

журнал[©] Квант МАРТ 2007 №2 АПРЕЛЬ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЕ ЗАМЕСТИТЕЛИ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.С.Кротов, С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,
А.Н.Виленкин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин,
Н.П.Долбилин

(заместитель главного редактора),

В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, А.В.Жуков,
А.Р.Зильберман, П.А.Кожевников,
В.В.Козлов, С.П.Коновалов, А.А.Леонович,
Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, Н.Х.Розов,
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров,

В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,
А.И.Черноуцан

(заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,
Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро



Квантум

© 2007, Президиум РАН,
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 Эюд о формуле Эйлера (окончание). *В.Рыжик, Б.Сотниченко*
6 Логарифмические шкалы. *В.Сурдин*

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 13 Руджер Божкович. *А.Васильев*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 14 Задачи М2036–М2040, Ф2043–Ф2047
15 Решения задач М2011–М2020, Ф2028–Ф2032

К М Ш

- 21 Задачи
22 Заключительный этап конкурса имени А.П.Савина
«Математика 6–8»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 25 Математика турниров (окончание). *А.Заславский, Б.Френкин*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 27 Энергетический метод исследования колебаний.
А.Черноуцан

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 «Знаменитейший ученый муж»

ВАРИАНТЫ

- 34 Материалы вступительных экзаменов 2006 года

ОЛИМПИАДЫ

- 48 XLVII Международная математическая олимпиада
51 XXXVII Международная физическая олимпиада
54 Московская городская олимпиада студентов по физике
55 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

- I Иллюстрация к статье *В.Сурдина*
II Коллекция головоломок
III Шахматная страничка
IV Физики и математики на монетах мира

Этюд о формуле Эйлера

В.РЫЖИК, Б.СОТНИЧЕНКО

Инварианты скольжения многоугольника

Простейший инвариант скольжения многоугольника Эйлера – векторная сумма его сторон: $\sum_{k=1}^n \vec{a}_k = \vec{0}$.

Используя это равенство, найдем еще один инвариант скольжения многоугольника Эйлера. Проведем из

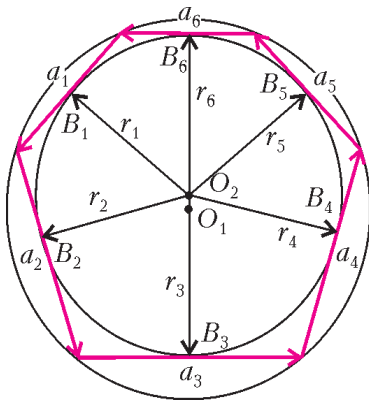


Рис. 13

центра O_2 окружности, вписанной в многоугольник Эйлера, радиусы-векторы \vec{r}_k во все точки касания (рис. 13; на нем $n = 6$). Теперь рассмотрим сумму $\vec{S} = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k$ и покажем, что эта сумма при скольжении многоугольника не меняется. Для этого возьмем производную от этой суммы по времени:

$\dot{\vec{S}} = \sum_{k=1}^n \dot{\vec{r}}_k = \sum_{k=1}^n \vec{V}_{B_k}$. Здесь \vec{V}_{B_k} – скорость точки B_k конца вектора \vec{r}_k . При скольжении эти векторы остаются постоянными по модулю, $|\vec{r}_k| = r$, и вращаются в плоскости рисунка вокруг точки O_2 . Поэтому

$$V_{B_k} = \omega_{r_k} r_k = \omega_{r_k} r, \quad (24)$$

где $\omega_{r_k} = \dot{\varphi}_{r_k}$ – угловая скорость радиуса r_k . Направление скорости \vec{V}_{B_k} совпадает с направлением вектора

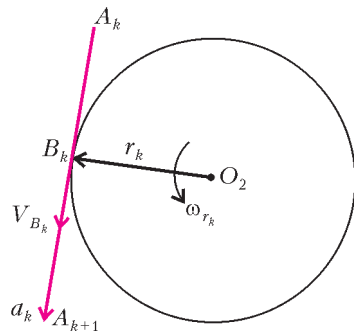


Рис. 14

\vec{a}_k , так как оба эти вектора перпендикулярны вектору \vec{r}_k (рис. 14). Таким образом,

$$\vec{V}_{B_k} = V_{B_k} \vec{e}_{a_k} = \omega_{r_k} r \vec{e}_{a_k},$$

где \vec{e}_{a_k} – единичный вектор вектора \vec{a}_k . Поскольку $\vec{a}_k = a_k \vec{e}_{a_k}$, то $\vec{e}_{a_k} = \frac{\vec{a}_k}{a_k}$. Кроме этого, угловые скорости ω_{r_k} и ω_{a_k} равны $\dot{\varphi}_{a_k}$, так как при скольжении угол между радиусом \vec{r}_k и стороной \vec{a}_k не меняется и всегда прямой. Следовательно,

