МАТЕМАТИКА ТУРНИРОВ

А.ЗАСЛАВСКИЙ, Б.ФРЕНКИН

Коэффициенты и определение победителя

В спортивных соревнованиях победителем считается участник турнира, набравший наибольшее число очков. Однако при этом никак не учитывается, против кого были набраны эти очки. Поэтому в методе парных сравнений иногда применяются более сложные способы упорядочения. Например, для турнира без ничьих можно определить коэффициент каждого участника, равный сумме очков, набранных теми, кого победил данный спортсмен.

Задача 22. *Оказалось, что у всех участников коэффициент одинаков. Число участников турнира больше двух. Докажите, что все спортсмены набрали одинаковое количество очков.*

Решение. Пусть не все набрали одинаковое число очков. Пусть, далее, занявшие первое место набрали K очков, а последнее – L очков. Коэффициент занявших первое место – это сумма K чисел, каждое из которых не меньше L. Значит, этот коэффициент не меньше KL. Аналогично, коэффициент занявших последнее место – это сумма L чисел, каждое из которых не больше K. Поэтому коэффициент занявших последнее место не превосходит KL. Если коэффициенты первых и последних равны, то они равняются KL. Это возможно только в том случае, если занявшие первое место выиграли только у (некоторых) набравших L очков, т.е. занявших последнее место, и обратно.

Если первое место заняли несколько спортсменов, то один из них выиграл у другого, что противоречит предыдущему. Значит, на первом месте один спортсмен – аналогично и на последнем. По условию в турнире есть третий участник. Из предыдущего следует, что он выиграл и у первого, и у последнего. Но тогда он набрал больше очков, чем первый, так как первый мог выиграть только у последнего. Получено искомое противоречие.

Задача 23. *Докажите, что определенный в предыдущей задаче коэффициент у участников с максимальной суммой очков не ниже среднего.*

Решение. Пусть N обозначает число участников турнира минус 1 (т.е. число встреч, сыгранных каждым участником). Одного из набравших наибольшее число очков назовем чемпионом. Тех, кто ему проиграл (соответственно, выиграл у него), для краткости будем называть просто «проигравшими» («выигравшими»). Пусть, далее, $M=\left[\left(N^2-1\right)/4\right]$. Покажем, что коэффициент чемпиона не ниже M. Допустим, чемпион набрал K очков. Число «выигравших» равно $N-K$, и каждый из них набрал не больше чемпиона, поэтому в сумме «выигравшие» набрали не больше $(N-K)K$. Общая сумма очков во всех матчах равна $N(N+1)/2$. Поэтому сумма очков «проигравших», т.е. коэффициент чемпиона, не меньше чем

$$N\cdot(N+1)/2-K-(N-K)\cdot K=$$
$$=N\cdot(N+1)/2-K\cdot(N+1-K)\geq N\cdot(N+1)/2-(N+1)^2/4=$$
$$=(N+1)/2\cdot(N-1)/2=\left(N^2-1\right)/4.$$

Так как коэффициент чемпиона – целое число, то он не меньше M.

Теперь покажем, что средний коэффициент участников не больше M, откуда и следует утверждение задачи. Если спортсмен набрал X очков, то эти очки внесут вклад в коэффициенты тех $N-X$ участников, которые у него выиграли. В общей сумме коэффициентов появится слагаемое $X(N-X)$. Оно не превосходит $N^2/4$, но так как обязано быть целым, то при нечетном N не превосходит и $\left(N^2-1\right)/4$. Таким образом, оно не больше M.

Сумма коэффициентов равна сумме $(N+1)$ таких слагаемых. Чтобы получить средний коэффициент, нужно эту сумму разделить на $N+1$. Поэтому средний коэффициент участника турнира не выше M, что и требовалось.

Аналогично коэффициенту, введенному выше, определим для каждого участника второй коэффициент, равный сумме коэффициентов побежденных им участников, третий коэффициент, равный сумме их вторых коэффициентов, и так далее.

Задача 24. *Пусть k-е коэффициенты всех участников для некоторого k оказались равны. Верно ли, что все участники набрали поровну очков?*

Вообще говоря, ответ на вопрос задачи отрицателен: если 1-й участник выиграл у всех, 2-й – у всех, кроме 1-го, и т.д., то все $(n-1)$-е коэффициенты равны нулю. Попробуйте доказать, что этот пример единственный.

Задача 25. *Будем упорядочивать участников по их первым, вторым и т.д. коэффициентам. Верно ли, что, начиная с некоторого момента, порядок участников перестанет изменяться?*

В некоторых книгах по методу парных сравнений утверждается, что этот факт верен. Однако приводимое там доказательство, во-первых, не элементарно, а во-вторых, проходит не во всех случаях. Точный ответ на вопрос задачи нам неизвестен.

В турнирах с ничьими учитывать только результаты побежденных данным игроком противников, очевидно, нельзя. Поэтому для каждого участника i турнира подсчитаем его бергеровский коэффициент B_i, который определяется по такой формуле: сумма очков тех участников, у кого i выиграл, минус сумма очков тех, кому он проиграл. Отметим, что в шахматных соревнованиях бергеровский коэффициент применяется для определения мест тех участников, которые набрали поровну очков.

Задача 26 (А.Толпыго).

а) Может ли быть, что все $B_i>0$?

б) Может ли быть, что все $B_i<0$?

в) Известно, что $B_i\geq 0$ для всех i. Верно ли, что $B_i=0$ для всех i?

г) Известно, что $B_i\leq 0$ для всех i. Верно ли, что $B_i=0$ для всех i?

Указание к решению. Пункты а), б) этой задачи предлагались на Московской математической олимпиаде 2001 года. Для их решения достаточно рассмотреть сумму $\sum s_iB_i$, где s_i – сумма очков i-го участника. Она состоит из слагаемых вида s_is_j, где партия между игроками i и j не завершилась вничью, причем каждое такое произведение входит в сумму один раз с плюсом и один раз с минусом. Следовательно,

---

Окончание. Начало см. в «Кванте» №1.

сумма равна нулю, и ответ на вопросы а), б) отрицательный. Более того, из проведенного рассуждения следует, что ответ на вопрос в) положительный. Напротив, в пункте г) ответ отрицательный: если один игрок проиграл все встречи, а остальные сыграли между собой вничью, то коэффициент последнего игрока отрицателен, а все остальные равны нулю.

