Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июня 2007 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2–2007» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2036» или «Ф2043». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2040 предлагалась на XXVIII Турнире городов.

Задачи М2036 – М2040, Ф2043–Ф2047

М2036. Андрей, Боря и Саша поделили 20 монет так, что не все монеты достались одному из них. После этого каждую минуту один из ребят отдает по одной монете двум другим. Через некоторое время у Андрея, Бори и Саши оказалось a, b и c монет соответственно. Найдите количество возможных троек (a, b, c).

К.Каибханов

М2037. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E; точки K и M – середины сторон AB и CD; точки L и N – проекции точки E на стороны BC и AD. Докажите, что прямые KM и LN перпендикулярны.

Фольклор

М2038. Фома и Ерема делят кучу из кусков сыра. Сначала Фома, если хочет, выбирает один кусок и режет его на два. Затем он раскладывает сыр на две тарелки. После этого Ерема выбирает одну тарелку, и они делят сыр на ней, беря себе по очереди по куску; начинает Ерема. Точно так же они делят сыр со второй тарелки, только первым начинает Фома. Докажите, что Фома всегда может действовать так, чтобы получить не менее половины сыра (по весу).

А.Шаповалов

М2039. Докажите, что для каждого натурального $n > 1$ найдется натуральное z, не представимое в виде $x^n - y!$, где x и y – натуральные.

Н.Агаханов

М2040. Положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$ удовлетворяют неравенствам

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 < \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{2},$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k < \frac{x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_k^3}{2}.$$

а) Докажите, что $k > 50$.

б) Укажите пример таких чисел для какого-нибудь k.

в*) Найдите наименьшее k, для которого такой пример возможен.

А.Толпыго

Ф2043. Груз массой 3 кг поднимают и опускают при помощи легкой нити и блока, ось которого закреплена неподвижно. Однажды блок «заело» – он перестал вращаться вокруг своей оси. При этом удается поднимать груз силой 40 Н, приложенной к свободному концу нити, и груз в этом случае движется вверх с постоянной скоростью. Какой груз нужно подвесить к свободному концу нити, вместо того чтобы тянуть нить, чтобы груз массой 3 кг двигался с той же скоростью вниз? Трение между нитью и блоком – сухое, коэффициент трения не зависит от прижимающего усилия.

А.Блоков

Ф2044. Гантелька состоит из тонкого легкого стержня длиной L и двух одинаковых маленьких шариков массой M каждый на концах стержня. В начальный момент гантелька стоит в углу комнаты вертикально, опираясь на пол и вертикальную стену. От очень малого толчка гантелька начинает двигаться, при этом один из концов скользит по полу, а другой продолжает касаться стены. Найдите силы, с которыми гантелька действует на пол и стену в тот момент, когда она составляет угол $45°$ с вертикалью. Трения нет.

А.Зильберман

Ф2045. Массивный клин с углом $60°$ при основании может двигаться по гладкому горизонтальному столу. На наклонной поверхности клина находится маленькая тележка. Когда тележка едет по неподвижному клину – мы его удерживаем, приложив к нему горизонтальную силу, – она давит на его поверхность силой f. Увеличим горизонтальную силу, действующую на клин, так, чтобы он двигался по горизонтали с постоянным ускорением. Найдите величину этой силы, если известно, что сила, с которой тележка давит на поверхность клина, стала вчетверо больше по величине. Масса клина в 5 раз больше массы тележки.

З.Рафаилов

Ф2046. В двух одинаковых сосудах находятся одинаковые массы кислорода и гелия. Давление кислорода 1 атм, давление гелия 2 атм. Сосуды соединяют тонкой трубкой, и газы перемешиваются. Каким станет давление в системе после установления равновесия? Теплообмен с окружающей средой пренебрежимо мал. Молярная масса кислорода 32 г/моль, гелия 4 г/моль.

А.Повторов

Ф2047. Многопредельный ампер-вольтметр для измерений в цепях постоянного тока сделан на основе точного микроамперметра с током полного отклонения 100 мкА и сопротивлением 850 Ом. При помощи многопозиционного переключателя к нему подключаются точно подобранные резисторы — добавочные сопротивления для измерения напряжений и шунты для измерения токов. Пределы измерения напряжений 1 В, 10 В и 100 В, пределы измерения токов 1 мА, 10 мА и 100 мА. Хотелось бы иметь более «подробные» пределы измерений, но кардинально переделывать точный и удобный прибор совсем не хочется. На передней панели прибора есть отдельный, не используемый для его работы переключатель на два положения – у переключателя три контакта. В одном его положении соединены между собой контакты *1* и *2*, а контакт *3* отключен, при другом положении отключен контакт *2*, а соединены контакты *1* и *3*. Придумайте и рассчитайте простую схему, которая позволяла бы «растянуть» шкалы прибора ровно в три раза на всех пределах измерения (шкала измерения напряжений 10 В превращается в 30 В, шкала измерения тока 1 мА – в 3 мА и т.д.) в одном из положений этого переключателя, а в другом положении все должно оставаться «как было». Кстати, эти положения переключателя можно обозначить *x1* и *x2*.

Р.Александров

Решения задач М2011–М2020, Ф2028–Ф2032

М2011. *Натуральные числа от 1 до 200 разбили на 50 множеств. Докажите, что в одном из них найдутся три числа, являющиеся длинами сторон некоторого треугольника.*

Рассмотрим числа 100, 101, ..., 200. Так как их всего 101, то какие-то три из них попадут в одно множество. Сумма любых двух из этих трех чисел больше 200, и, следовательно, больше третьего числа. Значит, существует треугольник с соответствующими длинами сторон, что и требовалось доказать.

М.Мурашкин

М2012. *В тетраэдре ABCD из вершины A опустили перпендикуляры AB', AC', AD' на плоскости, делящие двугранные углы при ребрах CD, BD, BC пополам. Докажите, что плоскость $B'C'D'$ параллельна плоскости BCD.*

Продолжим отрезок AB' до пересечения с плоскостью BCD в точке B''. Так как плоскости BCD и ACD симметричны относительно биссекторной плоскости, то $AB' = B'B''$. Аналогично по точкам C' и D' строим точки C'' и D''.

При гомотетии с центром A и коэффициентом $\frac{1}{2}$ плоскость $B''C''D'' = BCD$ переходит в плоскость $B'C'D'$, поэтому $B'C'D' \parallel BCD$, что и требовалось доказать.

А.Бадзян

М2013. *При каких натуральных n найдутся такие положительные рациональные, но не целые числа a и b, что оба числа $a + b$ и $a^n + b^n$ целые?*

Ответ: при всех нечетных n.

Если n нечетно, то положим $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{2^n - 1}{2}$. Тогда $a + b$ целое, и

$$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}\right) =$$
$$= 2^{n-1}\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}\right);$$

знаменатели слагаемых в скобках равны 2^{n-1}, поэтому число $a^n + b^n$ также целое.

