 10^{-12}$ м, где h – постоянная Планка, m – масса электрона, c – скорость света в вакууме.

11. Через катушку индуктивностью $L = 100$ мГн протекает постоянный ток. В некоторый момент времени ток через катушку начинают равномерно уменьшать, и через $\tau = 10$ мс после этого он оказывается равным нулю. Через какое время t после начала уменьшения тока напряжение на катушке станет равным нулю? Сопротивление провода, которым намотана катушка, равно $R = 20$ Ом.

Вариант 2

(олимпиада-2006)

1. Камень, брошенный с поверхности земли вертикально вверх, упал на землю через $T = 2$ с. Определите путь s , пройденный камнем за время $\tau = 1,5$ с после броска. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

2. Однородный шар радиусом R и массой m расположен на гладком горизонтальном столе и прикреплен к точке O поверхности стола нерастяжимой нитью (рис.3). Центру шара сообщили горизонтальную скорость, после чего он стал равномерно двигаться по окружности вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O . С какой силой шар действует на стол, если период его обращения равен T ? Ускорение свободного падения равно g .

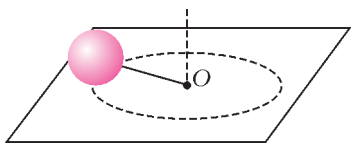


Рис. 3

3. Игрушечная пушка на колесиках (рис.4), первоначально покоившаяся

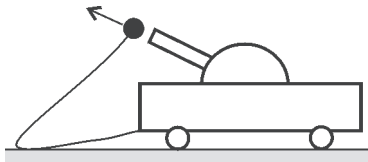


Рис. 4

на горизонтальном полу, выстреливает шарик, привязанный к пушке легкой ниткой (чтобы не потерялся). При выстреле нитка обрывается, и шарик падает на пол со скоростью v под углом α к горизонту. Определите скорость пушки V после обрыва нити, если масса пушки в k раз больше массы шарика. Трением и сопротивлением воздуха пренебречь. Векторы скорости шарика и пушки лежат в одной плоскости.

4. В вертикальном цилиндре под легким поршнем площадью $S = 20$ см² находится идеальный газ при температуре $t = 30$ °С. Какую вертикальную силу нужно приложить к поршню, чтобы удерживать его в исходном положении после нагрева газа на $\Delta t = 20$ °С? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Трением пренебречь.

5. Определите работу газа в круговом процессе, изображенном на рисунке 5 (здесь p – давление газа, V – занимаемый им объем). При выбранном масштабе график представляет собой окружность.

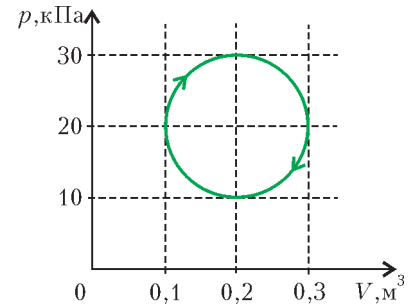


Рис. 5

6. Плоский воздушный конденсатор помещили в постоянное однородное электрическое поле напряженностью E_0 , перпендикулярное его обкладкам. Обкладки конденсатора на некоторое время замкнули тонкой проволочкой, затем проволочку убрали, а конденсатор медленно извлекли из электрического поля. Какая работа против сил электрического поля при этом была совершена? Емкость конденсатора C , расстояние между обкладками d .

7. На лампочке написано 220 В, 100 Вт. Чему равно сопротивление спирали лампочки в нормальном рабочем режиме?

8. При равномерном изменении силы тока через катушку за время $\tau = 0,05$ с в ней возникает ЭДС самоиндукции $\mathcal{E} = 0,1$ В. Катушка содержит $N = 1000$ витков. Какой заряд q пройдет за это время через замкнутый виток сопротивлением $R = 20$ Ом, плотно надетый на катушку? Магнитное поле, созданное током в витке, считать пренебрежимо малым. Катушка длинная, намотка однослойная.

9. Определите показатель преломления среды, если известно, что свет с частотой $\nu = 4 \cdot 10^{14}$ Гц имеет в ней длину волны $\lambda = 0,5$ мкм. Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Публикацию подготовили А.Берестов, И.Горбатый, В.Гуйдырев, С.Кальней, С.Куклин, А.Прокофьев, Т.Соколова, И.Федоренко

Московский государственный текстильный университет им. А.Н.Косыгина

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультет информационных технологий, автоматике и энергетики)

1. Решите уравнение

$$1,5 - \frac{2x}{15} = \frac{1}{3} + 0,8x.$$

2. Книга-двухтомник стоит 360 рублей, при этом первый

том дешевле второго на 20%. Сколько рублей стоит первый том?

3. Найдите сумму корней уравнения

$$4|x-1| + |x+3| = 10.$$

4. Вычислите

$$1,5 \log_8 18 - \log_2 (12\sqrt{2}).$$

5. Найдите сумму квадратов корней уравнения

$$x^2 - x = 9.$$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + y = 0,95, \\ 2x + 3y = 0,9. \end{cases}$$

В ответ запишите $2x + y$.

7. Пусть

$$f(x) = \frac{2x^2}{3} + \frac{36}{x} + 2 \sin(x-3) + 6 \cos(x-3) + 9 \ln(3x).$$

Тогда $f'(3) = \dots$

8. Если $\cos \alpha = 1/3$ и $0 < \alpha < \pi/2$, то $\sqrt{50} \operatorname{tg}(\alpha/2) = \dots$

9. Вычислите

$$\sqrt[3]{10\sqrt{15}} \cdot \sqrt{0,6} \cdot (1,5)^{-2/3}.$$

10. Диагонали трапеции равны 40 и 26, средняя линия равна 21. Найдите площадь трапеции.

11. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$x - 3 < \sqrt{x+17}.$$

12. Третий член арифметической прогрессии равен 5, а сумма членов с десятого по двадцатый равна 22. Найдите пятый член прогрессии.

13. Решите неравенство

$$2 \log_2(x/12) + 5 \log_{(x/6)}(x/12) \leq 6.$$

В ответ запишите количество целых решений.

14. Найдите наименьшее положительное решение (в градусах) уравнения

$$\cos 5^\circ \cos x + \cos 95^\circ \sin x = \cos 35^\circ.$$

15. Развертка боковой поверхности конуса дает сектор площади 54π и угловой меры $2\pi/3$ радиан. Пусть V – объем конуса, тогда $V/\pi = ?$

Вариант 2

(факультет экономики и менеджмента)

1. Решите уравнение

$$1,25 + \frac{x}{15} = 1,2x - \frac{1}{6}.$$

2. Костюм (пиджак и брюки) стоит 5400 рублей, причем пиджак на 25% дороже, чем брюки. Сколько рублей стоит пиджак?

3. Найдите сумму корней уравнения

$$|x+1| = 3x+7.$$

4. Вычислите $0,5 \log_{0,8} 5 - \log_{0,8} 2$.

5. Найдите сумму квадратов корней уравнения

$$2x^2 - 3x = 5.$$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4y + x = 2,4, \\ 2x + 3y = 3,8. \end{cases}$$

В ответ запишите $2x - y$.

7. Пусть

$$f(x) = x^{2 \log_x 5} + \frac{3x^2 + 2x + 8}{x} + 8\sqrt{2x}.$$

Тогда $f'(2) = \dots$

8. Если $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3,125$, то $\sin 2\alpha = \dots$

9. Вычислите

$$\sqrt[3]{9,8\sqrt{3,5}} \cdot \sqrt{0,56} \cdot (1,25)^{-0,8}.$$

10. Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны $\sqrt{52}$, $\sqrt{116}$, $\sqrt{136}$. Найдите объем параллелепипеда.