Проигравший вылетает

Как известно, круговые турниры – не единственная существующая форма соревнований. В противоположность им, при кубковой (олимпийской) системе проигравший «вылетает», и ничьи невозможны. В таких соревнованиях роль случайности гораздо выше, но зато борьба протекает острее. Если круговому турниру отвечает полный граф (вершины – игроки, ребра – поединки, любые две вершины соединены ребром), то граф олимпийского турнира представляет собой бинарное дерево (циклов нет, и на пути, ведущем от висячей вершины к корню, в каждую промежуточную вершину входят два ребра и выходит одно).

Задача 27. *Турнир по боксу проходил по олимпийской системе (в каждом круге проигравшие выбывают, отдыхающих нет). Сколько боксеров участвовало в турнире, если по окончании турнира выяснилось, что 32 человека выиграли боев больше, чем проиграли?*

Решение. При олимпийской системе большинство боев выиграно у тех и только тех боксеров, которые вышли хотя бы в третий тур. Участники третьего тура составляют четверть от общего числа участников. Следовательно, в турнире участвовало 128 боксеров.

Интересно сравнить результаты возможных турниров с одними и теми же участниками, но проводимых по разным системам. Приведем две задачи на эту тему (автор К.Фельдман, см. статью Б.Френкина «Жеребьевка для чемпиона» в «Кванте» № 5 за 2000 год). Чтобы выделить то, что зависит от формы проведения, а не от игроков, примем «предположение о стабильной игре»: в каждой паре игроков победитель всегда один и тот же. Ничьи в круговом турнире между такими игроками исключены, поскольку их не бывает в кубковом турнире. Однако мы допускаем, что один игрок выигрывает у другого, другой – у третьего, а при этом третий выигрывает у первого.

Задача 28. *Прошел чемпионат по круговой системе с участием 2^N игроков. Теперь тем же спортсменам предстоит разыграть кубок. Выполнено предположение о стабильной игре. Докажите, что существует жеребьевка розыгрыша кубка, при которой чемпион кругового турнира выйдет в финал.*

Решение. Занумеруем игроков следующим образом. В начало списка поставим тех, кто победил чемпиона, т.е. «опасных». Далее – проигравших ему, т.е.«неопасных». Последний номер дадим чемпиону. В каждом туре розыгрыша кубка составим пары по порядку номеров.

Чемпион выступил не хуже «среднестатистического» участника, который выиграл столько же, сколько и проиграл. Значит, число «опасных» не больше числа «неопасных» . Все «опасные» попадут в первую половину списка, тогда как чемпион – во вторую. Поэтому чемпион не встретится с «опасным» игроком раньше финала, что и требовалось.

Задача 29. *В условиях предыдущей задачи докажите, что существует жеребьевка, при которой чемпион кругового турнира получит кубок.*

Решение. Каждый из «опасных» (выигрывающих у чемпиона) проиграл в чемпионате кому-то из «неопасных» (иначе он бы выиграл больше матчей, чем чемпион, что невозможно). Составим первую пару розыгрыша кубка из «опасного» и такого «неопасного», которому он проиграл. Следующие пары составляем таким же образом, пока это возможно. Допустим, остались «опасные», которых нельзя включить в такие пары (они проиграли в чемпионате тем «неопасным», которые уже вошли в предыдущие пары). Тогда пусть эти «опасные» играют между собой. Если один из них останется без пары, то поступим следующим образом.

Общее число «опасных» не больше числа «неопасных» (поскольку чемпион выступил не хуже «среднестатистического» игрока, который выиграл и проиграл поровну). В составленных парах не больше «неопасных» игроков, чем «опасных», и еще один «опасный» остался без пары. Значит, кто-то из «неопасных» не был еще включен в пару – пусть с ним и играет оставшийся «опасный».

Остальные игроки объединяются в пары произвольно. Чемпион выйдет в следующий тур, поскольку играет с «неопасным». Если в остальных турах пары строятся по тому же правилу, то чемпион получит кубок. Это заведомо возможно, если в каждом туре «опасные» составляют менее половины участников. Допустим, что вплоть до некоторого тура мы обеспечили выполнение этого условия. Покажем, что и в следующем туре можно этого добиться.

Поскольку в следующий тур выходит половина участников предыдущего, то достаточно показать, что отсеивается не меньше половины «опасных». Но в матчах между ними выбывает каждый второй участник. Только один «опасный» может выиграть у «неопасного». Поэтому достаточно, чтобы в том же туре хотя бы один «опасный» проиграл «неопасному». Как мы видели, в первом туре это выполнено. В последующие туры выходили только такие «опасные», которые проигрывают кому-то из «неопасных», также вышедших в этот тур. И первая же пара составлялась из «опасного» и такого «неопасного», которому он проигрывает. Наше утверждение доказано.

В заключение этого параграфа приведем задачу, в которой рассматривается еще одна форма соревнований – игра на вылет. Несмотря на простоту формулировки и решения, задача оказалась трудной для участников отбора на Российскую олимпиаду 1998 года.

Задача 30. *Группа школьников играет в пинг-понг на вылет. Они установили очередь, вначале играют первый и второй, а в дальнейшем каждый очередной участник играет с победителем предыдущей пары. На следующий день те же школьники снова играют на вылет, но очередь идет в обратную сторону – от последнего к первому. Докажите, что найдутся два школьника, которые играли между собой и в первый день, и во второй.*

Решение. Соперник последнего игрока в первый день играет со всеми, кто стоит позже него в очереди. С одним из них он играет свою первую партию во второй день.

Еще несколько задач

В приведенных ниже задачах, как правило, требуется выяснить, можно ли выбрать из данного турнира подмножество игроков, обладающее некоторым свойством. Часть этих задач не решены.

Задача 31.

а) Докажите, что в турнире без ничьих из n участников можно занумеровать их так, что 1-й выиграл у 2-го, 2-й у 3-го,…, $(n-1)$-й у n-го и 1-й у n-го.

б) Докажите, что в турнире без ничьих либо существует цикл, включающий всех участников, либо можно разбить участников на две группы так, что любой игрок из первой группы победил любого из второй.

Задача 32. *В круговом турнире с 2^N участниками не было ничьих. Докажите, что существует цепочка из $N+1$ участника, каждый из которых победил всех последующих.*

Утверждение задачи легко доказать по индукции. Однако вопрос о том, насколько можно уменьшить число 2^N, значительно сложнее. Можно привести пример турнира 7 участников, никакие 4 из которых не образуют транзитивного подтурнира. Но в любом турнире с 15 участниками найдутся 5, каждый из которых победил всех последующих. При каком максимальном числе участников существует турнир без таких цепочек длины k, неизвестно.