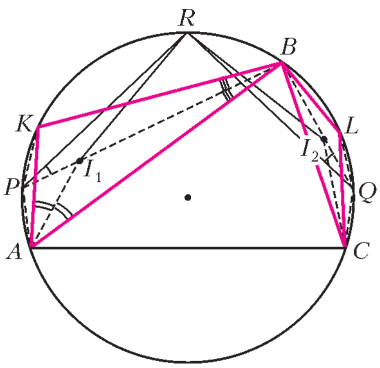
Пусть n четное, $n = 2k$ для некоторого натурального k. Предположим, что требуемые числа a, b нашлись. Так как их сумма целая, то знаменатели в их несократимой записи равны, т.е. $a = \frac{p}{d}$, $b = \frac{q}{d}$, где $d > 1$, $\text{НОД}(p,d) = \text{НОД}(q,d) = 1$; при этом $p + q$ кратно d. Тогда

$$p^n + q^n = \left(p^{2k} - q^{2k}\right) + 2q^{2k} =$$
$$= \left(p^2 - q^2\right)\left(p^{2k-2} + p^{2k-4}q^2 + \ldots + q^{2k-2}\right) + 2q^{2k} =$$
$$= (p+q)K + 2q^{2k},$$

где $K = (p-q)\left(p^{2k-2} + p^{2k-4}q^2 + \ldots + q^{2k-2}\right)$ – целое число. Поскольку $a^n + b^n = \frac{p^n + q^n}{d^n}$ целое, то $p^n + q^n$ делится на d^n. В частности, $p^n + q^n$ делится на d, а так как $p + q$ делится на d, то и $2q^{2k}$ делится на d. Так как $\text{НОД}(q,d) = 1$, то 2 делится на d, и возможно лишь $d = 2$. Если $d = 2$, то p^n и q^n – квадраты нечетных чисел, следовательно, дают остаток 1 при делении на 4. Поэтому $p^n + q^n$ не делится на 4, а должно делиться на 2^{2k}. Противоречие.

В.Сендеров

М2014. *На дугах AB и BC окружности, описанной около треугольника ABC, выбраны точки K и L соответственно так, что прямые KL и AC параллельны. Докажите, что центры вписанных окружно-*



стей треугольников ABK и CBL равноудалены от середины дуги ABC.

Если $AB = BC$, то утверждение задачи очевидно. Пусть для определенности $AB > BC$ (см. рисунок).

Обозначим через I_1, I_2 центры вписанных окружностей треугольников AKB и CLB соответственно, через P, Q – вторые точки пересечения прямых BI_1, BI_2 с описанной окружностью треугольника ABC, а через R – середину дуги ABC этой окружности. Тогда $PA = QC$ как хорды, стягивающие половины равных дуг AK и CL. Так как $\angle PAI_1 = \angle PAK + \angle KAI_1 = \angle PBK + \angle BAI_1 = \angle ABI_1 + \angle BAI_1 = \angle AI_1P$, то треугольник AI_1P равнобедренный, и $PA = PI_1$. Аналогично, $QC = QI_2$; следовательно, $PI_1 = QI_2$. Далее, $PR = QR$ как хорды, стягивающие равные дуги, а $\angle I_2QR = \angle I_1PR$ как углы, опирающиеся на одну дугу. Тогда треугольники RI_1P и RI_2Q равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $RI_1 = RI_2$, что и требовалось.

С.Берлов

M2015. *Можно ли спаять проволочный каркас куба $2 \times 2 \times 2$, разбитого на кубики $1 \times 1 \times 1$ (рис.1), из восемнадцати деталей конструктора, в котором каждая деталь имеет вид:*

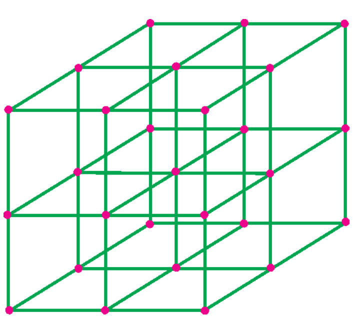


Рис. 1

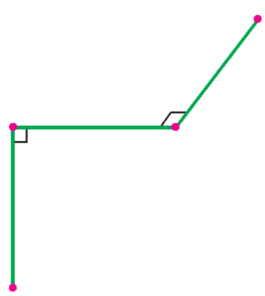


Рис. 2

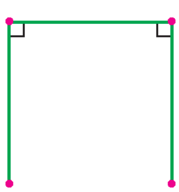


Рис. 3

а) скобки из трех попарно перпендикулярных спиц длины 1 (рис.2);
б) скобки из трех спиц длины 1 в виде буквы «П» (рис.3)?

Ответ: а) нельзя; б) нельзя.

Предположим, что каркас спаять удалось.

а) Так как каркас состоит из 54 единичных отрезков, то каждый единичный отрезок между узлами должен быть спицей ровно для одной детали. Из вершины куба выходят три отрезка (нечетное число), поэтому хотя бы одна деталь начинается в этой вершине. Если в одной из восьми вершин куба $2 \times 2 \times 2$ начинается деталь, то заканчивается она в центре куба. Отсюда следует, что центр является концом для 8 или более деталей. Но из центра куба выходят только 6 отрезков. Противоречие.

б) Из вершины куба выходят 3 отрезка, которые должны принадлежать не менее чем двум деталям. Из центра куба выходят 6 отрезков, которые должны принадлежать не менее чем трем деталям. Так как одна и та же деталь не может примыкать к двум вершинам или к вершине куба и к его центру, то необходимо не менее $2 \cdot 8 + 3 = 19$ деталей – противоречие.

Л.Емельянов

M2016. *У выпуклого многогранника $2n$ граней ($n \geq 3$), и все грани являются треугольниками. Какое наибольшее число вершин, в которых сходятся ровно 3 ребра, может быть у такого многогранника?*

Ответ: $\left[\frac{2n}{3}\right]$.

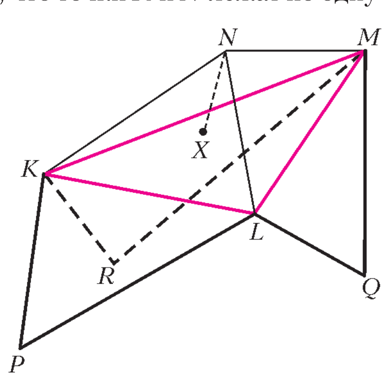
Назовем вершину, в которой сходятся ровно 3 ребра, *хорошей*.

Докажем, что никакие две хорошие вершины не лежат в одной грани. Предположим противное – пусть хорошие вершины A и B лежат в одной грани ABC. Ребро AB принадлежит еще одной грани – ABD. Поскольку вершина A хорошая, то кроме AB, AC, AD нет других ребер, выходящих из A. В вершине A сходятся ровно 3 грани – ABC, ABD и грань, содержащая ребра AC и AD, т.е. грань ACD. Аналогично получаем, что BCD является гранью многогранника. Получается, что многогранник является тетраэдром $ABCD$, что противоречит условию $n \geq 3$.