11. Найдите сумму целых решений неравенства

$$\frac{5x+1}{x^2+7x+10} \geq \frac{x-1}{x+2}.$$

12. Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно вышли пассажирский поезд и товарный состав. Через 4 часа они встретились. Поезд дошел до пункта B , простоял там 24 минуты и отправился обратно. Через 4 часа после выхода из B он догнал товарный состав. Найдите скорость поезда (км/ч), если $AB = 280$ км.

13. Решите неравенство

$$\log_4(9 - 6x + x^2) + \log_{0,5}(x+3) \leq -1.$$

В ответ запишите сумму целочисленных решений.

14. Найдите сумму целых чисел, принадлежащих области значений функции

$$f(x) = 1,5 \cdot 0,2^{\sqrt{0,2} \sin 3x} \cdot 25^{\sqrt{0,2} \cos 3x} - 3.$$

15. В окружность радиуса $3\sqrt{6}$ вписан остроугольный треугольник ABC . Найдите AC , если $AB = 8\sqrt{3}$, $BC = 12$.

Публикацию подготовил Е.Матвеев

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. За три часа один лыжник прошел на 2,5 км больше другого, так как один километр он проходил на одну минуту быстрее. За сколько минут каждый лыжник проходил один километр?

2. Решите уравнение $\sin 6x = 2 \sin 2x$. Найдите его корни, принадлежащие промежутку $[0; \pi/2]$.

3. Решите уравнение

$$2^{3+\sqrt{x}} + 4 = 33\sqrt{2^{\sqrt{x}}}.$$

4. Решите неравенство

$$\log_x(49x^2 - 84x + 36) > 2.$$

5. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, координаты вершин которого удовлетворяют уравнению $|y| = (x-1)(4-x)$, $1 < x < 4$, а стороны параллельны координатным осям?

6. Найдите все значения a , при которых система уравнений

$$3(x - a)^2 = x - y - a + 2, \quad \frac{1 - \log_2 y}{1 - \log_2 x} = 1$$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a .

7. Найдите площадь сечения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, параллельной диагонали BA_1 боковой грани ABB_1A_1 и проходящей через центр описанного около призмы шара и вершину основания A , если стороны основания призмы равны 2, а расстояние от центра основания призмы до секущей плоскости равно $1/5$.

Вариант 2

1. За вторую половину шестичасовой смены рабочий изготовил на 6 деталей больше, чем за первую, так как на обработку одной детали во второй половине смены тратил на 1 мин меньше, чем в первую. Сколько деталей изготовил рабочий за смену?

2. Решите уравнение $\cos 4x = 3 + 5 \sin 2x$ и укажите его корни, лежащие в промежутке $[-3\pi/2; \pi/2]$.

3. Решите уравнение

$$\log_4(10x - 54) = 1 + \log_2(x - 12).$$

4. Решите неравенство

$$\log_2 \frac{x-2}{x-3} + \log_2 x < 3.$$

5. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, гипотенуза которого лежит на касательной к графику функции $y = 6 + 2x^2$, катет лежит на оси x , а одна из вершин совпадает с точкой касания?

6. Найдите все значения a , при которых система уравнений

$$(x - a)^2 = 25(y + a - 6), \quad y^2 + \left(\frac{x-6}{|x|-6}\right)^2 = 1$$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a .

7. Основанием пирамиды $TABC$ служит равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами AC и BC , равными 6, а ее высота совпадает с боковым ребром TC . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через середину бокового ребра TA , пересекает высоту TC в точке P , так что $PC = 4PT$, и параллельна медиане основания AD , если расстояние от вершины пирамиды T до секущей плоскости равно $\sqrt{3/5}$.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Непроводящее кольцо, имеющее равномерно распределенный заряд, может свободно вращаться вокруг своей оси (рис.1). Кольцо помещено в перпендикулярное плоскости кольца магнитное поле, индукция которого равномерно уменьшается до нуля. При этом кольцо начинает вращаться.

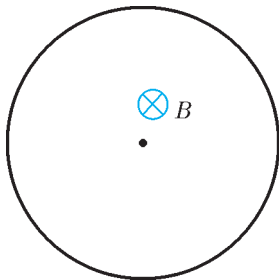


Рис. 1

Объясните, какие силы приводят кольцо в движение.

2. На рисунке 2 показан ход светового луча при переходе из среды 1 в среду 2. В какой среде скорость света больше? Ответ обоснуйте.

3. Точка начинает двигаться по оси x по закону $x = 5 + 4t - 2t^2$ (м). На каком расстоянии от начала координат скорость точки будет равна нулю?

4. Число радиоактивных ядер некоторого элемента уменьшилось в 8 раз за 6 дней. Чему равен период полураспада этого элемента (в днях)?

5. Один моль идеального одноатомного газа участвует в процессе, для которого абсолютная температура газа прямо пропорциональна квадрату его давления: $T = \alpha p^2$, где α – постоянная. Определите молярную теплоемкость газа в этом процессе.

6. В системе, состоящей из двух concentric сфер радиусами R и $3R$ (рис.3), внутренняя сфера соединена с землей через источник с ЭДС \mathcal{E} . Заряд внешней сферы $+2q$. На расстоянии $2R$ от центра системы находится точечный заряд $-q$. Зная величины q, \mathcal{E}, R , определите заряд внутренней сферы. Потенциал земли принять равным нулю.

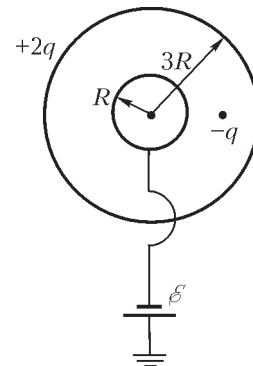


Рис. 3

7. Два одинаковых гладких упругих шарика A и B движутся во

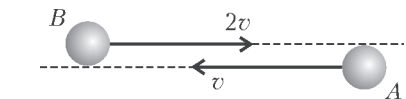


Рис. 4

встречных направлениях со скоростями v и $2v$, причем прямые, проходящие через центры каждого из шариков в направлении их движения, касаются другого шарика (рис.4). Найдите, под каким углом к первоначальному направлению будет двигаться шарик A после соударения.

Вариант 2

1. Тело массой $m = 1$ кг брошено под углом к горизонту. За все время полета его импульс изменился на $\Delta p = 20$ кг·м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите наибольшую высоту подъема тела.

2. Найдите разность потенциалов на клеммах источника постоянного тока, если внешнее сопротивление замкнутой цепи в 5 раз больше внутреннего сопротивления источника. ЭДС источника тока $\mathcal{E} = 6$ В.

3. Стержень движется в продольном направлении с постоянной скоростью относительно некоторой инерциальной системы отсчета. При каком значении скорости (в долях скорости света) длина стержня в этой системе отсчета будет в 1,66 раза меньше его собственной длины?

4. В опыте по фотоэффекту на металлическую пластину падает свет с длиной волны $\lambda = 420$ нм. Фототок прекращается при задерживающей разности потенциалов $U_3 = 0,95$ В. Определите работу выхода электрона из металла.

5. Два груза массами $3m$ и m связаны невесомой нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный блок (рис.5). В начальный момент груз массой m удерживают, прижимая его к столу, затем отпускают. На какую максимальную высоту подни-

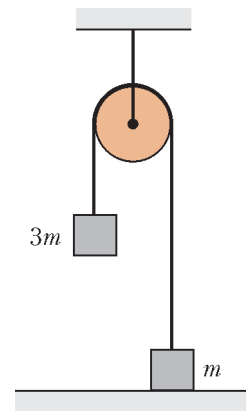


Рис. 5

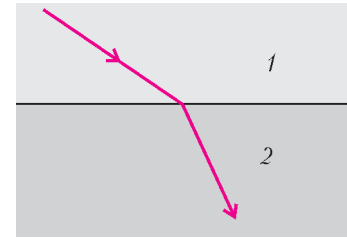


Рис. 2

мется этот груз над столом, если при ударе груза массой $3m$ о стол выделяется количество теплоты Q ? Удар абсолютно неупругий. Массой блока и силами трения в блоке пренебречь.