Задача 33. *В круговом турнире участвовали n спортсменов, имевших номера от 1 до n. Участник с номером 1 сделал 1 ничью, с номером 2 сделал 2 ничьих, …, участник с номером n − 1 сделал n − 1 ничью. Сколько ничьих сделал участник с номером n?*

Ответ. $[n/2]$.

Решение. Участник с номером $n-1$ сыграл вничью со всеми остальными спортсменами. Так как 1-й сделал лишь одну ничью, то он не сыграл вничью ни с кем, кроме $(n-1)$-го. Участник $n-2$ не сделал ничью лишь с одним спортсменом, и по доказанному это 1-й. Значит, 2-й сыграл вничью и с $(n-1)$-м, и с $(n-2)$-м (если только он не совпадает с одним из них, т.е. если $n > 4$; случай малых n легко разбирается, и ответ будет аналогичным). Так как у 2-го участника всего 2 ничьи, то больше он ни с кем не сыграл вничью. Из сказанного видно, что $(n-1)$-й и $(n-2)$-й участники сделали ничью с n-м, а 2-й не сделал. Продолжая в том же духе, получаем, что при $i \le (n-1)/2$ участник i сыграл вничью с участниками $n-1,\ldots, n-i$, а участник $n-i$ сыграл вничью с участниками от i до n (разумеется, не считая себя). Этим решена задача для нечетного n: с n-м участником сделали ничьи $(n-1)/2 = [n/2]$ спортсменов. При четном n осталось рассмотреть участника $n/2$. В силу сказанного выше, меньшие номера не сделали с ним ничьих. Так как всего он сделал $n/2$ ничьих, то он сыграл вничью со всеми последующими номерами, включая n. Это означает, что участник n сделал $n/2 = [n/2]$ ничьих.

Будем говорить, что турнир обладает свойством P_k, если для любых k участников найдется участник, победивший их всех.

Задача 34 (А.Толпыго).

а) Докажите, что если в любом турнире, обладающем свойством P_k, участвуют не менее n игроков, то в любом турнире, обладающем свойством P_{k+1}, участвуют не менее 2n + 1 игроков.

б) При каком наименьшем n существует турнир n игроков со свойством P_2? (**Ответ.** $n = 7$.)

в) Постройте турнир 19 игроков со свойством P_3. (**Ответ.** Занумеруем игроков числами от 0 до 18, и пусть игрок i выигрывает у игрока j тогда и только тогда, когда $i - j \equiv l^2 \pmod{19}$.)

г) Докажите, что турниры со свойством P_k существуют для любого k. (Указание. Оцените вероятность того, что в турнире n участников данные k не имеют общего победителя.)

Ответ на вопрос, при каком минимальном n существует турнир n участников со свойством P_k, неизвестен даже при $k = 3$. Из пунктов а), б), очевидно, следует, что $n \ge 15$, а из пункта в) – что $n \le 19$. Для больших значений k неизвестны даже приблизительные оценки.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Энергетический метод исследования колебаний

А.ЧЕРНОУЦАН

Одна из важных задач теории колебаний – найти период малых колебаний механической системы около положения равновесия. В школьном курсе физики количественно рассматриваются колебания систем только с одной степенью свободы (положение которых задается одним параметром – смещением, углом отклонения и т.д.) и происходящие без потерь энергии. Простейшие примеры таких систем – груз на пружине и математический маятник.

Обычно колебания таких систем изучаются *динамическим* методом. Этот метод состоит в приведении уравнения движения системы (второго закона Ньютона) к виду, соответствующему *уравнению гармонических колебаний*

$$x'' + \omega^2 x = 0, \qquad (1)$$

где x'' – вторая производная от параметра x по времени. Однако в некоторых случаях школьнику оказывается сложно записать уравнение движения. Это относится в первую очередь к системам с распределенной массой. Например, для получения уравнения колебаний протяженного твердого тела – *физического маятника* – нужно записать уравнение динамики вращательного движения, но его в школе не изучают. И тут, как всегда, на помощь приходит закон сохранения энергии, который позволяет существенно расширить круг задач, доступных для решения школьными методами.

В чем же заключается *энергетический* метод исследования колебаний? Можно сказать, что он состоит в сопоставлении энергии колебательной системы с энергией простейшего маятника – груза массой m на пружине жесткостью k. Если выражение для механической энергии системы, отклонение которой от положения равновесия определяется параметром x, удалось привести к виду

$$E = \frac{m_{эф} x'^2}{2} + \frac{k_{эф} x^2}{2}, \qquad (2)$$

то система совершает гармонические колебания

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

циклическая частота которых равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{эф}}{m_{эф}}}. \qquad (3)$$

Коэффициент $m_{эф}$ в выражении для кинетической энергии называют *эффективной массой* (часто она совпадает с массой системы), а коэффициент $k_{эф}$ в выражении для потенциальной энергии – *эффективной жесткостью*. Действительно, поскольку механическая энергия сохраняется, производная от нее по времени равна нулю:

$$E'(t) = 0 = m_{эф}x'x'' + k_{эф}xx'$$

и выполняется уравнение гармонических колебаний (1):

$$x'' + \frac{k_{эф}}{m_{эф}}x = 0 .$$

Для примера того, как работает энергетический метод, покажем, как с его помощью найти циклическую частоту колебаний математического маятника с массой груза m и длиной нити l. В качестве параметра x выберем смещение груза маятника вдоль дуги окружности из положения равновесия. Кинетическая энергия маятника равна $mx'^2/2$, т.е. эффективная масса равна массе груза. Потенциальная энергия для малых отклонений ($x \ll l$) равна

$$E_п = mgh = mgl(1-\cos\alpha) = 2mgl\sin^2\frac{\alpha}{2} = mgl\frac{\alpha^2}{2} = \frac{mg}{l}\frac{x^2}{2}, \quad (4)$$

где $\alpha = x/l$ – угол отклонения маятника. Таким образом, эффективная жесткость равна mg/l, а циклическая частота колебаний составляет $\omega = \sqrt{\frac{k_{эф}}{m_{эф}}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Теперь перейдем к рассмотрению задач с протяженными телами.