Из доказанного следует, что каждой хорошей вершине можно сопоставить три грани, сходящиеся в ней, причем различным хорошим вершинам сопоставлены разные грани. Отсюда следует, что количество хороших вершин не превосходит $\frac{2n}{3}$.

Остается описать построение выпуклого $2n$-гранника, для которого количество хороших вершин равно $\left[\frac{2n}{3}\right]$.

Определим вначале процедуру *наращивания грани* многогранника T с треугольными гранями. Пусть KLM – одна из граней (см. рисунок), KLP, LMQ, MKR – грани, отличные от KLM, содержащие ребра KL, LM, MK соответственно (точки P, Q, R не обязательно различны). Пусть X – некоторая внутренняя точка треугольника KLM. На перпендикуляре к плоскости KLM, восставленном в точке X, вне многогранника T выберем такую точку N, что точки K и N лежат по одну сторону от плоскости LMQ, L и N – по одну сторону от MKR, M и N – по одну сторону от KLP (этого можно добиться, выбирая длину XN достаточно малой). Рассмотрим многогранник T', получаемый добавлением к T пирамиды $KLMN$. По построе-



нию многогранник T' выпуклый. Будем говорить, что T' получен из T наращиванием грани KLM.

Если $n = 3$, то, нарастив одну из граней тетраэдра, получим пример шестигранника с двумя хорошими вершинами.

Пусть $n \geq 4$. В зависимости от остатка при делении на 3 представим n в виде $n = 3k$, $n = 3k - 1$ или $n = 3k - 2$ для некоторого натурального $k \geq 2$. Рассмотрим тетраэдр и нарастим некоторую его грань, у полученного многогранника нарастим еще одну грань и т.д. Повторим эту операцию $(k - 2)$ раз. При каждой операции количество граней увеличивается на 2, поэтому через $(k - 2)$ операции мы получим выпуклый $2k$-гранник, все грани которого треугольные. Отметим $n - k$ граней этого многогранника и последовательно их нарастим. При этом образуется выпуклый $2n$-гранник с $n - k = \left[\frac{2n}{3}\right]$ новыми вершинами, каждая из которых является хорошей.

А.Гарбер

М2017. *Квадрат 3000×3000 произвольным образом разбит на доминошки (т.е. прямоугольники 1×2 клетки).*

а) Докажите, что доминошки можно раскрасить в 3 цвета так, чтобы доминошек каждого цвета было поровну и у каждой доминошки было не более двух соседей ее цвета (доминошки считаются соседними, если они содержат клетки, соседние по стороне).

б) Докажите, что доминошки можно раскрасить в 4 цвета так, чтобы доминошек каждого цвета было поровну и ни у какой доминошки не было соседей ее цвета.

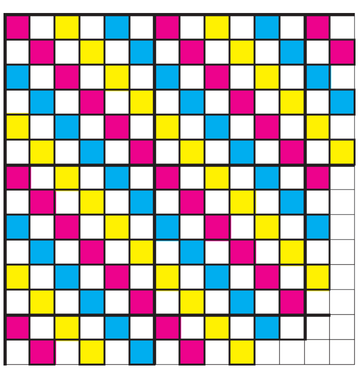


Рис. 1

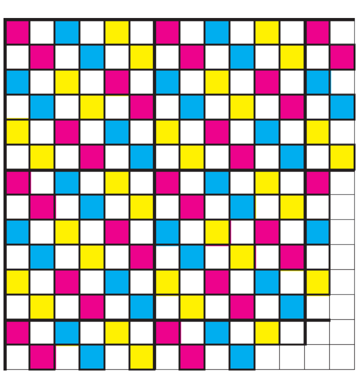


Рис. 2

Раскрасим клетки квадрата в черный и белый цвета в шахматном порядке. Каждая доминошка покрывает ровно одну черную клетку.

а) Разобьем квадрат 3000×3000 на квадраты 6×6 и в каждом квадрате перекрасим черные клетки в 3 цвета, как показано на рисунках 1 или 2. Окрасим доминошки в красный, синий и желтый цвета так, чтобы доминошка накрывала клетку своего цвета. В квадрате 6×6 поровну клеток каждого цвета, значит, и в квадрате 3000×3000 тоже. Следовательно, доминошек каждого цвета поровну. Пусть две клетки одного цвета покрыты соседними доминошками. Легко видеть, что для наших раскрасок это возможно только если эти две клетки имеют общую вершину. На рисунке 1 для фиксированной клетки имеется не более двух клеток того же цвета, имеющих с ней общую вершину, а на рисунок 2 – не более одной такой клетки. Отсюда следует, что если использовать раскраску рисунка 1, то для любой доминошки имеется не более двух соседних доминошек того же цвета, а если использовать раскраску рисунка 2, то даже не более одной соседней доминошки того же цвета.

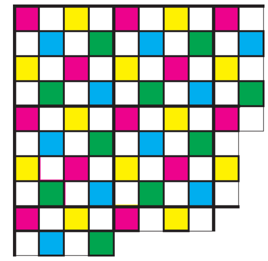


Рис. 3

б) Разобьем квадрат 3000×3000 на квадраты 4×4 и в каждом квадрате перекрасим черные клетки в 4 цвета, как показано на рисунке 3. Окрасим доминошки в красный, синий, желтый и зеленый цвета так, чтобы доминошка накрывала клетку своего цвета. В квадрате 4×4 поровну клеток каждого цвета, значит, и в квадрате 3000×3000 тоже. Легко видеть, что две клетки одного цвета не могут быть покрыты соседними доминошками. Следовательно, при такой раскраске нет одноцветных соседних доминошек.

П.Кожевников

М2018. *Докажите, что если натуральное число N представляется в виде суммы трех квадратов целых чисел, делящихся на 3, то оно также представляется в виде суммы трех квадратов целых чисел, не делящихся на 3.*

Из условия следует, что число N можно представить в виде

$$9^n\left(a^2 + b^2 + c^2\right), \qquad (*)$$

где $n \in \boldsymbol{N}$, $a, b, c \in \boldsymbol{Z}$, a не делится на 3.

Лемма. *Всякое число вида $(*)$ можно представить в виде $9^{n-1}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$, где $x, y, z \in \boldsymbol{Z}$, x, y, z не делятся на 3.*

Без ограничения общности будем считать, что $a + b + c$ не делится на 3 (иначе число a можно заменить на $-a$). Имеем

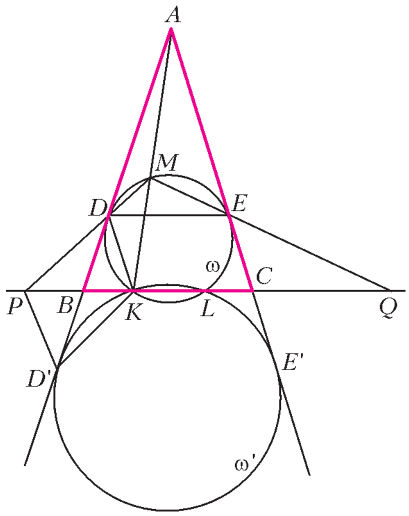
$$9\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = $$
$$= \left(4a^2 + 4b^2 + c^2\right) + \left(4b^2 + 4c^2 + a^2\right) + \left(4c^2 + 4a^2 + b^2\right) =$$
$$= (2a + 2b - c)^2 + (2b + 2c - a)^2 + (2c + 2a - b)^2.$$

Каждое из чисел $2a + 2b - c = 2(a + b + c) - 3c$, $2b + 2c - a = 2(a + b + c) - 3a$, $2c + 2a - b = 2(a + b + c) - 3b$ не делится на 3, так как $2(a + b + c)$ не делится на 3. Лемма доказана.