6. В горизонтальном закрепленном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем массой $M = 1$ кг, находится идеальный одноатомный газ. Газ нагревают. При этом поршень, двигаясь равноускоренно, приобретает скорость $v = 4$ м/с. Найдите количество теплоты, сообщенное газу. Теплоемкостью сосуда и поршня, а также внешним давлением и трением пренебречь.

7. Горизонтальный контур образован двумя замкнутыми на катушку индуктивностью L параллельными проводами, находящимися на расстоянии h друг от друга (рис.6). По проводам без трения может скользить перемычка массой m . Контур помещен в вертикальное однородное магнитное поле с индукцией B . В начальный момент времени неподвижной перемычке сообщают скорость v_0 . Определите расстояние, которое пройдет перемычка до первой остановки, если сопротивлением всех элементов можно пренебречь.

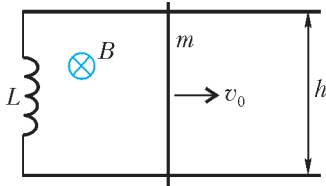


Рис. 6

общают скорость v_0 . Определите расстояние, которое пройдет перемычка до первой остановки, если сопротивлением всех элементов можно пренебречь.

Публикацию подготовили Л.Паршев, Ю.Струков

Московский инженерно-физический институт

(олимпиада Федерального агентства по атомной энергии РФ)

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. Куплены апельсины на сумму 300 рублей и яблоки на сумму 400 рублей. Яблок куплено на 2 кг меньше, чем апельсинов, и по цене (за 1 кг) на 20 рублей больше. Сколько куплено яблок?

2. Решите уравнение

$$\sqrt{1 + 11 \cos x} = 2 \sin x.$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{16^x - 2} \cdot \frac{25^x - 5 \cdot 15^x + 6 \cdot 9^x}{2x - 1} \geq 0.$$

4. а) На плоскости xOy укажите геометрическое место точек, удовлетворяющих неравенству $|x - \pi| + |y - 2\pi| \leq \pi$. Чему равно наименьшее значение суммы $x + y$?

б) При каждом значении $a \in \mathbf{R}$ решите систему неравенств

$$\begin{cases} |x - \pi| + |a - 2\pi| \leq \pi, \\ \cos^2 x + \sin^2 \frac{a}{2} < 1. \end{cases}$$

5. Точки K и L лежат, соответственно, на смежных ребрах B_1C_1 и C_1D_1 верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$), а точки M и N лежат, соответственно, на смежных ребрах AD и AB нижнего основания $ABCD$. Известно, что $AB = AD$, $CC_1 = 4\sqrt{2}$. Отрезки KL и MN параллельны диагонали основания $BD = 14$. Расстояние от MN до точки A равно 6, а расстояние от KL до точки C_1 равно a . Точка $P \in CC_1$, $C_1P = 3$. Найдите:

а) площадь полной поверхности пирамиды C_1KLP в случае $a = 4$;

б) площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямые KL и MN , в случае $a = 4$;

в) тангенс угла наклона плоскости сечения к плоскости основания при условии, что площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямые KL и MN , максимальна.

Вариант 2

1. Сумма цифр натурального трехзначного числа равна 18, а цифра сотен этого числа на единицу меньше цифры десятков. Если в этом числе поменять местами цифры сотен и единиц, то разность между полученным и исходным числом будет равна 495. Найдите исходное число.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2 - x} = -x - 3.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{\log_3^2 x - (\log_3 10) \cdot \log_3 x + (\log_3 2) \cdot \log_3 5}{x - 7} \leq 0.$$

4. Найдите производную и критические точки функции

$$f(x) = -\frac{5}{2 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin x} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

При каждом значении $a \in \mathbf{R}$ найдите x , при котором функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на отрезке $\left[a; a + \frac{3\pi}{8} \right]$, если известно, что $f(x)$ определена во всех его точках.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной $6\sqrt{6}$, проекция вершины S на плоскость основания пирамиды есть середина ребра AB , а $SA = 3\sqrt{22}$. На ребре BC взята точка E так, что $CE : EB = 5 : 1$. Через точку E параллельно ребру AB проводится сечение пирамиды. а) Найдите объем пирамиды. б) Какие фигуры получаются в указанном сечении? в) Найдите минимально возможную площадь сечения.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Одну пятую часть пути автомобиль ехал со скоростью $v_1 = 40$ км/ч, а оставшийся путь — со скоростью $v_2 = 60$ км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем пути.

2. Баллон, содержащий некоторое количество кислорода, разрывается при испытаниях при температуре $t_1 = 727$ °С. Такой же баллон, содержащий смесь вдвое меньшего количества кислорода и вчетверо меньшего (по массе) количества неизвестного газа, разрывается при температуре $t_2 = 127$ °С. Найдите молярную массу неизвестного газа. Молярная масса кислорода $M_{O_2} = 32$ г/моль.

3. Три воздушных конденсатора с емкостями C , $2C$ и $3C$ соединили последовательно и подключили к источнику напряжения U . Затем источник отключили, а конденсаторы с емкостями $2C$ и $3C$ опустили в жидкий диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ . Найдите напряжение на батарее конденсаторов после этого.

4. На передний край тележки массой M , движущейся со скоростью v_0 по гладкой горизонтальной поверхности, кладут брусок массой m . Начальная скорость бруска относительно земли равна нулю. Какой должна быть длина тележки, чтобы брусок в дальнейшем не упал с нее? Коэффициент трения между бруском и тележкой равен μ .

5. Равномерно заряженная положительным зарядом q тонкая палочка движется так, что ее нижний конец скользит по горизонтальной опоре с постоянной скоростью v , а верхний конец скользит по вертикальной стенке (рис.1). Палочка находится в однородном магнитном поле с индукцией, равной B и направленной горизонтально параллельно границе между стенкой и опорой. С какой силой поле действует на палочку в тот момент, когда угол между ней и опорой равен α ?

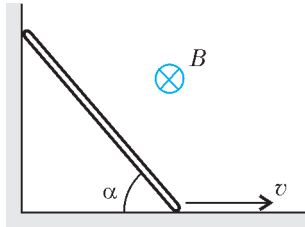


Рис. 1

Вариант 2

1. Предмет AB длиной l расположен перпендикулярно главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F . Расстояние от предмета до линзы d больше фокусного расстояния линзы. Постройте изображение предмета в линзе. Найдите размер изображения.

2. Тело, двигаясь равноускоренно из состояния покоя, прошло расстояние s за время τ . Какую скорость имело тело в тот момент времени, когда оно прошло расстояние s/n ?

3. Одноатомный идеальный газ в количестве ν молей, имеющий абсолютную температуру T , сначала охлаждается изохорически так, что давление газа уменьшается в 2 раза. Затем газ нагревается изобарически до температуры, в 3 раза превосходящей первоначальную. Определите количество теплоты, полученное газом во всем процессе.

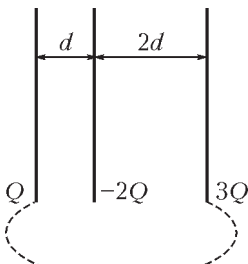


Рис. 2

4. Три параллельно расположенные пластины заряжены зарядами Q , $-2Q$ и $3Q$, расстояния между пластинами равны d и $2d$ (рис.2). Крайние пластины соединяют проводником. Какой заряд протечет по проводнику в процессе установления равновесия? Размеры пластин много больше расстояний между ними.