Задача 1. *Стержень длиной $l = 40$ см изогнули по дуге окружности в виде полукольца и с помощью невесомых спиц прикрепили к горизонтальной оси, проходящей через центр окружности. Найдите циклическую частоту малых колебаний полукольца около положения равновесия, если ось вращения перпендикулярна его плоскости. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.*

В качестве параметра x, определяющего положение системы, выберем смещение точек стержня вдоль дуги окружности из положения равновесия (рис.1). Тогда кинетическая энергия маятника равна $mx'^2/2$, т.е. эффективная масса равна массе стержня. Расчет потенциальной энергии стержня на первый взгляд кажется сложной задачей – ведь мы не знаем положение центра тяжести. Однако существует простое рассуждение, основанное на симметрии стержня. При повороте стержня на угол $\alpha = x/R$ (здесь R – радиус кольца) бóльшая его часть перейдет сама в себя, и для подсчета потенциальной энергии можно будет считать, что мы перенесли кусочек длиной x и массой mx/l с одного конца стержня на другой (это хорошо видно на рисунке 1). При этом центр кусочка сместится вверх на x, т.е. изменение потенциальной энергии стержня составит

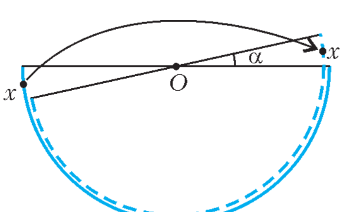


Рис. 1

$$E_п = \frac{mx}{l}gx = \frac{2mg}{l}\frac{x^2}{2} \quad (5)$$

(потенциальная энергия колебательной системы в положении равновесия всегда принимается равной нулю). Значит, эффективная жесткость системы составляет $k_{эф} = 2mg/l$, а циклическая частота малых колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{эф}}{m_{эф}}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} = 7\ \text{с}^{-1}.$$

Задача 2. *В U-образную трубку сечением $S = 10$ см^2 налили $m = 400$ г воды. Пренебрегая трением, найдите циклическую частоту вертикальных колебаний жидкости в трубке. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.*

Поскольку вода в разных коленах трубки движется в разных направлениях, не очень ясно, как корректно записать уравнение движения жидкости. Проще найти энергию жидкости. Если вода сместилась на x из положения равновесия, то, как и в предыдущей задаче, можно считать, что столбик воды длиной x и массой ρSx переместился из одного колена в другое (рис.2). Изменение потенциальной энергии воды равно

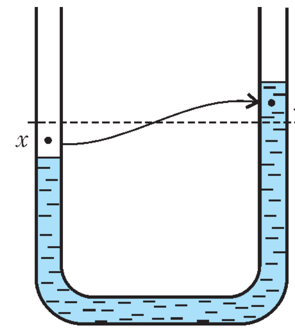


Рис. 2

$$E_п = (\rho Sx)gx = 2\rho gS\frac{x^2}{2},$$

где $\rho = 1$ г/см^3 – плотность воды. Итак, эффективная жесткость равна $k_{эф} = 2\rho gS$, эффективная масса равна массе воды, а циклическая частота колебаний составляет

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{эф}}{m_{эф}}} = \sqrt{\frac{2\rho gS}{m}} = 7\ \text{с}^{-1}.$$

Задача 3. *Невесомый стержень изогнули в виде дуги, составляющей 1/3 длины окружности радиусом $R = 5$ см, и с помощью невесомых спиц прикрепили к горизонтальной оси, проходящей через центр окружности перпендикулярно ее плоскости. К концам стержня прикрепили два одинаковых груза. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.*

В качестве параметра, определяющего отклонение системы от положения равновесия, примем (для разнообразия) малый угол отклонения α. Кинетическая энергия системы равна

$$E_к = 2\frac{mv^2}{2} = \frac{2mR^2\omega^2}{2} = 2mR^2\frac{\alpha'^2}{2},$$

т.е. эффективная масса равна $m_{эф} = 2mR^2$ (здесь m – масса груза). Потенциальную энергию удобно выразить через изменение высоты центра тяжести, который расположен посередине между грузами на расстоянии $l = R\cos 60^\circ = R/2$ под точкой подвеса:

$$E_п = 2mgl(1-\cos\alpha) = 2mgl\frac{\alpha^2}{2} = mgR\frac{\alpha^2}{2}.$$

Следовательно, эффективная жесткость равна $k_{эф} = mgR$, и циклическая частота малых колебаний составляет

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{эф}}{m_{эф}}} = \sqrt{\frac{g}{2R}} = 10\ \text{с}^{-1}.$$

Попробуйте для упражнения получить этот ответ, выбрав в качестве параметра не угол α, а более привычное смещение грузов $x = R\alpha$.

Задача 4. *Стержень массой $M = 20$ г и длиной $l = 118$ см изогнули в форме полукольца и с помощью невесомых спиц прикрепили к горизонтальной оси, проходящей* *через центр кольца перпендикулярно его плоскости. К середине стержня прикрепили груз массой $m = 100$ г. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2; число $\pi = 3{,}14$.*

Эту задачу можно считать объединением примера с математическим маятником и задачи 1 с полукольцом. Соответственно, для вычисления потенциальной энергии надо применять и метод вычисления высоты при малом угле отклонения (формула (4)), и метод «перемещения кусочка» из задачи 1 (формула (5)):

$$E_п = mgR(1-\cos\alpha) + \frac{Mx}{l}gx = \frac{mg}{R}\frac{x^2}{2} + \frac{2Mg}{l}\frac{x^2}{2} = \frac{(\pi m + 2M)g}{l}\frac{x^2}{2}.$$

Поскольку кинетическая энергия системы равна

$$E_к = (m+M)\frac{x'^2}{2},$$

для циклической частоты малых колебаний получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{эф}}{m_{эф}}} = \sqrt{\frac{\pi m + 2M}{m+M}\frac{g}{l}} = 5\ \text{с}^{-1}.$$

Задача 5. *Невесомый стержень длиной $l = 3{,}5$ м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. К свободному концу стержня прикрепили груз массой m, а к середине стержня – груз массой $3m$. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.*

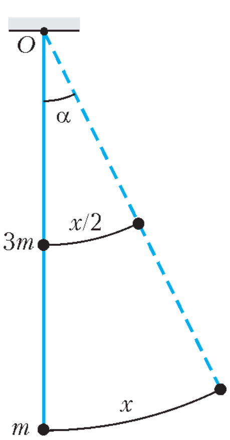


Рис. 3

В качестве параметра отклонения выбираем смещение x нижнего груза вдоль дуги окружности (рис.3). Смещение верхнего груза при этом составляет $x/2$, а кинетическая энергия системы равна

$$E_к = \frac{mx'^2}{2} + \frac{3m(x'/2)^2}{2} = 1{,}75m\frac{x'^2}{2},$$

т.е. эффективная масса системы для этого параметра отклонения составляет $m_{эф} = 1{,}75m$. Потенциальная энергия системы равна

$$E_п = mgl(1-\cos\alpha) + 3mg\frac{l}{2}(1-\cos\alpha) = \frac{2{,}5mg}{l}\frac{x^2}{2},$$

т.е. $k_{эф} = 2{,}5mg/l$. Для циклической частоты малых колебаний получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{эф}}{m_{эф}}} = \sqrt{\frac{10}{7}\frac{g}{l}} = 2\ \text{с}^{-1}.$$

В качестве упражнения попробуйте получить этот же ответ, выбрав в качестве параметра отклонения угол $\alpha = x/l$.