Для завершения решения осталось применить эту лемму n раз.

П.Козлов

М2019. *Окружность ω касается равных сторон AB и AC равнобедренного треугольника ABC и пересекает сторону BC в точках K и L. Отрезок AK пересе-*



кает ω *второй раз в точке M. Точки P и Q симметричны точке K относительно точек B и C соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника PMQ касается окружности* ω.

Обозначим через D и E точки касания ω со сторонами AB и AC. Из симметрии относительно биссектрисы угла BAC следует, что $DE \parallel BC$ (см. рисунок). Пусть при гомотетии с центром A и коэффициентом $\frac{AK}{AM}$ окружность ω переходит в окружность ω′. Окружность ω′ проходит через точку K, а следовательно, и через L (из симметрии относительно биссектрисы угла BAC), а также ω′ касается лучей AB и AC в некоторых точках D' и E'.

Из свойств гомотетии следует, что $MD \parallel KD'$. Далее, по теореме о произведении отрезков касательных $BD^2 = BK \cdot BL = BD'^2$, откуда $BD = BD'$. По построению $BK = BP$, поэтому $DKD'P$ – параллелограмм, а значит, $PD \parallel KD'$. Отсюда вытекает, что точки M, D, P лежат на одной прямой. Аналогично, точки M, E и Q лежат на одной прямой. Треугольники MDE и MPQ гомотетичны с центром M, следовательно, их описанные окружности также гомотетичны, т.е. касаются в точке M.

В.Филимонов

М2020*. *Известно, что многочлен* $(x+1)^n - 1$ *делится на некоторый многочлен* $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + c_{k-2}x^{k-2} + \ldots + c_1x + c_0$ *четной степени k, у которого все коэффициенты* $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ *– целые нечетные числа. Докажите, что n делится на k + 1.*

Из условия следует, что $(x+1)^n - 1 = P(x)Q(x)$, где $Q(x)$ – некоторый многочлен. Степень $Q(x)$ равна $n - k$, и все его коэффициенты целые (это вытекает, например, из алгоритма деления многочленов «столбиком»).

Будем называть два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ *похожими* и обозначать $f(x) \equiv g(x)$, если коэффициенты при одинаковых степенях у многочленов $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковую четность. Тогда $P(x) \equiv x^k + x^{k-1} + \ldots + 1$ и

$$(x+1)^n - 1 \equiv \left(x^k + x^{k-1} + \ldots + 1\right)Q(x). \qquad (1)$$

Заменив в (1) переменную x на $\frac{1}{x}$ и домножив обе части на x^n, получаем

$$(x+1)^n - x^n \equiv \left(x^k + x^{k-1} + \ldots + 1\right)x^{n-k}Q\left(\frac{1}{x}\right). \qquad (2)$$

При этом $x^{n-k}Q\left(\frac{1}{x}\right)$ – это некоторый многочлен от x с целыми коэффициентами степени, не превосходящей $n - k$. Вычитая (2) из (1), имеем

$$x^n - 1 \equiv \left(x^k + x^{k-1} + \ldots + 1\right)R(x)$$

для некоторого многочлена $R(x)$ с целыми коэффициентами. Пусть n не делится на $k + 1$ и $n = q(k+1) + r$, $0 < r < k + 1$. Тогда многочлен $x^n - x^r = x^r\left(x^{q(k+1)} - 1\right)$ делится на $x^{k+1} - 1 = \left(x^k + \ldots + 1\right)(x - 1)$, а значит, $x^r - 1 = \left(x^n - 1\right) - \left(x^n - x^r\right) \equiv \left(x^k + \ldots + 1\right)R_1(x)$ для некоторого многочлена $R_1(x)$ с целыми коэффициентами. Это невозможно, ибо степень многочлена $x^r - 1$ не больше степени многочлена $x^k + \ldots + 1$, и они непохожи.

И.Богданов

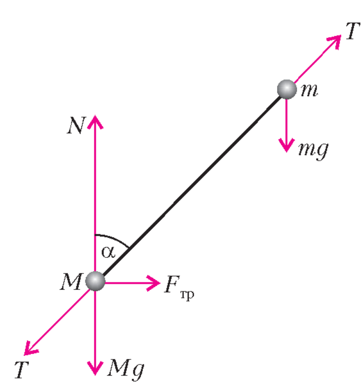
Ф2028. *Легкий жесткий стержень длиной L с двумя маленькими массивными шариками на концах – масса нижнего шарика M, верхнего m – поставили на шероховатую горизонтальную поверхность под углом* α *к вертикали и отпустили. При каких значениях коэффициента трения* μ *между стержнем и столом проскальзывание начнется сразу после того, как мы отпустим стержень? Найдите ускорения шариков сразу после отпускания для конкретного случая:* $M = m$, $\alpha = 30°$, $\mu = 0{,}2$.

Рассмотрим «граничное» значение коэффициента трения: уже при чуть меньшем значении проскальзывание начнется сразу после того, как мы отпустим стержень. В этом случае (см. рисунок) $F_{тр} = \mu N$, и ускорение нижнего шарика массой M равно нулю. Тогда для этого шарика можно записать уравнение движения по горизонтали:

$$T \sin\alpha = \mu N$$

и по вертикали:

$$Mg + T\cos\alpha - N = 0.$$



Для верхнего шарика можно сказать следующее: его начальная скорость равна нулю, поэтому нормальная составляющая его ускорения (направленная вдоль стержня) также равна нулю, т.е.

$$mg\cos\alpha - T = 0.$$

Из этих уравнений легко найти «граничное» значение коэффициента трения μ:

$$\mu = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha + M/m}.$$

Для частного случая $M = m$ и $\alpha = 30°$ это значение равно $\sqrt{3}/7 \approx 0{,}25 > 0{,}2$ – это значит, что проскальзывание начинается сразу. Тогда ускорение верхнего шарика равно

$$a_1 = g\sin\alpha = \frac{g}{2} \approx 5\text{м/с}^2$$

и направлено перпендикулярно стержню (это – касательная составляющая, нормальная же составляющая равна нулю). Для нижнего шарика ускорение направлено горизонтально и составляет

$$a_2 = \frac{mg\cos\alpha\sin\alpha - \mu\left(Mg + mg\cos^2\alpha\right)}{M} =$$
$$= g\left(\cos 30°\sin 30° - 0{,}2\left(1+\cos^2 30°\right)\right) \approx$$
$$\approx 0{,}084g \approx 0{,}84\ \text{м/с}^2.$$