но, $\vec{V}_{B_k} = \dot{\varphi}_{a_k} r \frac{\vec{a}_k}{a_k}$. Тогда

$$\dot{\vec{S}} = \sum_{k=1}^n \vec{V}_{B_k} = r \sum_{k=1}^n \frac{\dot{\varphi}_{a_k}}{a_k} \vec{a}_k = r \frac{c}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\dot{\varphi}_{a_k}}{a_k} \vec{a}_k = \vec{0}.$$

(Из равенства (8) в первой части статьи следует, что $\frac{\varphi_{a_k}}{a_k} = \frac{c}{2}$, т.е. это отношение не зависит от индекса k и потому может быть вынесено за знак суммы.) Отсюда следует, что сумма \vec{S} не меняется со временем при скольжении многоугольника Эйлера, т.е. является инвариантом скольжения: $\vec{S} = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k = \vec{I}$. Мы будем называть ее векторным инвариантом скольжения. Для каждого многоугольника Эйлера он свой и зависит от величин, которые не меняются при скольжении, т.е. от обоих радиусов и расстояния между центрами данных окружностей. Но тогда инвариантом скольжения является и проекция вектора \vec{I} на любую неподвижную ось. В качестве таковых естественно выбрать линию центров $O_1 O_2$ и ось, перпендикулярную к ней.

При получении формул (11) мы использовали то обстоятельство, что вектор $\vec{r}_1 = \vec{O}_2 \vec{B}_1$ (см. рис. 4 в первой части статьи) параллелен вектору $\vec{O}_1 \vec{C}_1$, так как они оба перпендикулярны вектору $\vec{a}_1 = \vec{A}_1 \vec{A}_2$. Следовательно, вектор \vec{r}_1 образует с линией центров тот же угол, что и вектор $\vec{O}_1 \vec{C}_1$, равный $\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}$. Точно так же вектор \vec{r}_k образует с линией центров угол $\frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2}$.

Поэтому инвариантами скольжения являются величины

$$\sum_{k=1}^n |\vec{r}_k| \cos \frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2} = r \sum_{k=1}^n \cos \frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2}$$

и

$$\sum_{k=1}^n |\vec{r}_k| \sin \frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2} = r \sum_{k=1}^n \sin \frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2}.$$

Иначе говоря, поскольку радиус r при скольжении постоянен, инвариантами являются суммы косинусов и синусов углов $\frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2}$. Назовем их, соответственно, первым и вторым инвариантами скольжения:

$$\sum_{k=1}^n \cos \frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2} = I_1, \quad \sum_{k=1}^n \sin \frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2} = I_2. \quad (25)$$

Второй инвариант равен нулю, так как в те моменты, когда многоугольник Эйлера симметричен относительно

но линии центров, для угла $\frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2}$ найдется в пару угол, равный $-\frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2}$. Если же такой пары не

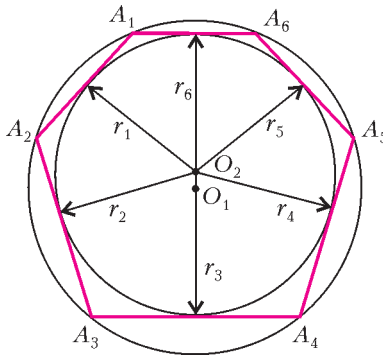


Рис. 15

найдется, то этот угол равен 0° или 180° . (Эта ситуация показана на рисунке 15. На нем векторы \vec{r}_1 и \vec{r}_5 , а также \vec{r}_2 и \vec{r}_4 , образуют с линией центров равные по величине и противоположные по знаку углы. Вектор \vec{r}_6 образует с этой линией нулевой

угол, а вектор \vec{r}_3 – угол 180° .) Поэтому сумма синусов равна нулю: $I_2 = 0$.