Задача 6. *Невесомый стержень длиной $l = 50$ см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. К свободному концу стержня прикрепили груз массой $m = 0{,}5$ кг, а середину стержня с помощью горизонтальной пружины жесткостью $k = 32$ Н/м соединили с вертикальной опорой. При вертикальном расположении стержня пружина не деформирована. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.*

За параметр отклонения возьмем смещение груза x из положения равновесия вдоль дуги окружности (рис. 4). При таком смещении деформация пружины равна $x/2$, и потенциальная энергия системы имеет вид

$$E_п = \frac{mg}{l}\frac{x^2}{2} + k\frac{(x/2)^2}{2} = \left(\frac{mg}{l} + \frac{k}{4}\right)\frac{x^2}{2}.$$

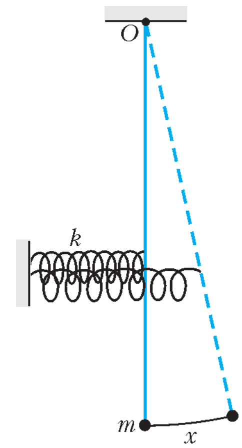


Рис. 4

Очевидно, что эффективная масса равна массе груза. Тогда циклическая частота малых колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{эф}}{m_{эф}}} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{4m}} = 6\ \text{с}^{-1}.$$

Задача 7. *Около дна горизонтального полого цилиндра катается взад-вперед маленькое тонкое колечко, оставаясь все время в вертикальной плоскости, перпендикулярной оси цилиндра. Найдите циклическую частоту такого колебательного движения. Внутренний радиус цилиндра $R = 1{,}25$ м, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.*

При качении без проскальзывания трение покоя работу не совершает, и механическая энергия сохраняется. Для решения этой задачи надо знать, что кинетическая энергия катящегося со скоростью v колечка (обруча, тонкостенного цилиндра) массой m равна

$$E_к = mv^2.$$

Это утверждение является следствием общей теоремы о том, что кинетическая энергия любой системы может быть представлена в виде суммы двух слагаемых: кинетической энергии поступательного движения системы как целого со скоростью центра масс и кинетической энергии в системе отсчета, связанной с центром масс:

$$E_к = \frac{mv_ц^2}{2} + E_{отн}.$$

В случае катящегося колечка относительное движение представляет собой чистое вращение колечка вокруг своей оси. Из условия отсутствия проскальзывания следует, что линейная скорость вращения равна $v_ц$, т.е. кинетическая энергия такого вращения есть $E_{отн} = mv_ц^2/2$.

Впрочем, можно вывести исходное утверждение специально для колечка, не опираясь ни на какие дополнительные теоремы. Для этого надо рассмотреть два маленьких диаметрально противоположных элемента кольца массой Δm каждый, вычислить их скорости по закону сложения скоростей (с помощью теоремы косинусов) и убедиться, что их полная кинетическая энергия равна $2\Delta m v_ц^2$.

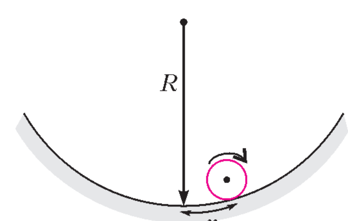


Рис. 5

Если в качестве параметра отклонения выбрать смещение x колечка от нижней точки по дуге окружности (рис.5), то энергия колечка записывается в виде

$$E = 2m\frac{x'^2}{2} + \frac{mg}{R}\frac{x^2}{2}$$

(см. формулу (4)). Циклическая частота колебательного движения колечка равна

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2R}} = 2\ \text{с}^{-1}.$$

Следующие три задачи показывают, как работает энергетический метод в том случае, когда взаимодействие осуществляется электростатическими силами.

Задача 8. *Стержень массой m = 30 г изогнули в форме дуги, составляющей 1/6 длины окружности радиусом R = 0,1 м, и с помощью невесомых спиц прикрепили к оси, проходящей через центр окружности перпендикулярно ее плоскости. На концах стержня закрепили одинаковые положительные точечные заряды величиной q = 0,1 мкКл каждый. Стержень находится в поле неподвижного точечного заряда Q = 0,2 мкКл, расположенного посередине между концами стержня. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. Силу тяжести не учитывать.*

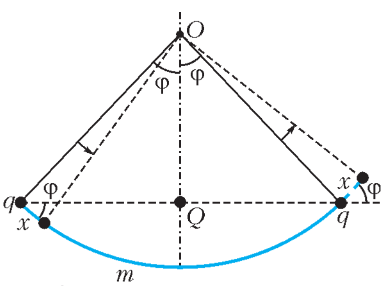


Рис. 6

В качестве параметра отклонения выберем смещение x каждого из зарядов q вдоль дуги окружности (рис.6; здесь $\varphi = 30°$). Кинетическая энергия системы сводится к кинетической энергии стержня:

$$E_к = \frac{mx'^2}{2}.$$

Изменение потенциальной энергии системы при малом смещении стержня с зарядами равно

$$E_п = k\frac{qQ}{R\sin\varphi + x\cos\varphi} + k\frac{qQ}{R\sin\varphi - x\cos\varphi} - 2k\frac{qQ}{R\sin\varphi} =$$

$$= 2k\frac{qQR\sin\varphi}{(R\sin\varphi)^2 - (x\cos\varphi)^2} - 2k\frac{qQ}{R\sin\varphi} =$$

$$= 2k\frac{qQR\sin\varphi\left((R\sin\varphi)^2 + (x\cos\varphi)^2\right)}{(R\sin\varphi)^4 - (x\cos\varphi)^4} - 2k\frac{qQ}{R\sin\varphi} =$$

$$= 4k\frac{qQ\cos^2\varphi}{R^3\sin^3\varphi}\frac{x^2}{2} = 24k\frac{qQ}{R^3}\frac{x^2}{2},$$