5. К горизонтально расположенной пружине жесткостью k привязано тело массой m , находящееся на шероховатой горизонтальной поверхности (рис.3). Коэффициент трения между телом и поверхностью μ . В начальный момент времени тело находится в положении, в котором пружина не деформирована. Затем телу толчком сообщают скорость $v_0 = 11\mu g\sqrt{m/k}$, где g – ускорение свободного падения. Через какое время после начала движения тело окончательно остановится?

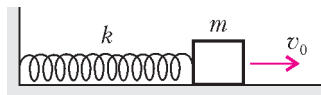


Рис. 3

Публикацию подготовили С.Муравьев, О.Нагорнов

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов. Первые три задачи – расчетные, различной степени трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения ориентироваться в непривычной или усложненной ситуации.

Четвертая задача – задача-оценка. Для ее решения необходимо разобраться в рассматриваемом физическом явлении, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивается, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача – задача-демонстрация, при решении которой необходимо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Среди различных факторов, влияющих на процесс, необходимо выделить главный.

Вариант 1

1. Тело массой m тянут за нить так, что оно летит по горизонтали с ускорением a (рис.1). Найдите силу натяжения нити. Ускорение свободного падения равно g .

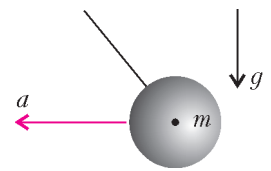


Рис. 1

2. Вертикальный цилиндр разделен поршнем массой m . Над поршнем вакуум, а ниже поршня газобразный гелий. К газу подводится тепловая мощность N , при этом поршень поднимается с постоянной скоростью. Найдите эту скорость. Трения нет, ускорение свободного падения равно g .

3. Пластины плоского конденсатора, площадью S каждая, соединены проводником (рис.2). Зазор между ними H значительно меньше размеров пластин. Внутри находится второй конденсатор с пластинами той же площади, на которых имеются заряды Q и $-Q$. Определите, какую работу следует совершить, чтобы вытащить внутренний конденсатор, не меняя зазор h между его пластинами.

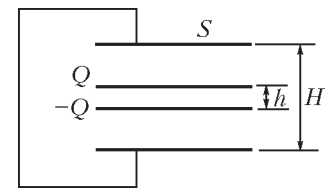


Рис. 2

4. Оцените максимальную скорость движения тени высотного здания в полдень.

5. Из провода свернуты две катушки, лежащие одна на другой. По одному выводу от обеих катушек соединили вместе, а к двум другим подключили гальванометр. Над катушками двигают плоский магнит. Затем верхнюю катушку переворачивают, и вновь двигают над катушками магнит. Показания гальванометра в этих двух случаях различаются. Объясните демонстрируемое явление.

Вариант 2

1. Пробирка массой m и сечением S плавает вертикально в воде так, что верхний конец пробирки выше уровня воды на h_0 . Когда пробирку опустили в неизвестную жидкость, она плавает так, что ее верхний конец выше уровня жидкости на h . Какова плотность жидкости ρ , если плотность воды ρ_0 ?

2. В проводящей рамке с переключкой включены резисторы с указанными на рисунке 3 сопротивлениями, сопротивления проводов и переключки пренебрежимо малы. Рамка вращается с угловой скоростью ω вок-

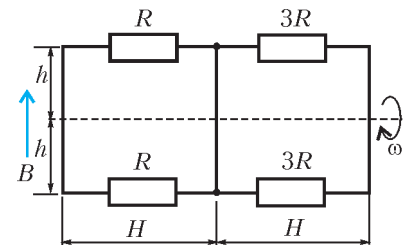


Рис. 3

руг горизонтальной оси симметрии в вертикальном магнитном поле с индукцией B . Найдите наибольшее значение тока в перемычке. Размеры рамки приведены на рисунке.

3. Конденсатор емкостью C_0 зарядили до напряжения U_0 . После этого конденсатор отсоединили от источника напряжения и отпустили его нижнюю пластину. Она начала падать и, пролетев расстояние h по вертикали, приобрела скорость v . Найдите емкость конденсатора C в этот момент, если масса пластины m , а ускорение свободного падения g .

4. Оболочку воздушного шара наполняют нагретым воздухом. Оцените количество теплоты, которое должно пойти на нагрев воздуха, чтобы воздушный шар мог поднять вас. Удельная теплоемкость воздуха при атмосферном давлении равна $1,0$ кДж/(кг · К).

5. Массивное колесо надето на согнутый стержень как на ось. Его ставят на наклонную доску так, что стержень упирается в нее. Колесо отпускают – оно стоит. Теперь вставляют другой стержень, с большей длиной от оси до доски. Отпущенное колесо скатывается по доске. Объясните демонстрируемое явление.

Вариант 3

1. На дне коробки стоит брусок массой M , на котором находится кубик массой m (рис. 4). Кубик привязан к правой

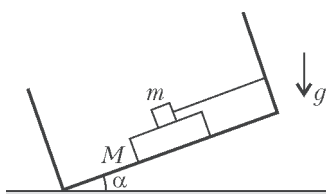


Рис. 4

стенке коробки нитью, параллельной дну. Коэффициент трения между бруском и дном равен μ , трения между бруском и кубиком нет. При каком угле наклона коробки α брусок начнет выскальзывать из под кубика?

2. При температуре T_0 тонкостенный стакан сечением S плавает в воде вверх дном, выступая из воды на высоту h_0 (рис. 5). Найдите начальный объем воздуха в стакане, если при повышении температуры до T стакан начал выступать из воды на высоту h . Изменением атмосферного давления и плотности воды пренебречь.

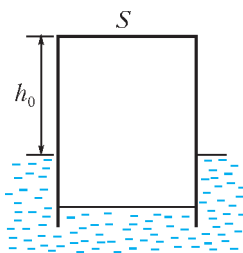


Рис. 5

3. Незаряженный конденсатор емкостью C подсоединен к параллельным проводам, сопротивление которых равно ρ на единицу длины, а расстояние между проводами H (рис. 6). Перпендикулярно плоскости проводов имеется магнитное поле с индукцией B . Равномерно движущаяся проводящая перемычка в некоторый момент времени начинает замыкать эти провода.

При какой скорости перемычки ток в контуре будет оставаться неизменным? Найдите величину этого тока, если в момент соприкосновения перемычки с проводами сопротивление контура было равно R_0 .

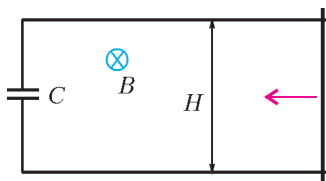


Рис. 6

4. Представьте, что вы плывете на лодке, в дне которой появилась пробоина. Оцените, при какой ее площади вы будете успевать отчерпывать набирающуюся воду литровой банкой.

5. Поплавки, один с воткнутым сверху тонким стержнем, второй – с толстым, плавают в солевом растворе, как

показано на рисунке 7. Если их опустить в пресную воду, то первый поплавок погружается почти на всю длину стержня, а второй остается практически на прежнем уровне погружения. Объясните наблюдаемое явление.

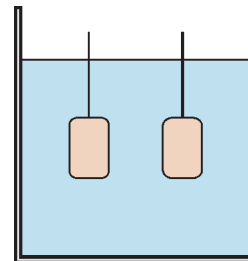


Рис. 7

Публикацию подготовили
И. Воробьев, Г. Меледин,
Г. Федотович, М. Блинов

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Математический факультет

Вариант 1

1. Найдите область определения функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\log_3(2x^2 - 7x + 6)}.$$

2. Определите сумму всех трехзначных чисел, делящихся на 4.