Отсюда следует, что векторный инвариант скольжения \vec{I} направлен по линии центров и его величина равна rI_1 . Пусть $\vec{d} = \vec{O_1O_2}$ и \vec{e}_d – орт вектора \vec{d} , т.е. $\vec{e}_d = \frac{\vec{d}}{d}$. Тогда

$$\vec{I} = rI_1\vec{e}_d = \frac{r}{d}I_1\vec{d} = \frac{\rho}{\delta}I_1\vec{d}. \quad (26)$$

Еще один инвариант скольжения мы получим, просуммировав равенства (11):

$$\sum_{k=1}^n \cos \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2} = n\rho + \delta \sum_{k=1}^n \cos \frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2} = n\rho + \delta I_1.$$

Разность углов $\varphi_{k+1} - \varphi_k$ равна углу α_k : $\alpha_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k$. А так как справа в последнем равенстве стоит величина, не меняющаяся при скольжении многоугольника Эйлера, то мы получаем третий инвариант скольжения:

$$I_3 = \sum_{k=1}^n \cos \frac{\alpha_k}{2} = n\rho + \delta I_1. \quad (27)$$

Поскольку

$$\sum_{k=1}^n \cos \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2} = \sum_{k=1}^n \cos \frac{\varphi_{k+1}}{2} \cos \frac{\varphi_k}{2} + \sum_{k=1}^n \sin \frac{\varphi_{k+1}}{2} \sin \frac{\varphi_k}{2},$$

а

$$\sum_{k=1}^n \cos \frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2} = \sum_{k=1}^n \cos \frac{\varphi_{k+1}}{2} \cos \frac{\varphi_k}{2} - \sum_{k=1}^n \sin \frac{\varphi_{k+1}}{2} \sin \frac{\varphi_k}{2},$$

то инвариантами являются также и суммы произведений косинусов и синусов:

$$I_4 = \sum_{k=1}^n \cos \frac{\varphi_{k+1}}{2} \cos \frac{\varphi_k}{2} = 0,5(I_3 + I_1)$$

и

$$I_5 = \sum_{k=1}^n \sin \frac{\varphi_{k+1}}{2} \sin \frac{\varphi_k}{2} = 0,5(I_3 - I_1).$$

Из всех полученных инвариантов, очевидно, «главным» является третий инвариант I_3 , так как в него входят углы $\alpha_k (= \varphi_{k+1} - \varphi_k)$ и не входят «внешние» углы φ_{k+1} и φ_k .

Задачи (продолжение)

Перейдем теперь к решению задач, в которых будем использовать полученные результаты, связанные с инвариантами скольжения многоугольника Эйлера.

Задача 9. В многоугольнике Эйлера даны углы, которые образуют радиусы описанной окружности, проведенные в его вершины, с линией центров. Найдите отношение δ .

Решение. Умножим каждое из равенств (11) на $\sin \frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2}$ и просуммируем полученные равенства.

Получим

$$\sum_{k=1}^n \sin \frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2} \cos \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2} = \rho \sum_{k=1}^n \sin \frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2} + \delta \sum_{k=1}^n \sin \frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2} \cos \frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2}.$$

Первое слагаемое в правой части равенства – инвариант скольжения $I_2 = 0$. Поэтому равенство можно переписать в таком виде:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\sin \varphi_{k+1} + \sin \varphi_k) = \frac{1}{2} \delta \sum_{k=1}^n \sin (\varphi_{k+1} + \varphi_k).$$

Учитывая, что $\varphi_{n+1} = 360^\circ + \varphi_1$, найдем: $\sin \varphi_{n+1} = \sin \varphi_1$. Поэтому в сумме, стоящей слева, каждое слагаемое повторяется два раза, но тогда выражение в левой части равенства имеет вид $\sum_{k=1}^n \sin \varphi_k$. Теперь приходим к ответу:

$$\delta = 2 \frac{\sum_{k=1}^n \sin \varphi_k}{\sum_{k=1}^n \sin (\varphi_{k+1} + \varphi_k)}.$$

Задача 10. Вычислите инварианты скольжения \vec{I} , I_1 , I_3 треугольника Эйлера, если известно δ (и тем самым ρ).

Решение. Сначала вычислим $I_1 = \sum_{k=1}^3 \cos \frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2}$. Воспользуемся рисунком 5. На нем $\varphi_1 = 0^\circ$ и

$$\cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \cos \frac{\varphi_2}{2} = \cos \frac{\alpha_1}{2} = \frac{O_2B_1}{O_2A_1} = \frac{r}{R-d} = \frac{\rho}{1-\delta}.$$

Угол $\frac{\varphi_3 + \varphi_2}{2}$ равен 180° , поэтому $\cos \frac{\varphi_3 + \varphi_2}{2} = -1$.