где $k = 9\cdot10^9$ Н·м/Кл^2 – электрическая постоянная. Для циклической частоты колебаний получаем

$$\omega = \sqrt{24k\frac{qQ}{mR^3}} = 12\ \text{с}^{-1}.$$

Задача 9. *Стержень массой m = 25 г изогнули в виде дуги, составляющей 1/3 длины окружности радиусом R = 60 см, и с помощью невесомых спиц прикрепили к оси, проходящей через центр окружности перпендикулярно ее плоскости. Стержень равномерно заряжен положительным зарядом с линейной плотностью λ = 2 мкКл/м и находится в поле неподвижного отрицательного точечного заряда Q = –6 мкКл, расположенного посередине между концами стержня. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. Силу тяжести не учитывать.*

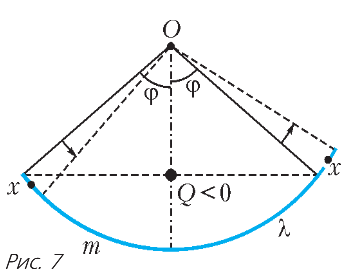


Рис. 7

В качестве отклоняющего параметра x выберем смещение точек стержня из положения равновесия вдоль дуги окружности (рис.7; здесь $\varphi = 60°$). Кинетическая энергия стержня равна $mx'^2/2$. Для вычисления потенциальной энергии применим метод «перемещения малого кусочка», который мы использовали в задачах 1 и 2:

$$E_п = k\frac{\lambda x\cdot Q}{R\sin\varphi + \frac{x}{2}\cos\varphi} - k\frac{\lambda x\cdot Q}{R\sin\varphi - \frac{x}{2}\cos\varphi} =$$

$$= -k\frac{\lambda x\cdot Q\cdot x\cos\varphi}{(R\sin\varphi)^2 - \left(\frac{x}{2}\cos\varphi\right)^2} = -\frac{2k\lambda Q\cos\varphi}{(R\sin\varphi)^2}\frac{x^2}{2} = \frac{4}{3}\frac{k\lambda|Q|}{R^2}\frac{x^2}{2}.$$

Циклическая частота малых колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{4k\lambda|Q|}{3mR^2}} = 4\ \text{с}^{-1}.$$

Задача 10. *На концах невесомого стержня длиной l = 10 см закреплены маленькие шарики массой m = 9 г каждый. На шарики наносят разноименные заряды одинаковой величины q = 3 мкКл и помещают эту систему в однородное электрическое поле напряженностью E = 600 В/м. Найдите циклическую частоту малых колебаний системы около положения равновесия. Силу тяжести не учитывать.*

Поскольку сумма сил, действующих на систему, равна нулю, система отсчета центра масс инерциальная, и можно считать, что середина стержня неподвижна. За параметр, характеризующий отклонение системы от положения равновесия, примем угол поворота стержня α (рис.8). Кинетическая энергия системы имеет вид

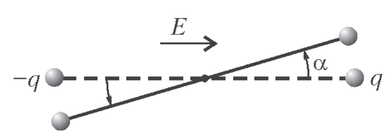


Рис. 8

$$E_к = 2\frac{m(\alpha' l/2)^2}{2} = \frac{ml^2}{2}\frac{\alpha'^2}{2},$$

т.е. эффективная масса равна $m_{эф} = ml^2/2$. Изменение потенциальной энергии при повороте на малый угол α равно работе поля, взятой с обратным знаком:

$$E_п = 2qE\frac{l}{2}(1-\cos\alpha) = qEl\frac{\alpha^2}{2},$$

т.е. эффективная жесткость равна $k_{эф} = qEl$. Для циклической частоты малых колебаний получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{эф}}{m_{эф}}} = \sqrt{\frac{2qE}{ml}} = 2\ \text{с}^{-1}.$$

В последней задаче рассматривается ситуация, когда колебания как таковые отсутствуют, поскольку движение происходит в одном направлении, без возврата назад. Однако оказывается, что это движение происходит по такому же закону гармонических колебаний, как и движение маятника (в фазе разгона или торможения).

Задача 11. *Длинную трубку согнули под прямым углом и установили так, что одно из колен смотрит вертикально вверх. В вертикальном колене удерживают веревку длиной l = 90 см таким образом, что она доходит до места сгиба. Через какое время (в мс) после того, как веревку*

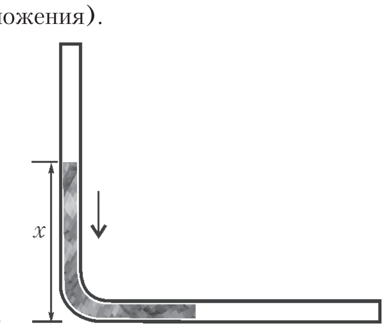


Рис. 9

отпустят, она наполовину соскользнет в горизонтальное колено? Трением пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2; число $\pi = 3{,}14$.

Если в момент времени t длина веревки, оставшейся в вертикальном колене, равна x (рис.9), то энергия системы имеет вид

$$E = \frac{mx'^2}{2} + \frac{mx}{l} g \frac{x}{2} = \frac{mx'^2}{2} + \frac{mg}{l}\frac{x^2}{2},$$

где mx/l – масса куска веревки в вертикальном колене, $x/2$ – высота центра тяжести этого куска. Поскольку это выражение идентично выражению для энергии гармонических колебаний с частотой $\omega = \sqrt{g/l}$, а начальная скорость равна нулю, то движение происходит по закону

$$x = l\cos\omega t$$

(в начальный момент $x_0 = l$). Эта формула действует только в течение четверти периода, пока x не обратится в ноль, т.е. пока вся веревка не соскользнет в горизонтальное колено. Чтобы найти искомое время, надо подставить $x = l/2$. Решив уравнение, получим

$$t = \frac{\pi}{3\omega} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{l}{g}} = 314 \text{ мс}.$$

Упражнения

1. Стержень длиной $l = 20$ см изогнули в форме дуги, составляющей $1/6$ длины окружности, и с помощью невесомых спиц прикрепили к горизонтальной оси, проходящей через центр окружности перпендикулярно ее плоскости. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. ($g = 9{,}8$ м/с^2.)

2. Тонкое колесо массой $M = 400$ г с невесомыми спицами может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. На колесе закрепили маленький груз массой $m = 100$ г. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. Радиус колеса $R = 50$ см. ($g = 10$ м/с^2.)

3. Невесомый стержень длиной $l = 2{,}5$ м согнули посередине под углом $120°$, прикрепили к его концам одинаковые грузы и повесили местом сгиба на тонкий гвоздь, вбитый в стену. Пренебрегая трением, найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. ($g = 10$ м/с^2.)

4. Невесомый стержень длиной $l = 40$ см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. К середине стержня прикрепили груз массой $m = 0{,}5$ кг, а нижний конец стержня с помощью горизонтальной пружины жесткостью $k = 30$ Н/м соединили с вертикальной опорой. При вертикальном расположении стержня пружина не деформирована. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. ($g = 9{,}8$ м/с^2.)