3. Решите неравенство

$$\left| \frac{7-x}{5x-2} \right| \leq 3.$$

4. Два завода по плану должны были выпустить за месяц 360 станков. Первый завод выполнил план на 112%, а второй на 110%, вместе заводы выпустили за месяц 400 станков. Сколько станков сверх плана выпустил за месяц каждый завод в отдельности?

5. Определите координаты точек пересечения графиков функций $f(x) = 4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 6$ и $g(x) = 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}$.

6. Определите в уравнении $x^2 - (2k+1)x + k^2 + 2 = 0$ значение k такое, что один из корней уравнения равен половине другого. Найдите эти корни.

7. Решите уравнение $\sqrt{3} \sin x = (1 - \cos x)$. Определите сумму корней этого уравнения из промежутка $[0; 2\pi]$.

8. Докажите, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными из этого угла.

9. В тетраэдр, все ребра которого равны, вписан конус. Радиус основания конуса равен 5. Определите объем пирамиды.

Вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = 32, \\ \lg(x-y)^2 - 2 \lg 2 = 0. \end{cases}$$

2. Решите неравенство $\log(64^{24} \sqrt{2^{x^2-40x}}) \geq 0$.

3. Решите уравнение $\sin x (\operatorname{ctg}^2 x - 1) = 0$. Укажите число корней на промежутке $[0; 2\pi]$.

4. Найдите все значения m , при которых неравенство $mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0$ верно для всех действительных x .

5. Решите уравнение $4^{2x-1} - 3 \cdot 2^{1+|2x-1|} + 8 = 0$.
6. Решите неравенство $\sqrt{x+6} > \sqrt{2x-5} + \sqrt{x+1}$.
7. Какое двузначное число в 4 раза больше суммы своих цифр и в три раза больше произведения цифр?
8. В равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, а средняя линия равна m . Вычислите площадь трапеции.
9. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 12 и образует с основанием цилиндра угол 60° . Определите объем правильной треугольной призмы, вписанной в этот цилиндр.

Публикацию подготовили Г.Хамов, О.Корсакова

Российский государственный
технологический университет
им. К.Э.Циолковского (МАТИ)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение $\sqrt{2x^2 - 13x + 12} = 2 - x$.
2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |x + y| = 7, \\ x^2 - y^2 = 21. \end{cases}$$

3. Найдите сумму решений уравнения

$$1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 2\sqrt{2} \sin x = 0$$

на отрезке $[-\pi; \pi]$.

4. Решите неравенство $\log_{1-x} 16 \leq 2$.
5. При каких значениях параметра a уравнение $7^t + (a+1)7^{-t} = 4$ имеет одно решение?
6. В четырехугольнике $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O , диагональ BD – это биссектриса угла ABC . Найдите отношение $OD : AD$, если около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность и $\angle ABC = 120^\circ$, $BC : AB = 1 : 4$.
7. Решите уравнение

$$3 \frac{\cos x - \cos^2 x}{\sin x} \cdot \frac{1}{3 \sin x} - 3 \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 3^{\sin x} + 3 \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{6}} = 3 \frac{1}{\sqrt{2} + \operatorname{ctg} x}$$

Вариант 2

(олимпиада-2006)

1. В книжный магазин привезли несколько одинаковых коробок с книгами, которые переложили на полки. Получилось девять полных полок и еще две книги осталось. Когда книги продали, привезли другое количество таких же коробок с книгами, которые переложили на полки. Получилось шесть полных полок, а на седьмой полке осталось место для одной книги. Сколько книг было в одной коробке?
 2. Найдите углы треугольника α, β и γ , удовлетворяющие уравнению
- $$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{3}{2}$$
3. При каких значениях b неравенство
- $$x^2 + b \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
- выполняется для всех допустимых значений x ?
4. Найдите наименьшее натуральное число n , при котором

уравнение

$$\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \dots + \frac{1}{(x+2(n-1))(x+2n)} = \frac{1}{40}$$

разрешимо в целых числах.

5. Из районных команд была создана сборная команда города по гандболу из 7 игроков. Будем считать, что два спортсмена сборной знакомы друг с другом, если они ранее какое-то время выступали за одну команду. На первом тренировочном сборе выяснилось, что среди этих семи игроков двое знакомы с пятью игроками, двое знакомы с тремя игроками, один знаком с двумя игроками и двое знакомы с одним игроком. Найдите наибольшее количество спортсменов сборной города, любые два из которых не являются знакомыми.

6. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает его стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите отношение площади треугольника MBN к площади четырехугольника $AMNC$, если в $AMNC$ можно вписать окружность и его диагональ AN – диаметр этой окружности, а диагональ MC видна из центра описанной окружности под углом 120° .

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

Выберите правильный ответ

1. Тело падает без начальной скорости и достигает поверхности земли через 4 с. С какой высоты падало тело? Сопротивлением воздуха пренебречь.
 - 1) 20 м; 2) 40 м; 3) 80 м; 4) 120 м; 5) 160 м.
2. За снегоходом на тросе тянут груз массой 500 кг. Найдите наибольшую силу натяжения троса, если максимальное ускорение снегохода 2 м/с^2 . Коэффициент трения груза о снег 0,1. Трос натянут горизонтально.
 - 1) 500 Н; 2) 750 Н; 3) 1000 Н; 4) 1250 Н; 5) 1500 Н.
3. Два шара движутся навстречу друг другу по одной прямой. Кинетическая энергия первого шара 1 Дж. Какой должна быть кинетическая энергия второго шара, чтобы после удара шары остановились? Массы шаров 1 кг и 2 кг.
 - 1) 0,25 Дж; 2) 0,5 Дж; 3) 1 Дж; 4) 2 Дж; 5) 2,5 Дж.
4. Один моль кислорода занимает объем 10 л, два моля азота занимают объем 20 л. Сравните давления газов, если их температуры одинаковы.
 - 1) Давления одинаковы; 2) давление кислорода в 2 раза больше; 3) давление азота в 2 раза больше; 4) давление азота в 4 раза больше; 5) необходимо знать молярные массы газов.

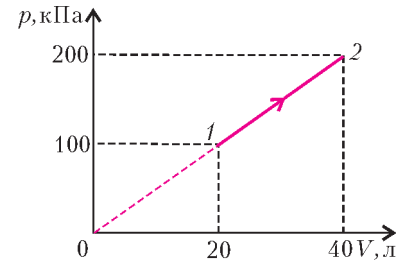


Рис. 1

5. Найдите работу, которую совершила постоянная масса идеального газа в процессе 1–2 (рис.1). На графике изображена зависимость давления газа от объема в этом процессе.
 - 1) 1000 Дж; 2) 2000 Дж; 3) 3000 Дж; 4) 4000 Дж; 5) 8300 Дж.
6. Три резистора соединены последовательно. Общее напряжение на этом участке цепи 20 В, при этом напряжение на третьем резисторе 8 В. Найдите силу тока в цепи, если сопротивление первого резистора 4 Ом, второго резистора 6 Ом.

- 1) 0,8 А; 2) 1,2 А; 3) 1,33 А; 4) 2 А; 5) 5 А.

7. Электрическое поле создано заряженным металлическим шаром, радиус шара 5 см. Во сколько раз отличаются напряженности электрического поля в точках, находящихся на расстояниях 5 см и 10 см от поверхности шара снаружи от него?

- 1) В 1,5 раза; 2) в 2 раза; 3) в 2,25 раза; 4) в 4 раза; 5) в 9 раз.