Третий косинус в сумме равен

$$\begin{aligned} \cos \frac{\varphi_4 + \varphi_3}{2} &= \cos \angle A_1O_2B_3 = \\ &= \cos \angle B_1O_2A_1 = \cos \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\rho}{1-\delta}. \end{aligned}$$

Тогда (учитывая формулу (12))

$$I_1 = 2 \frac{\rho}{1-\delta} - 1 = 1 + \delta - 1 = \delta.$$

Итак,

$$I_1 = \delta. \quad (28)$$

Векторный инвариант \vec{I} найдем, используя формулу (26):

$$\vec{I} = I_1 \frac{\rho}{\delta} \vec{d} = \rho \vec{d}.$$

Инвариант I_3 можно найти либо непосредственно из рисунка 5, либо с помощью формулы (27). Используем второй путь:

$$I_3 = 3\rho + \delta I_1 = 3\rho + \delta^2 = 3\rho + 1 - 2\rho = 1 + \rho. \quad (29)$$

(Здесь мы воспользовались равенством $\delta^2 = 1 - 2\rho$.)

Так как $I_3 = \sum_{k=1}^3 \cos \frac{\alpha_k}{2} = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$, то формула (29) позволяет нам получить еще одно выражение для отношения $\rho = \frac{r}{R}$ через углы треугольника:

$$\rho = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma - 1. \quad (30)$$

Замечание. Формулу (30) можно получить также из равенства (23) или из известного равенства $\rho = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$. Сделайте это самостоятельно.

Задача 11. Пусть известны угол треугольника Эйлера и ρ . Чему равны остальные углы треугольника?

Решение. Обозначим известный угол треугольника через α . Запишем уравнение (30) в виде $\cos \beta + \cos \gamma = 1 - \cos \alpha + \rho$, или

$$2 \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \rho.$$

Но $\cos \frac{\beta + \gamma}{2} = \sin \frac{\alpha}{2}$, поэтому

$$\cos \frac{\beta - \gamma}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{\rho}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Для определения углов β и γ имеем два уравнения:

$$\frac{\beta - \gamma}{2} = \arccos \left(\frac{\rho}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) \text{ и } \frac{\beta + \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда несложно найти β и γ .

Задача 12. Вычислите инварианты скольжения \vec{I} , I_1 , I_3 четырехугольника Эйлера, если известно δ (и тем самым ρ).

Решение. Эти инварианты проще всего найти, когда четырехугольник Эйлера является дельтоидом (см. рис.6). В этом случае $\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi_3 = 180^\circ$. В силу симметрии,

$$\cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \cos \frac{\varphi_5 + \varphi_4}{2} = \cos \frac{\alpha_1}{2} = \frac{r}{R-d} = \frac{\rho}{1-\delta}.$$

Точно так же,

$$\cos \frac{\varphi_3 + \varphi_2}{2} = \cos \frac{\varphi_4 + \varphi_3}{2} = -\frac{\rho}{1+\delta}.$$

Отсюда

$$I_1 = \sum_{k=1}^4 \cos \frac{\varphi_{k+1} + \varphi_k}{2} = 2 \left(\frac{\rho}{1-\delta} - \frac{\rho}{1+\delta} \right) = \frac{4\rho\delta}{1-\delta^2} = \frac{2\sqrt{2}\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}. \quad (31)$$

По формуле (26) векторный инвариант выглядит так:

$$\vec{I} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+\delta^2}} \vec{d}.$$

Третий инвариант получим из рисунка 6. Значения косинусов таковы:

$$\cos \frac{\alpha_1}{2} = \cos \frac{\alpha_4}{2} = \frac{\rho}{1-\delta}, \quad \cos \frac{\alpha_2}{2} = \cos \frac{\alpha_3}{2} = \frac{\rho}{1+\delta}.$$

Поэтому

$$I_3 = \sum_{k=1}^4 \cos \frac{\alpha_k}{2} = 2 \left(\frac{\rho}{1-\delta} + \frac{\rho}{1+\delta} \right) = \frac{4\rho}{1-\delta^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+\delta^2}}. \quad (32)$$

Тот же результат при вычислении I_3 можно получить с помощью формулы (27), в чем вы можете убедиться самостоятельно.