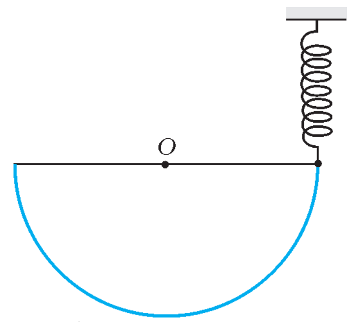


Рис. 10

5. Стержень массой $m = 0{,}5$ кг и длиной $l = 40$ см изогнули по дуге окружности в виде полукольца и с помощью невесомых спиц прикрепили к горизонтальной оси, проходящей через центр окружности (рис.10). К одному из концов стержня прикрепили вертикальную недеформированную пружину жесткостью $k = 16$ Н/м, верхний конец которой закреплен. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия, если ось вращения перпендикулярна плоскости полукольца. ($g = 9{,}8$ м/с^2.)

6. Тонкое кольцо радиусом $R = 0{,}1$ м может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через одну из точек кольца перпендикулярно его плоскости. Найдите циклическую частоту малых колебаний около положения равновесия. ($g = 9{,}8$ м/с^2.)

Указание. Используйте тот факт, что кинетическая энергия кольца с одной неподвижной точкой равна $mv_ц^2$, где $v_ц$ – скорость центра кольца.

7. Невесомый стержень изогнули в виде дуги, составляющей $1/3$ длины окружности радиусом $R = 5$ см, и с помощью невесомых спиц прикрепили к горизонтальной оси, проходящей через центр окружности перпендикулярно ее плоскости. К концам стержня прикрепили два одинаковых груза массой $m = 40$ г каждый. Стержень равномерно заряжен с линейной плотностью $\lambda = 1$ мкКл/м и находится в поле неподвижного точечного заряда $Q = 5$ мкКл, расположенного под осью вращения на одном уровне с концами стержня. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. ($g = 10$ м/с^2.)

8. Тонкую цепочку длиной $l = 45$ см удерживают за верхний конец на гладкой наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Через какое время (в мс) после освобождения цепочки она полностью покинет наклонную плоскость, если вначале ее нижний конец находился у края наклонной плоскости? ($g = 10$ м/с^2; $\pi = 3{,}14$.)

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Колечко на ветке

(Начало см. на 2-й с. обложки)

На каждой встрече изобретателей головоломок обязательно звучит фраза: «Сложную головоломку придумать легко, вы попробуйте изобрести простую...» Парадокс этих слов лишь кажущийся – изобретатели говорят не о трудности решения задачи, она подразумевается обязательной, а про сложность конструкции.

Именно такую головоломку придумал москвич Кирилл Гребнев, недавний выпускник Российского химико-технологического университета им. Д.И.Менделеева. Его изобретение состоит всего из двух веточек.

Для изготовления головоломки подойдут сучки любого дерева или кустарника, но лучше взять их от дуба – его ветки сильно кустятся и причудливо изогнуты. Головоломки получаются непохожими друг на друга, более запутанными и трудными в решении.

На съезде любителей головоломок в Хельсинки, где Кирилл впервые показал свое изобретение, оно было признано самым оригинальным и интересным. Даже знатоки крутили веточки в руках по нескольку минут, не понимая, как можно отцепить колечко. Любопытно, что эту же головоломку, но сделанную из проволоки, они решали мгновенно. На обложке приведена также схема проволочной модели, но не для того, чтобы вы ее изготовили, а с целью помочь выбрать ветки правильной конфигурации.

Желаем успеха и сообщаем, что другие головоломки Кирилла Гребнева (не менее интересные) опубликованы в «Кванте» №1 за 2007 год и №3 за 2005 год.

А.Калинин

О величии Эйлера как математика можно судить хотя бы по тому, что при изучении теории чисел создается впечатление, что Эйлер в основном интересовался теорией чисел; если же изучаешь расходящиеся ряды или дифференциальные уравнения, то кажется, что именно расходящиеся ряды или дифференциальные уравнения были для Эйлера любимым предметом исследования, и т.д.

Г.Эдвардс

Эйлер вычислял так свободно, как люди дышат, как орлы парят в воздухе.

Ф.Араго

Его имя может исчезнуть только вместе с наукой.

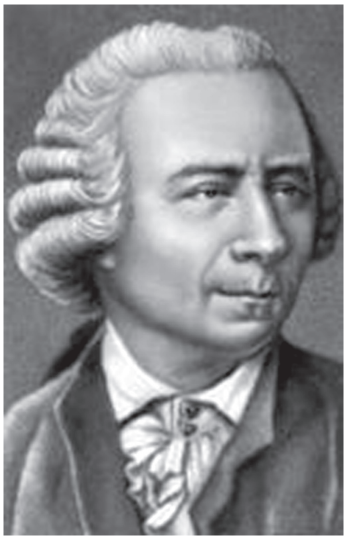
Н.Фусс

Эйлер разведывал в математике все, что было возможно.

А.Шпайзер

«ЗНАМЕНИТЕЙШИЙ УЧЕНЫЙ МУЖ»

Так уважительно обращался к своему бывшему ученику один из видных математиков XVIII столетия профессор Базельского университета Иоганн Бернулли. В этом почтительном обращении нет преувеличения – оно адресовалось Леонарду Эйлеру (1707–1783).



Эйлер явил пример самозабвенного служения науке. Потеряв в 1738 году один глаз, а в 1766 году ослепнув на оба глаза, он, тем не менее, продолжал продуктивно работать, диктуя результаты своих многочисленных исследований секретарям и ученикам. Половина его работ была создана именно в этот период.

Свои результаты Эйлер излагал с поразительной ясностью, раскрывая ведущие к ним пути и снабжая выкладки ценными примерами. «Читайте, читайте Эйлера, он – наш общий учитель», – советовал известный французский математик П.Лаплас. С ним солидарен другой известный математик, К.Гаусс: «Изучение работ Эйлера остается наилучшей школой в различных областях математики, и ничто другое не может это заменить».

Ученые многих стран признавали Эйлера не только «знаменитейшим», но и «сверхостроумным», «несравненным», «главой математиков». Широта научных интересов, глубина полученных результатов, а главное – неимоверная творческая продуктивность Эйлера и в наше время вызывает восхищение. Эйлер написал около 750 статей, 40 книг, а 15 его работ были подготовлены для различных конкурсов. К этому следует добавить несколько тысяч писем в различные страны Европы, нередко представляющих собой подлинные научные труды. Список его работ охватывает все современные ему разделы математики, механики, оптики, астрономии, техники и других отраслей знания.