8. Частица массой 10^{-25} кг движется в однородном магнитном поле по окружности, скорость частицы $2 \cdot 10^5$ м/с. Найдите модуль изменения импульса частицы за половину оборота.

- 1) 10^{-20} кг·м/с; 2) $2 \cdot 10^{-20}$ кг·м/с; 3) $3 \cdot 10^{-20}$ кг·м/с; 4) $4 \cdot 10^{-20}$ кг·м/с; 5) 0.

9. В контуре происходят гармонические колебания. Сравните энергию электрического поля конденсатора W_C с энергией магнитного поля катушки W_L в тот момент, когда напряжение на конденсаторе равно половине максимального значения.

- 1) $W_L > W_C$ в 2 раза;
2) $W_L > W_C$ в 3 раза;
3) $W_L > W_C$ в 4 раза;
4) $W_L > W_C$ в 8 раз;
5) $W_L = W_C$.

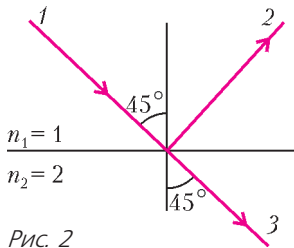


Рис. 2

10. Луч 1 падает на границу раздела двух сред под углом 45° (рис.2). Что неверно на чертеже?

- 1) Не будет луча 2;
2) не будет луча 3;
3) угол преломления луча 3 больше 45° ;
4) угол преломления луча 3 меньше 45° ;
5) на чертеже все правильно.

Вариант 2

Выберите правильный ответ

1. Первый час пути поезд проехал со скоростью 50 км/ч, следующие 2 часа он ехал со скоростью 80 км/ч. Найдите среднюю скорость поезда за эти 3 часа.

- 1) 60 км/ч; 2) 65 км/ч; 3) 70 км/ч; 4) 72 км/ч; 5) 75 км/ч.

2. Массы тел на рисунке 3 равны $m_1 = 3$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 1$ кг; нити невесомые и нерастяжимые. К первому телу приложена горизонтальная сила $F = 12$ Н. Найдите силу натяжения нити, которая связывает тела массами m_1 и m_2 . Трения нет.

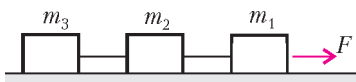


Рис. 3

- 1) 6 Н; 2) 8 Н; 3) 10 Н; 4) 11 Н; 5) 12 Н.

3. Тело массой 1 кг бросают с горизонтальной начальной скоростью 4 м/с с высоты 5 м над землей. Какой будет кинетическая энергия тела на высоте 2 м над землей? Сопротивлением воздуха пренебречь.

- 1) 8 Дж; 2) 26 Дж; 3) 38 Дж; 4) 46 Дж; 5) 58 Дж.

4. Идеальный газ нагревается с 7°C до 35°C при постоянном давлении. Объем газа при этом увеличивается на 20 л. Найдите первоначальный объем.

- 1) 4 л; 2) 5 л; 3) 16 л; 4) 25 л; 5) 200 л.

5. При сжатии идеального газа внешние силы совершают над газом работу 600 Дж, при этом внутренняя энергия газа уменьшается на 600 Дж. Получал или отдавал тепло газ в ходе этого процесса?

- 1) Отдал 1200 Дж тепла; 2) отдал 600 Дж тепла; 3) получил 1200 Дж тепла; 4) получил 600 Дж тепла; 5) не получал и не отдавал тепло.

6. Два одинаковых резистора подключают к источнику постоянного напряжения, соединив их параллельно. На каждом резисторе выделяется мощность 16 Вт. Какая мощность будет выделяться на каждом резисторе, если их подключить к тому же источнику, соединив последовательно? Сопротивлением проводов пренебречь.

- 1) 2 Вт; 2) 4 Вт; 3) 8 Вт; 4) 12 Вт; 5) 16 Вт.

7. Плоский воздушный конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения. Расстояние между пластинами конденсатора увеличивают в 2 раза, а пространство между пластинами заполняют диэлектриком с проницаемостью $\epsilon = 2$. Как изменится заряд на пластинах конденсатора?

- 1) Увеличится в 2 раза; 2) увеличится в 4 раза; 3) уменьшится в 2 раза; 4) уменьшится в 4 раза; 5) не изменится.

8. Электрон влетает в однородное магнитное поле, как показано на рисунке 4. Укажите направление силы Лоренца, которая действует на частицу в этот момент.

- 1) \uparrow ; 2) \downarrow ; 3) \leftarrow ; 4) \rightarrow ;
5) сила действует перпендикулярно плоскости чертежа.

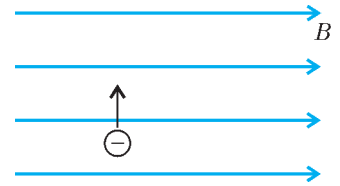


Рис. 4

9. Зависимость смещения математического маятника от времени описывается уравнением $x(t) = 0,05 \sin 2,5t$, где x измеряется в метрах. Найдите длину маятника.

- 1) 0,5 м; 2) 1,6 м; 3) 2,5 м; 4) 4 м; 5) 5 м.

10. Фотон с энергией 1,5 эВ падает на зеркало по нормали к нему. Какой импульс передает фотон зеркалу при отражении? Известно, что $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

- 1) $4 \cdot 10^{-28}$ кг·м/с; 2) $8 \cdot 10^{-28}$ кг·м/с; 3) 10^{-27} кг·м/с;
4) $1,6 \cdot 10^{-27}$ кг·м/с; 5) необходимо знать массу фотона.

Публикацию подготовили А.Браун, М.Кузьмин, А.Миронов, Л.Муравей, Г.Никулин, А.Покровский, П.Селин

Российский государственный университет нефти и газа им. И.М.Губкина

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите

$$\frac{7\sqrt{7} + 27b^3}{\sqrt{7} + 3b} + 3\sqrt{7}b - 9b^2.$$

2. Найдите наибольшее целое число из области определения функции

$$y = \sqrt{5 + 8x - 4x^2}.$$

3. Дана арифметическая прогрессия, у которой 6-й член равен 16, а 12-й член равен (-20). Найдите первый член прогрессии.

4. Решите уравнение

$$(x + 6)|x + 6| = -36.$$

5. Решите уравнение

$$4^{x+0,5} \cdot 2^{3x+1} = 32.$$

6. Дано: $\log_a b = -2,3$. Найдите $\log_a (b\sqrt{a^3})$.

7. Вычислите $\sin 40^\circ - \cos 40^\circ \operatorname{ctg} 115^\circ$.

8. Найдите в градусах наибольший отрицательный корень

уравнения

$$\cos 16^\circ \cos 2x - \sin 16^\circ \sin 2x = \frac{1}{2}.$$

9. Найдите наибольшее целое значение параметра a , при котором через точку $M(0; 6)$ можно провести три различные прямые, касающиеся графика функции

$$y = x^3 + 7x^2 + 17x + a.$$

10. Сколько целых чисел входит в область решений неравенства

$$\log_7 \sqrt{5x + 204} \cdot \log_x 7 \geq 1?$$

11. $ABCD$ – прямоугольная трапеция с острым углом ADC . В трапецию вписана окружность, она касается стороны AB в точке M , а стороны BC – в точке N . Известно, что $CD = 1$, $\angle MND = \pi/2$. Найдите площадь трапеции.

12. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ боковая грань составляет с плоскостью основания $ABCD$ угол, косинус которого равен $2/3$. Площадь поверхности сферы, проходящей через вершины S , B , C и середину стороны AD , равна 63. Найдите площадь поверхности сферы, вписанной в пирамиду $SABCD$.