А.Стержнев

Ф2029. *В глубоком космосе летает сосуд, содержащий кислород при температуре 300 К и давлении 1 атм. Непонятно откуда взявшаяся пуля пробивает в стенке сосуда небольшое отверстие, и газ начинает вытекать из сосуда. Рассмотрим момент, когда масса газа в сосуде уменьшилась на 1%. Оцените среднюю кинетическую энергию вылетевших наружу молекул.*

При такой концентрации частиц длина свободного пробега в сосуде очень мала, частицы двигаются к дырке практически не обгоняя друг друга. Это позволяет выделить в сосуде около дырки некоторую область, в которой находятся те частицы, которые вылетят наружу. Пусть объем этой части ΔV, тогда «окружающий» газ совершит работу $A = p\Delta V$, вытеснив эту часть наружу (мы учли, что наружу вышла небольшая часть газа – давление в сосуде при этом можно считать неизменным). Пренебрежем теплообменом выходящей порции газа с остальными частицами. В таком случае внутренняя энергия этой порции увеличится на $A = p\Delta V = \nu RT$ (где ν – количество газа в выходящей порции) и составит

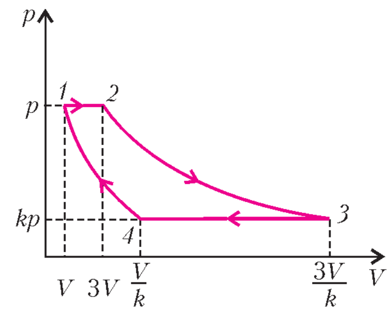
$$U = 1{,}5\nu RT + A = 1{,}5\nu RT + \nu RT = 2{,}5\nu RT.$$

Ясно, что средняя кинетическая энергия вылетевших наружу частиц составит $2{,}5\,kT \approx 10^{-20}$ Дж, т.е. она в $5/3$ раза больше средней кинетической энергии частиц в сосуде. Мы видим, что эта энергия соответствует большей температуре, хотя говорить о температуре вылетевших молекул было бы неправильно.

Р.Сложнов

Ф2030. *Цикл тепловой машины состоит из двух изотермических участков – сжатия при температуре T и расширения при температуре 3T, а также двух изобарических участков. Известно, что на участке изотермического расширения газ, а именно гелий, получает вдвое больше тепла, чем на участке изобарического расширения. Определите термодинамический КПД этого цикла.*

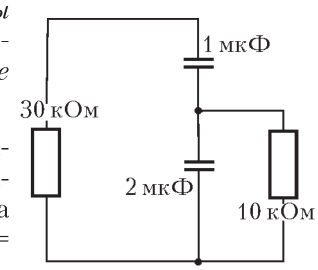
Обозначим (см. рисунок) давление в точке *1* буквой p, объем газа в этом состоянии – буквой V. Ясно, что в точке *2* объем увеличился в три раза. Пусть нижняя изобара соответствует давлению kp, тогда объем в точке *4* равен V/k, а в точке *3* он составит $3V/k$. На изобаре *1–2* газ совершает некоторую работу, такую же по модулю работу он совершает, сжимаясь по изобаре *3–4*, значит, сумма работ на обеих изобарах в сумме равна нулю. Если обозначить количество теплоты, полученное на изобаре *1–2*, буквой Q, то по условию задачи на изотерме *2–3* газ получит количество теплоты $2Q$. Именно такую работу он совершит, расширяясь от состояния *2* до состояния *3*. Теперь найдем работу, совершенную над газом при изотермическом сжатии *3–4*. Для этого заметим, что при равных давлениях на изотермах объемы всюду относятся как 3:1 – ясно, что работа $A_{41} = -A_{23}/3 = -2Q/3$. Окончательно получим, что термодинамический КПД цикла равен



$$\eta = \frac{A_{\text{общ}}}{Q_{\text{получ}}} = \frac{A_{12} + A_{41}}{Q + 2Q} = \frac{2Q - 2Q/3}{3Q} = \frac{4}{9} \approx 44\%.$$

Р.Простов

Ф2031. *Конденсаторы с емкостями 1 мкФ и 2 мкФ соединили последовательно и подключили к источнику напряжения 300 В. После этого источник отключили, а вместо него включили резистор сопротивлением 30 кОм. Одновременно резистор сопротивлением 10 кОм подключили параллельно выводам конденсатора большей емкости. Найдите заряды, протекшие через каждый из резисторов за большое время. Какое количество теплоты выделилось в меньшем из резисторов? Сопротивление проводов мало.*



Сразу после отключения батарейки напряжения конденсаторов составляют 100 В на конденсаторе емкостью $2C$ = = 2 мкФ и 200 В на конденсаторе емкостью C = 1 мкФ. Тогда при подключении резисторов (см. рисунок) по ним потекут токи I_1 = = 300 В/30 кОм = 10мА и I_2 = 100 В/10 кОм = 10мА. Видно, что конденсатор емкостью $2C$ разряжается током $I_1 + I_2 = 20$ мА, его заряд убывает вдвое быстрее, чем у конденсатора емкостью C, и напряжения на конденсаторах изменяются одинаково.

Заряды, протекшие через резисторы, можно найти, анализируя начальные и конечные заряды конденсаторов. В конце концов оба конденсатора окажутся полностью разряжеными. Тогда заряд, протекший через резистор сопротивлением 30 кОм, равен начальному заряду верхней обкладки верхнего конденсатора, т.е. $2CU/3 = 2\cdot10^{-4}$ Кл. Суммарный заряд изолированных вначале обкладок конденсаторов был равен нулю, и в конце он тоже нулевой. Значит, через резистор сопротивлением 1 кОм протек в сумме нулевой заряд, т.е. сначала ток через этот резистор тек в одну сторону, а потом – в другую.