Статистические подсчеты показывают, что Эйлер в среднем делал одно открытие в неделю.

Вот некоторые находки Эйлера:

- В любом треугольнике точка пересечения высот H (ортоцентр), точка пересечения медиан M и центр O описанной окружности лежат на одной прямой – *прямой Эйлера*. Точка M лежит между точками O и H, при этом $OM : MH = 1 : 2$ (рис.1).

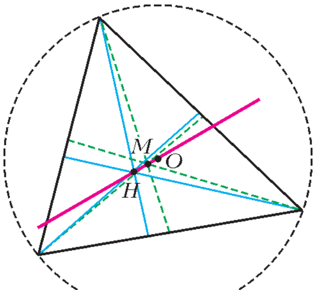


Рис. 1

- В любом треугольнике середины сторон (точки 1, 2, 3 на рисунке 2), основания его высот (точки 4, 5, 6) и середины отрезков от вершин до ортоцентра (точки 7, 8, 9) лежат на одной окружности – *окружности Эйлера*. Радиус этой окружности равен половине радиуса описанной вокруг треугольника окружности, а ее центр F совпадает с серединой отрезка, который соединяет ортоцентр H с центром O описанной окружности.

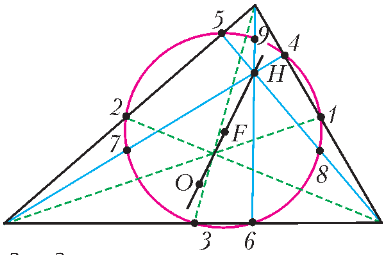


Рис. 2

- Центр I вписанной в треугольник окружности ра-

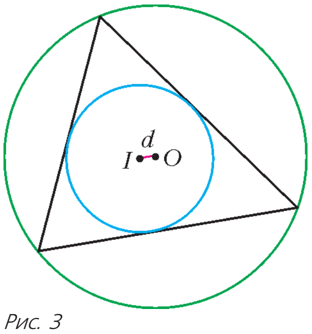


Рис. 3

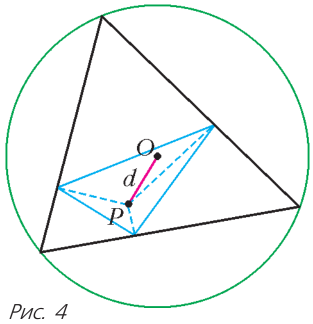


Рис. 4

диуса r и центр O описанной окружности радиуса R (рис.3) удалены друг от друга на расстояние d такое, что $d^2 = R^2 - 2Rr$.

• Пусть S – площадь треугольника, R – радиус описанного около него круга, S' – площадь треугольника, образованного основаниями перпендикуляров, опущенных на стороны данного треугольника из точки P, удаленной от центра O описанного круга на расстояние d (рис.4). Тогда

$$S' = \frac{S}{4}\left|1 - \frac{d^2}{R^2}\right|.$$

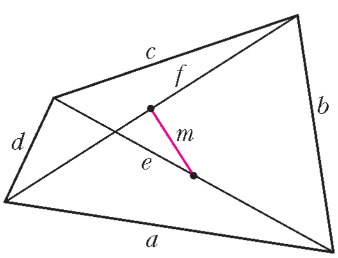


Рис. 5

• Для каждого четырехугольника стороны a, b, c, d, диагонали e и f, а также расстояние m между серединами диагоналей (рис. 5) удовлетворяют соотношению

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4m^2.$$

• На реке Прегель, проходящей через город Кенигсберг и омывающей два острова, имеется семь мостов (рис.6). Обойти все мосты, пройдя по каждому из них только один раз, и вернуться в исходную точку невозможно.

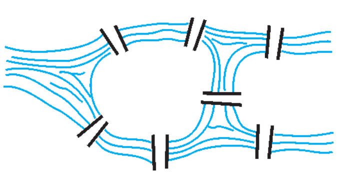


Рис. 6

• Число вершин B, ребер P и граней $Г$ выпуклого многогранника связаны формулой

$$B - P + Г = 2.$$

• Тождество Эйлера о четырех квадратах:

$$\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)\left(p^2 + q^2 + r^2 + s^2\right) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

где $x = ap + bq + cr + ds$, $y = aq - bp \pm cs \mp dr$, $z = ar \mp bs - cp \pm dq$, $t = as \pm br \mp cq - dp$.

• Еще Якоб Бернулли поставил задачу поиска суммы ряда чисел, обратных квадратам: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$

Эйлер установил, что эта сумма равна $\frac{\pi^2}{6}$, попутно найдя суммы других аналогичных рядов, например

$$1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + \frac{1}{625} + \ldots = \frac{\pi^4}{90}.$$

• В 1734 году Эйлер доказал, что сумма n членов гармонического ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$ с ростом n приближается к величине $C + \ln(n+1)$, где C – константа, впоследствии получившая название *константы Эйлера*. Эйлер нашел 15 ее верных знаков: $C = 0{,}577215664901532\ldots$ В настоящее время неизвестно, является ли константа Эйлера рациональным числом или нет.

• В 1737 году Эйлер получил другое замечательное тождество:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

играющее центральную роль в современной теории чисел. Произведение в правой части распространено на все простые числа $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$, s – натуральный параметр. Используя это тождество, Эйлер в том же году впервые доказал расходимость ряда величин, обратных простым числам. Несмотря на то, что с ростом n простые числа в натуральном ряду встречаются все реже, сумма ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \ldots$$

превосходит любую наперед заданную величину.

• В 1743 году Эйлер нашел формулу, устанавливающую связь тригонометрических функций с показательной функцией: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, где i – мнимая единица, $i^2 = -1$. При $x = \pi$ отсюда получается тождество, которое Феликс Клейн назвал «самым удивительным равенством в математике», поскольку оно связывает пять наиболее известных математических величин: $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Эйлер занимался изучением работы механических пил, электростатических машин, ветряных мельниц, турбин, насосов, оптических и музыкальных механизмов; составлением географических карт; организацией страхования и лотерей; расчетами каналов и шлюзов, печей, зубчатых колес, оптимального расположения мачт на корабле, колебаний детской колыбели.

Черпая задачи из практики, Эйлер развивал математику как органическое целое, «ведя за собой других исследователей, обучая их думать и писать так, как думал и писал сам» (М.В.Остроградский).

Нет науки, которая не была бы связана с математикой.

Leonh. Euler