Вариант 2

1. Упростите

$$\frac{0,064 - 125b^3}{0,16 + 2b + 25b^2} + 5b.$$

2. Решите уравнение

$$(\sqrt{-x-1}-2)(\sqrt{-x-1}+12)=15.$$

3. Найдите второй член геометрической прогрессии, если известно, что ее пятый член равен $1/49$, а знаменатель прогрессии равен $1/7$.

4. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$|x - 5,5| < 10.$$

5. Сколько целых решений имеет неравенство

$$0,7^{4x^2-34,04} > 17,27^{x^2-8,51}?$$

6. Вычислите

$$\log_{1,3} \sqrt[7]{8} : \log_{1,3} \sqrt[14]{8}.$$

7. Найдите наименьшее положительное число x , не входящее в область определения функции

$$y = \operatorname{tg}(10\pi x + 0,7\pi).$$

8. Найдите в градусах наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sin x + \sin 11x = 6 \sin 6x.$$

9. Прямая касается графика функции $y = x^4 - 20x^3 - 3x + 21$ в двух различных точках M и N . Найдите абсциссу середины промежутка $[M; N]$.

10. Сколько целых чисел входит в область решений неравенства

$$\log_{25} \left(\frac{9x + 15}{3x - 5} + 2,5 \right) \leq 0,5?$$

11. $ABCD$ – параллелограмм с острым углом BAD . Окружность, проходящая через вершины A , B и D , пересекает сторону BC в ее середине, а сторону CD – в точке N . Известно, что $DN : NC = 7 : 18$. Найдите $\cos \angle BAD$.

12. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковая грань образует с плоскостью основания угол, косинус которого равен $0,4$. Радиус сферы, центр которой лежит на ребре

SB и которая касается плоскости основания пирамиды и плоскости грани ASC , равен 21. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Внимание! Если единицы измерения не указаны, выразите ответ в единицах СИ. Ускорение свободного падения g считайте равным 10 м/с^2 .

Вариант 1

1. Тел брошено горизонтально. Через 3 с после броска угол между направлением полной скорости и направлением полного ускорения стал равным 60° . Определите величину полной скорости тела в этот момент времени.

2. Груз массой 3 кг подвешен к потолку лифта с помощью двух нитей, каждая из которых образует с вертикалью угол 60° . Каким будет натяжение каждой нити, если лифт будет опускаться с ускорением, направленным вниз и равным 2 м/с^2 ?

3. Человек догоняет катящуюся по инерции тележку, вскакивает на нее и остается на ней, в результате чего скорость тележки увеличивается на 50%. Во сколько раз масса тележки больше, чем масса человека? Вначале скорость человека была в 3 раза больше скорости тележки.

4. К гладкой вертикальной стене на нити подвешен шар массой 0,6 кг. Определите силу натяжения нити, если нить составляет угол 60° с вертикалью.

5. Открытую пробирку с воздухом при атмосферном давлении нагрели, затем герметически закрыли и охладдили до 7°C . Давление в пробирке уменьшилось при этом вдвое по сравнению с атмосферным. До какой температуры (в $^\circ \text{C}$) была нагрета пробирка?

6. Найдите величину ускорения, которое приобретает частица массой 0,2 г с зарядом 4 мкКл под действием однородного электрического поля с напряженностью 1500 В/м .

7. Десять ламп сопротивлением 24 Ом каждая, рассчитанные на напряжение 16 В, соединены последовательно и подключены к сети постоянного напряжения 220 В последовательно с резистором. Каково должно быть сопротивление этого резистора, чтобы лампы горели полным накалом?

8. Расстояние от изображения до рассеивающей линзы составляет 0,8 от фокусного расстояния. Во сколько раз расстояние от предмета до линзы больше фокусного расстояния?

9. В шар массой 240 г попадает пуля массой 10 г, летящая со скоростью 200 м/с по линии, проходящей через центр шара. После удара пуля отскакивает назад, причем в тепло при ударе переходит 189 Дж. Найдите конечную скорость шара.

10. В теплоизолированном цилиндре под невесомым поршнем находится идеальный одноатомный газ. Вначале поршень закреплен и соединен с дном цилиндра недеформированной пружиной. После того как поршень освободили и система пришла в равновесие, объем газа увеличился в 1,25 раза. На сколько процентов при этом уменьшилось давление? Над поршнем газа нет.

11. По П-образной рамке, наклоненной под углом 30° к горизонту и помещенной в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рамки, начинает соскальзывать без трения перемычка массой 30 г. Длина перемычки 10 см, ее сопротивление 2 мОм, индукция поля 0,1 Тл. Найдите установившуюся скорость движения перемычки. Сопротивлением рамки пренебречь.

12. Во сколько раз увеличилась кинетическая энергия электрона в атоме водорода при переходе из одного стационарного состояния в другое, если угловая скорость вращения по орбите увеличилась в 27 раз?

Вариант 2

1. Камень, брошенный под углом к горизонту, достиг наибольшей высоты 5 м. Найдите полное время полета камня.

2. К невесомой нити длиной 1 м прикреплен шарик массой 200 г, который равномерно вращается в вертикальной плоскости. При какой минимальной угловой скорости вращения произойдет обрыв нити, если она выдерживает максимальную нагрузку 3,8 Н?

3. Из орудия массой 2 т вылетает в горизонтальном направлении снаряд массой 20 кг со скоростью 250 м/с. Какую скорость (по абсолютной величине) получит орудие при отдаче? Ответ дайте в см/с.

4. Два человека несут металлическую трубу, положив ее себе на плечи. Первый человек поддерживает трубу на расстоянии 1,5 м от ее конца, второй держит противоположный конец трубы. Во сколько раз нагрузка на первого человека больше, чем на второго, если длина трубы 3,5 м?

5. При какой температуре (в кельвинах) находился газ, если при его нагревании до 177 °С средняя квадратичная скорость его молекул увеличилась в 1,5 раза?

6. Два конденсатора, емкости которых 1 мкФ и 4 мкФ, соединены последовательно и подключены к источнику тока с ЭДС 75 В. Найдите разность потенциалов на обкладках конденсатора с меньшей емкостью.

7. Медная проволока обладает электрическим сопротивлением 10 Ом. Каким электрическим сопротивлением обладает медная проволока, у которой в 6 раз больше длина и в 4 раза больше площадь поперечного сечения?

8. Рассеивающая линза с фокусным расстоянием 5 см дает уменьшенное в 5 раз изображение предмета. Найдите расстояние от предмета до изображения (в см).

9. В шар массой 100 г попадает пуля массой 2 г, летящая со скоростью 100 м/с по линии, проходящей через центр шара. Считая, что сила сопротивления движению пули в материале шара постоянна и равна 149 Н, найдите конечную скорость шара. Диаметр шара 5 см.

10. В теплоизолированном цилиндре под невесомым поршнем находится идеальный одноатомный газ при температуре 300 К. Вначале поршень закреплен и соединен с дном цилиндра недеформированной пружиной. После того как поршень освободили и система пришла в равновесие, температура понизилась до 270 К. На сколько процентов увеличился объем газа? Над поршнем газа нет.

11. Протон влетает со скоростью 30 км/с в пространство с электрическим и магнитным полями, линии которых совпадают по направлению, перпендикулярно к этим линиям. Определите напряженность электрического поля (в кВ/м), если индукция магнитного поля 0,4 Тл, а ускорение протона, вызванное действием этих полей, равно $2 \cdot 10^{12}$ м/с². Отношение заряда протона к его массе принять равным 10^8 Кл/кг.