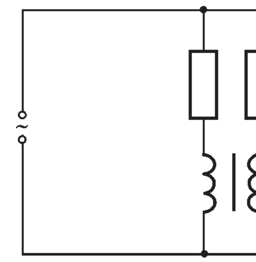
Полная энергия системы сразу после отключения источника составляет

$$(2C/3)U^2/2 = \left(2\cdot10^{-6}/3\right)300^2/2 \text{ Дж} = 30\cdot10^{-3} \text{ Дж}.$$

Именно это количество теплоты в сумме выделится на двух резисторах, а нам нужно посчитать долю этого тепла, выделившуюся в резисторе сопротивлением 10 кОм. Если бы токи так и оставались одинаковыми до полного разряда конденсаторов, то в этом резисторе выделилась бы втрое меньшая энергия – общее количество теплоты распределилось бы в отношении 3:1. Но так не получится, поскольку по мере разряда конденсаторов токи перестают быть одинаковыми (вот если бы отношения напряжений конденсаторов не изменялись, токи оставались бы равными друг другу). Равенство нарушится сразу, как только напряжения конденсаторов уменьшатся *на одну и ту же величину.* Сделаем еще одно приближение: если изменения напряжения одинаковы, то при уменьшении каждого напряжения на 100 В ток через резистор сопротивлением 10 кОм вообще прекратится,а вся оставшаяся энергия достанется резистору сопротивлением 30 кОм. Считая токи до этого момента одинаковыми, получим следующее: остаток энергии составит $\left(1\cdot10^{-6}/3\right)100^2/2$ Дж = $= 5\cdot10^{-3}$ Дж, рассеявшиеся к этому моменту $25\cdot10^{-3}$ Дж поделятся в отношении 3:1, при этом резистору сопротивлением 10 кОм достанется примерно $6\cdot10^{-3}$ Дж, остальные $24\cdot10^{-3}$ Дж рассеются в резисторе сопротивлением 30 кОм.

Можно было бы ограничиться этим приближенным расчетом, но числа в условии явно округленные. В таком случае нужно либо считать все точно, аналитически (конечно, если получится), либо ограничиться приблизительной оценкой. Но аналитически считать в этой задаче получается с трудом (вот курсе на втором, да на Физтехе...) – посчитаем приближенно. Нашу оценку можно уточнить, если взять не сразу изменение на 100 В, а вначале, скажем, на 20 В, посчитать новые напряжения на конденсаторах и новые значения токов, потом еще на 20 В для конденсатора емкостью C, посчитать изменение на конденсаторе емкостью $2C$, найти новые токи и так далее. У меня такой расчет с помощью обычного инженерного калькулятора занял примерно 20 минут, получилось для резистора сопротивлением 10 кОм примерно $4\cdot10^{-3}$ Дж, а для второго резистора – $26\cdot10^{-3}$ Дж соответственно. Точное решение дает практически тот же результат.

А.Зильберман



Ф2032. *Трансформатор (см. рисунок) имеет две одинаковые обмотки, каждая обмотка содержит большое количество витков, тороидальный сердечник трансформатора сделан из материала с большой магнитной проницаемостью. Сопротивления резисторов 1 кОм и 3 кОм, индуктивность одной обмотки 10 Гн. Цепь подключена к источнику переменного напряжения 220 В, 50 Гц. Найдите токи через резисторы.*

Обмотки могут быть включены любым из двух способов – магнитные поля, создаваемые каждой обмоткой, либо суммируются, либо вычитаются. В таких схемах обычно показывают «начала» и «концы» обмоток, чтобы можно было с этим суммированием-вычитанием разобраться, на практике же часто действуют наугад, при необходимости переключая потом одну из обмоток. Пусть для определенности «начала» обмоток будут наверху, т.е. рассмотрим суммирование магнитных полей – это намного проще. В таком случае потенциалы точек соединения катушек с резисторами одинаковы (в другом случае они были бы противоположны), эти точки можно просто соединить между собой – для расчета токов резисторов. Магнитный поток создается суммарным полем:

$$\Phi = L\left(I_1 + I_2\right),$$

при этом можно считать, что

$$R_{\text{общ}}\left(I_1 + I_2\right) = U - \mathcal{E}_{\text{инд}} = U - \Phi'.$$

Получается обычная последовательная цепь из катушки индуктивностью L = 10 Гн и резистора сопротивлением R = 750 Ом. В этой цепи полный ток равен

$$I_1 + I_2 = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} =$$

$$= \frac{220 \text{ В}}{\sqrt{750^2 + 314^2\cdot10^2} \text{ Ом}} \approx 68 \text{ мА}.$$

Отношение токов резисторов равно 1:3, т.е. через резистор сопротивлением 3 кОм течет ток 17 мА, а сопротивлением 1 кОм – ток 51 мА.

Второй случай намного сложнее, без векторных диаграмм (или эквивалентного расчета при помощи комплексных чисел) там не обойтись. Остановимся на первом случае.

З.Рафаилов

Задачи

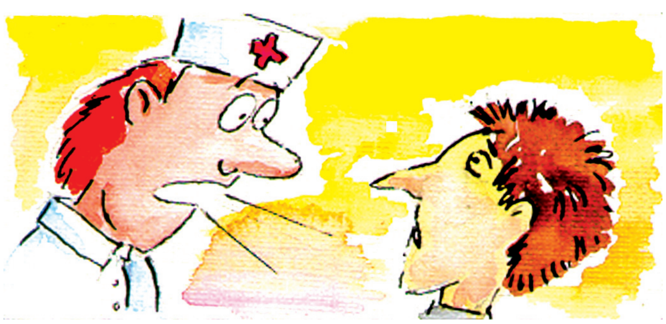
1. Три человека со стиральной машиной хотят переправиться через реку. Катер вмещает либо двух человек и стиральную машину, либо трех человек. Беда в том, что стиральная машина тяжелая, поэтому погрузить ее в катер или вытащить из него можно только втроем. Смогут ли они переправиться?

А.Шаповалов

2. «... Старший военный врач Бауце из *aabbb* граждан выловил *abccc* симулянтов и поймал бы на удочку последнего, если бы этого счастливчика не хватил удар в тот самый момент, когда доктор на него заорал: "Кругом!"...»

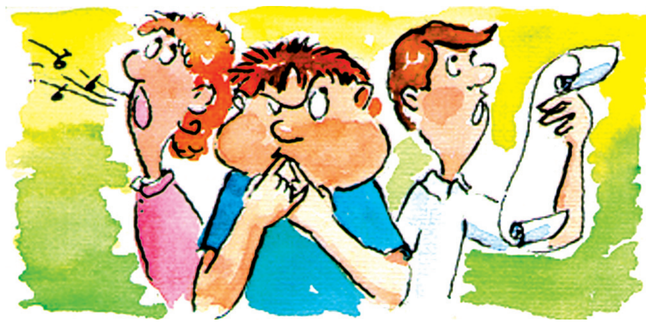
В этом отрывке из «Похождений бравого солдата Швейка» мы заменили все цифры латинскими буквами (одинаковые – одинаковыми, разные – разными). Сумеете определить, сколько симулянтов разоблачил бдительный доктор Бауце?

И.Акулич



3. В 8А классе учатся 27 школьников. Им предложили посещать кружки по пению, свистению и чтению стихов. Каждый хочет посещать один или несколько из этих кружков. Оказалось, что в каждый кружок желает ходить более трети класса. Можно ли составить такие списки кружков, что каждый будет ходить ровно в один кружок, в который хочет, и во всех кружках будет поровну школьников?

Д.Калинин



4. Щит короля Артура имеет форму восьмиугольника, который образовался из квадрата после отрезания одинаковых равнобедренных треугольников.

Красный цвет, символ мужества, занимает на щите ту же площадь, что и синий – символ справедливости. Как это показать, не прибегая к вычислениям?