12. Заряженный конденсатор емкостью 0,4 мФ подключили к катушке с индуктивностью 0,1 мГн. Через какое время (в мкс) от момента подключения энергия электрического поля конденсатора станет в первый раз равна энергии магнитного поля катушки? (Считать $\pi = 3,14$.)

*Публикацию подготовили
Б.Писаревский, А.Черноуцан*

Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-механический факультет)

1. Упростите выражение $\frac{x^3 - 8}{x^2 + 2x + 4} - \frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$.

2. Решите уравнение $x^2 - \frac{4}{x^2} = 3$.

3. Вычислите 3^z , где $z = \log_3^2 15 - \log_9^2 25$.

4. Найдите производную функции $y = \ln \frac{x-2}{x-4}$ в точке $x = 5$.

5. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, для которой сумма второго и третьего членов составляет 264% от ее первого члена.

6. Какое число больше: $a = \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{31}$ или $b = 2\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{4}$?

7. Решите уравнение $\sqrt{\sqrt{3} \sin x - \cos^2 x} = -\sqrt{5} \cos x$.

8. Вычислите $\sin(4 \arctg 2)$.

9. Решите неравенство $\sqrt{x^2 + 2x - 3} \leq x + 3$.

10. При каких целых n число $\sqrt[4]{n^2 - 88}$ является целым?

11. Найдите область определения функции $y = \arcsin \sqrt{\frac{x-1}{x-5}}$.

12. Найдите множество значений функции $y = \frac{9 \cos^2 x - 9 \sin x - 15}{3 \sin x + 2}$.

13. Найдите сумму всех двузначных чисел, которые делятся хотя бы на одно из чисел 3 или 5.

14. Какой должна быть абсцисса точки, лежащей на прямой с уравнением $y = 5x - 9$, чтобы через нее не проходила ни одна касательная к графику функции $y = \frac{x+3}{x-2}$?

15. Покажите, что число $\sin 40^\circ \cos 70^\circ + \sin^2 10^\circ$ является рациональным числом.

16. При каком значении α вектор $(1 + \alpha; 3 - \alpha)$ имеет наименьшую длину?

17. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + 2xy + 4 = 0, \\ |x + y| = 4 - y^2. \end{cases}$

18. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ точки M и N – середины сторон AB и CD соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около шестиугольника, если периметр трапеции $BCNM$ равен 14.

19. Правильная треугольная пирамида $SABC$ со стороной основания $AB = 3\sqrt{7}$ вписана в шар радиуса $2\sqrt{7}$. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды $TABC$, где T – середина бокового ребра AS пирамиды.

20. При каких a уравнение

$$(x+a)^2 - 3x - a = 3 + 3 \frac{x}{|x|}$$

имеет единственное решение?

Вариант 2

(физико-технический факультет)

1. Упростите выражение $\frac{a^3 - 1}{a^2 - a} + \frac{a^2 - 1}{a^2 + a}$.

2. Определите, сколько двузначных натуральных чисел делится на 4, но не делится на 3.

3. Найдите рациональное число, которое является значением выражения $\frac{\sqrt[4]{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt[4]{3+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3+1}}$.

4. Сколько процентов составляет произведение корней уравнения $x^2 - 5x + 1 = 0$ от их суммы?

5. Решите уравнение $\sqrt{1-x^2} + x = -1$.

6. Решите неравенство $|x^2 - 6x + 8| \leq (x-2)^2$.

7. Решите уравнение $\cos 2x + 3 \cos x = 1$.

8. Решите уравнение $\arctg^2 x + \operatorname{arcctg}^2 x = \frac{5\pi^2}{36}$.

9. Найдите область определения функции

$$y = \arcsin \sqrt{\log_{1/2}(x-1)}.$$

10. Найдите множество значений функции $y = \frac{4x-1}{4x^2}$.

11. Найдите целое число, которое является значением выражения $5^{\log_3 a}$, если $a = 2^{\log_3 3}$.

12. Решите уравнение $3^{x^2-1} = 2^{x+1}$.

13. Решите неравенство $\lg(3+2x-x^2) \leq \lg(1+x)$.

14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 = 4x - 3, \\ x^2 = 4y - 3. \end{cases}$$

15. Найдите все целые значения, которые может принимать разность арифметической прогрессии, если ее элементами являются числа 1; 13; 9.

16. Сумма всех элементов с нечетными номерами бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\{b_n\}$ равна 243, а сумма элементов с четными номерами равна 162. Найдите четвертый элемент прогрессии b_4 .

17. На гиперболе с уравнением $xy = -1$ найдите точку, ближайшую к прямой с уравнением $y = 4x + 1$.

18. Две окружности касаются внешним образом. Прямая, соединяющая их центры, и общая касательная образуют угол, синус которого равен $3/5$. Найдите отношение радиуса меньшей окружности к радиусу большей.

19. У треугольной пирамиды $SABC$ грани ABC и SAB – равносторонние треугольники с общей стороной AB фиксированной длины, а точка D – середина этой стороны. Найдите значение синуса угла SDC , при котором боковая поверхность пирамиды имеет наибольшую площадь.

20. Определите, при каких значениях параметра a уравнения $\cos x + |\cos x| = 2a$ и $\cos x = a$ равносильны.

*Публикацию подготовили А.Басов, А.Моисеев,
С.Преображенский*

Санкт-Петербургский государственный
университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математико-механический факультет)

1. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\log_{x-a}(a^2 + (a+1)x - x^2) = 2$ имеет единственное решение.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x}} = 1 + x.$$

3. Решите неравенство $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(3-2x) > \frac{\pi}{4}$.

4. К окружности проведены три различные касательные AB , BC и AC . Расстояние от точки A до прямой BC равно 1, расстояние от точки касания прямой BC с окружностью до проекции точки A на эту прямую равно $\sqrt{5}$, $BC = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. Найдите радиус окружности.

5. В прямую треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ вписана сфера. Известно, что $AB = 15$, $BC = 7$, $AC = 20$. Найдите радиус сечения сферы плоскостью A_1BC .

Вариант 2

(факультет психологии)

1. В конечной арифметической прогрессии сумма положительных членов равна $\frac{3}{2}$, и их на четыре меньше, чем отрицательных членов. Первый член прогрессии равен -1 . Найдите ее последний член.

2. Решите уравнение $\sin 2x - \cos 2x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2}$.

3. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{4}} \frac{7x-12-x^2}{x^2+x-6} \geq \log_{x^2} \frac{1}{x}$.

4. Точки M и N лежат на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC . Найдите площадь треугольника CMN , если известно, что $AM = BN = 3$, $AN = 7$, $CM = 6$.

5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $4\sqrt{2a-2^x} = a^2 - 2^x$ имеет единственное решение.

Вариант 3

(филологический факультет)

1. По двум взаимно перпендикулярным дорогам в сторону перекрестка выехали два велосипедиста. Расстояние между ними в этот момент было 13 км. Затем в течение получаса расстояние между велосипедистами уменьшалось, а потом стало увеличиваться. Скорость одного из велосипедистов равна 18 км/ч. Найдите скорость другого, если известно, что в момент старта он находился на расстоянии 12 км от перекрестка.

2. Решите неравенство

$$\log_{3x} \log_{4x^2} 8x \geq 0.$$

3. Решите уравнение

$$(2 \cos x - 1) \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \sin 2x.$$

4. Прямая l является внешней касательной к двум окружностям. Радиус одной из них равен 3. Расстояние между точками касания равно 6, а расстояние между центрами окружностей равно $3\sqrt{13}$. Найдите радиус окружности, касающейся прямой l и каждой из двух данных окружностей.

5. Изобразите на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству

$$y^2 - x + 1 = |x^2 - x + 2y|.$$

Публикацию подготовили А.Громов, Ю.Чурин