В. Произволов

5. Клетчатая таблица 3×3 называется магическим квадратом, если все числа в ней различны и суммы чисел во всех строках, во всех столбцах, а также в диагоналях одинаковы (например, так, как показано на рисунке).

Существует ли магический квадрат, заполненный числами, обратными натуральным?

А.Шаповалов

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Иллюстрация Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

Заключительный этап конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8»

База отдыха «Берендеевы поляны» под Судиславлем Костромской области уже стала традиционным местом проведения финальных соревнований конкурса имени А.П.Савина. Летом 2006 года здесь состоялся XII финальный летний турнир математических боев, который в очередной раз побил рекорд по количеству команд-участниц: тридцать шесть. На турнире присутствовали школьники из пятнадцати городов. Приехали отдельные команды из Иванова, Кирова, Костромы, Магнитогорска, Перми, Троицка, Харькова. Ну и, конечно же, больше всего команд представила Москва. Примечательная особенность последних турниров – соревнования стали привлекательными для девятиклассников.

В организации турнира, кроме журнала «Квант», приняли участие Московский городской дворец детского (юношеского) творчества (председатель оргкомитета турнира Г.Кондаков), образовательная программа «Большая перемена» (руководитель программы депутат областной думы и председатель Федерации профсоюзов Костромской области М.А.Батин), Департамент общего и профессионального образования администрации Костромской области, Фонд математического образования и просвещения. Спонсорскую помощь командам оказали также некоторые организации на местах. Так, школьники Черноголовки выражают свою благодарность Объединенной профсоюзной организации Научного центра «Черноголовка» РАН (зам. председателя Л.А.Ковалева).

Работу методической комиссии возглавил А.Шаповалов. В составе комиссии работали опытные члены жюри, не раз принимавшие участие в подобного рода мероприятиях: А.Акопян, М.Берштейн, А.Блинков (зам. председателя оргкомитета), Ю.Блинков, А.Горская, В.Гуровиц, А.Жуков, Д.Калинин, Т.Караваева, И.Раскина, В.Сендеров, А. Скопенков, А.Спивак, С.Токарев (организатор первых летних турниров), В.Трушков, Б.Френкин, Е.Чернышева, В.Шарич. Руководители команд также принимали активное участие в работе жюри: помогали судить отдельные бои, организовывать и проводить дополнительные интеллектуальные игры («Математическая регата», «Завалинка»). С лекциями перед школьниками выступили А.Скопенков («Найди количество раскрасок»), Н.Нетрусова («Узлы и косы»), А.Шаповалов («Принцип узких мест»).

Турнир проводился по традиционной схеме: командная олимпиада в первый день, по результатам которой команды были ранжированы по лигам, затем ежедневные математические бои, между которыми в один из дней прошла личная устная олимпиада.

Призеры личной олимпиады:

6 класс

Кадец Борис – Харьков, УВК 45 «Академическая гимназия»,
Матвеевский Дмитрий – Харьков, ФМЛ 27 (5 класс),
Лисичкин Сергей – Харьков, гимназия 47,
Коротов Денис – Москва, школа 936;

7 класс

Ивлев Федор – Москва, гимназия 1543,
Деревицкий Иван – Магнитогорск, школа 5,
Малых Софья – Киров, ФМЛ,
Николаев Семен – Москва, школа 1189,
Садовников Сергей – Волгореченск, школа 2,
Южанин Денис – Киров, ФМЛ,
Артемьева Галина – Москва, гимназия 1543,
Баева Светлана – Киров, ФМЛ,
Голицын Владимир – Харьков, ФМЛ 27,
Дудкин Александр – Харьков, ФМЛ 27,
Криволапов Владислав – Иваново, лицей 67,
Макаров Николай – Москва, школа 179,
Ноздрин Михаил – Магнитогорск, школа 5,
Панфилов Данила – Москва, ФМШ 2007,
Пожарский Богдан – Харьков, ФМЛ 27,
Редёга Владимир – Москва, гимназия 1543,
Тарасов Артем – Киров, ФМЛ,
Троицкий Алексей – Москва, школа 1189;

8 класс

Соболев Евгений – Харьков, гимназия 47,
Маянцев Кирилл – Волгореченск, школа 3,
Бочкарев Михаил – Пермь, школа 9 им. А.С. Пушкина,
Ефремов Дмитрий – Магнитогорск, школа 5,
Таранникова Екатерина – Москва, ФМШ 2007,
Турбина Наталья – Ангарск, школа 10,
Паламарчук Игорь – Москва, лицей «Вторая школа»,
Акопян Эмма – Москва, гимназия 1543,
Соболев Дмитрий – Харьков, гимназия 47,
Смирнова Алена – Москва, лицей «Вторая школа»,
Гавричев Егор – Москва, лицей «Вторая школа»;

9 класс

Андреев Михаил – Москва, школа 57 ,
Кисловская Анна – Кострома, лицей 32,

Ромаскевич Елена — Москва, гимназия 1543,
Бакаев Егор — Кострома, лицей 32,
Погребнов Алексей — Москва, гимназия 1543,
Марченко Евгений — Москва, гимназия 1543.

Команды-призеры

7 класс

гимназия 1543, 7 Б кл., Москва (руководитель М.М.Букина),
гимназия 1543, 7 А кл., Москва (руководитель Б.П.Гейдман),
«Квантик», Москва (руководитель И.А.Николаева),
ФМШ 2007, 7 кл., Москва (руководитель В.В.Ховрина),
школа 936, Москва (руководитель Т.П.Зорина);

7–8 классы

школа 17, Москва (руководитель Д.А.Коробицын),
ФМЛ, 7 кл., Киров (руководитель Л.А.Смирнова),
«Большая перемена», 7 кл., Кострома (руководитель Д.А.Калинин),
школа 5, Магнитогорск (руководители Н.С.Никифорова, А.В.Устинов),
«Эврика», 7 кл., Харьков (руководители Е.Л.Аринкина, А.Л.Берштейн);

8 класс, первая лига

школа 5, Магнитогорск (руководители А.В.Христева, А.С.Великих),
гимназия 1543, 8 А, Москва (руководитель Т.С.Гейдер);

8 класс, высшая лига

«Эврика», 8 кл., Харьков (руководитель Е.Л.Аринкина),
Московский городской дворец детского (юношеского) творчества (руководитель С.Е.Дубов),
школа 82, 8 кл., Черноголовка (руководитель Л.Н.Головко),
школа 9 им. А.С.Пушкина, Пермь (руководитель О.Н.Вязьмина),
гимназия 1543, 8 Б кл., Москва (руководитель А.В.Спивак);

9 класс

гимназия 1543, 9 кл., 9-3, Москва (руководитель А.В.Спивак),
гимназия 1543, 9 кл., 9-1, Москва (руководитель И.В.Раскина),
гимназия 1543, 9 кл., 9-2, Москва (руководитель А.В.Спивак),
«Большая перемена», 9 кл., Кострома (руководитель Д.А.Калинин).

Все победители награждены дипломами и призами, предоставленными журналом «Квант», а также Фондом математического образования и просвещения.

Подробные итоги турнира представлены на сайте www.lmsh.ru

Некоторые задачи турнира

(цифры в скобках указывают классы, для которых предлагалась соответствующая задача)

1 (6–7). Кеша вырезал из бумаги треугольник ABC с наибольшей стороной AB и перегнул его по прямой так, что вершина C попала на сторону AB и образовался четырехугольник. Укажите множество точек на стороне AB, куда могла попасть вершина C.

А.Шаповалов, В.Гуровиц

2 (8). Бумажный треугольник со сторонами a, b, c перегнули по прямой так, что вершина, противолежащая стороне c, попала на эту сторону. Известно, что в получившемся четырехугольнике равны два угла, примыкающих к линии сгиба. Найдите длины отрезков, на которые делит сторону c попавшая туда вершина.

А.Шаповалов

3 (7–8). На клетчатой бумаге закрасили многоугольник, периметр которого проходит по линиям сетки. Всегда ли можно вырезать по линиям сетки содержащий его прямоугольник того же периметра?

В.Сендеров

4 (7–9). Художник-абстракционист хочет раскрасить клетки доски 8×8 в $m > 1$ цветов так, чтобы выполнялось условие: если одинаково окрашенные клетки A и B граничат с клеткой C, то с C граничат еще две клетки, окрашенные одинаково, причем в цвет, отличный от цветов A и B. (Граничащими называем клетки, имеющие общую сторону.) При каких m он сможет это сделать?

Е.Барабанов, И.Акулич

5 (7–8). На числовой прямой отмечены все целые точки. Точки x и y соединяются дугой, если $|x - y|$ простое число. В какое наименьшее количество цветов можно покрасить все целые точки, чтобы любые две соединенные точки были разного цвета?

В.Гуровиц

6 (7–8). Найдите все тройки простых чисел, удовлетворяющие равенству

$$x^3 + y^3 = 2z^3.$$

В.Сендеров

7 (7–9). В однокруговом футбольном турнире участвовало 20 команд. Оказалось, что если какие-то две команды сыграли между собой вничью, то хотя бы одна из них завершила вничью не больше трех игр. Каково наибольшее возможное число ничьих в таком турнире?

И.Акулич

8 (8). Некоторые из сторон и диагоналей выпуклого n угольника ($n > 3$), никакие три диагонали которого не пересекаются в одной точке, покрасили в красный или синий цвет. Известно, что синие отрезки не пересекаются и между любыми вершинами есть единственный синий путь. То же верно для красных отрезков.

Найдите для каждого n наименьшее количество пересечений между красными и синими отрезками.

Б.Френкин

9 (8). Докажите, что существует бесконечно много приведенных квадратных уравнений с целыми коэффициентами, у которых один из корней равен дискриминанту.

А.Хачатурян

10 (8). Пусть x и y – неотрицательные числа, сумма которых не превосходит 1. Докажите, что $x^2+8x^2y^2+y^2\le 1$.

В.Сендеров

11 (8). В треугольнике ABC на сторонах BC, CA и AB соответственно отмечены точки A_1, B_1 и C_1 так, что $\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{C_1A}{C_1B}=\frac{B_1C}{B_1A}=\alpha$, где $\alpha\in(0,1)$. На сторонах B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ отмечены точки A_2, B_2, C_2 так, что $\frac{A_2B_1}{A_2C_1}=\frac{C_2A_1}{C_2B_1}=\frac{B_2C_1}{B_2A_1}=\frac{1}{\alpha}$. Докажите, что треугольник $A_2B_2C_2$ подобен треугольнику ABC.

И.Рудаков

12 (8–9). Известно, что p и q – простые числа, причем p^2+q и p^2-q тоже простые. Найдите p и q.

Б.Френкин

13 (8–9). Найдите все положительные числа x, для которых число $\{x\}(x+[x])$ – целое. (Здесь $[x]$ – *целая часть числа* x, т.е. наибольшее целое число, не превышающее x, а $\{x\}=x-[x]$ – *дробная часть* числа x.)

Л.Радзивиловский

14 (8-9). Клетки доски $m\times n$ раскрашены в шахматном порядке в черный и белый цвета. Разрешается выбрать любые две соседние по стороне клетки и перекрасить их: белые клетки – в черный цвет, черные – в красный, а красные – в белый. При каких m и n можно добиться того, чтобы все белые клетки доски были покрашены в черный цвет, а черные – в белый?

М.Ахмеджанова, К.Кохась

15 (8–9). На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1, B_1 соответственно так, что $BC_1=C_1A_1=A_1B_1=B_1C$. Докажите, что точки пересечения высот треугольника $C_1A_1B_1$ лежат на биссектрисе угла A.

А.Мякишев

16 (8–9). Дан произвольный треугольник. На каждой стороне треугольника отмечено 14 точек, делящих ее на 15 равных отрезков. Каждая вершина треугольника соединена отрезками со всеми отмеченными точками противолежащей стороны. На сколько частей отрезки разделили треугольник?

В.Брагин

17 (8–9). Найдите наибольшее натуральное число n, которое делится на все натуральные числа, не превосходящие $\frac{n}{10}$.

И.Акулич

18 (9). Докажите неравенство

$$\left|\left|x+y\right|^3+\left|x-y\right|^3\ge 2\left(\left|x\right|^3+\left|y\right|^3\right).$$

В.Сендеров

19 (9). Назовем треугольники сходными, если у них равны как минимум две из трех сторон. Докажите, что найдется квадрат, который можно разбить на треугольники, сходные данному остроугольному треугольнику.

А.Шаповалов

20 (9). Каких чисел больше в первой тысяче: представимых или не представимых в виде $x^3-y!$, где x, y – натуральные?

Н.Агаханов, В.Сендеров

21 (9). Можно ли в клетках таблицы 100×100 расставить натуральные числа от 1 до 10000 так, чтобы суммы чисел во всех вертикалях, всех горизонталях и обеих диагоналях были нечетными?

В.Берник, И.Акулич

22 (9). Сумма положительных чисел x, y, z равна 1. Докажите неравенство $\frac{1}{1+4x^2}+\frac{1}{1+4y^2}+\frac{1}{1+4z^2}\ge 2$.

В.Шарич, В.Сендеров

23 (9). Пусть P – произведение некоторых восьми последовательных натуральных чисел, а Q – наименьший точный квадрат, для которого $Q>P$. Докажите, что разность $Q-P$ является точным квадратом.

С.Токарев

24 (9). В треугольнике ABC h_1, h_2, h_3 – высоты, d_1, d_2, d_3 – расстояния от некоторой внутренней точки до прямых AB, BC, CA. Докажите неравенство

$$\left(h_1^4+h_2^4+h_3^4\right)^3\ge 3^{15}\left(d_1d_2d_3\right)^4.$$

В.Сендеров

Публикацию подготовили А.Жуков, Т.Караваева
Фотографии предоставил Д.Калинин