Инварианту $I_3 = \sum_{k=1}^4 \cos \frac{\alpha_k}{2}$ можно придать геометрический смысл. Пусть центр O_1 описанной окружности лежит внутри многоугольника и h_k — перпендикуляр, опущенный из центра O_1 на сторону a_k многоугольника. Тогда $h_k = R \cos \frac{\alpha_k}{2}$ и, умножив предыдущее равенство на R , найдем $\sum_{k=1}^n h_k = RI_3$. Отсюда получаем, что сумма длин этих перпендикуляров также является инвариантом скольжения. Эта формула в случае треугольника является формулой Карно: $h_1 + h_2 + h_3 = R(1 + \rho) = R \left(1 + \frac{r}{R} \right) = R + r$. Поэтому формулу $\sum_{k=1}^n h_k = RI_3$ можно назвать формулой Карно для n -угольника Эйлера. Для четырехугольника Эйлера формула Карно выглядит так:

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{4R^2 r}{R^2 - d^2} = \frac{2\sqrt{2}R^2}{\sqrt{R^2 + d^2}}$$

(здесь использована формула (32)).

Задача 13. Пусть известны δ (и тем самым ρ) четырехугольника Эйлера и один из четырех его углов. Вычислите остальные углы.

Решение. На рисунке 16 изображен четырехугольник Эйлера $A_1 A_2 A_3 A_4$. Обо-

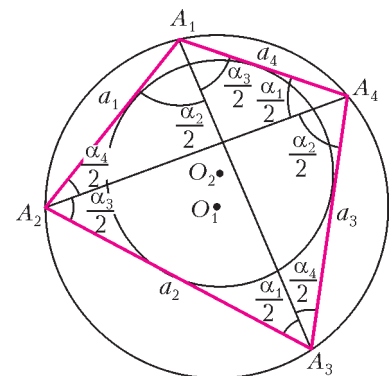


Рис. 16

значим соответствующие углы при вершинах $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$, причем известный нам угол – это α . Пусть далее $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ – центральные углы, опирающиеся на стороны a_1, a_2, a_3, a_4 соответственно.

Очевидны такие равенства:

$$\alpha = 0,5(\alpha_2 + \alpha_3), \quad \beta = 0,5(\alpha_3 + \alpha_4),$$

$$\gamma = 0,5(\alpha_4 + \alpha_1), \quad \varepsilon = 0,5(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Так как четырехугольник Эйлера – вписанный, то $\alpha + \gamma = 180^\circ$, $\beta + \varepsilon = 180^\circ$. Отсюда ясно, что для ответа на вопрос задачи достаточно найти только угол β . Поскольку четырехугольник Эйлера – описанный, то $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$. Из этого равенства получаем

$$2R \left(\sin \frac{\alpha_1}{2} + \sin \frac{\alpha_3}{2} \right) = 2R \left(\sin \frac{\alpha_2}{2} + \sin \frac{\alpha_4}{2} \right),$$

откуда

$$\sin \frac{\alpha_1}{2} - \sin \frac{\alpha_2}{2} + \sin \frac{\alpha_3}{2} - \sin \frac{\alpha_4}{2} = 0. \quad (33)$$

Инвариант

$$I_3 = \sum_{k=1}^4 \cos \frac{\alpha_k}{2} = \cos \frac{\alpha_1}{2} + \cos \frac{\alpha_2}{2} + \cos \frac{\alpha_3}{2} + \cos \frac{\alpha_4}{2}. \quad (34)$$

После возведения в квадрат уравнений (33) и (34) и последующего их сложения получаем равенство

$$I_3^2 = 4 + 2 \left(\cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{2} + \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2} + \cos \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} + \cos \frac{\alpha_2 - \alpha_4}{2} + \cos \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} \right),$$

или

$$I_3^2 = 4 + 2(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos \varepsilon) + 2 \left(\cos \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{2} + \cos \frac{\alpha_2 - \alpha_4}{2} \right).$$

Так как суммы противоположных углов вписанного четырехугольника равны 180° , то $\cos \alpha + \cos \gamma = 0$ и $\cos \beta + \cos \varepsilon = 0$. Поэтому $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos \varepsilon = 0$. Далее,

$$\begin{aligned} 2 \left(\cos \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{2} + \cos \frac{\alpha_2 - \alpha_4}{2} \right) &= \\ &= 4 \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_2 - \alpha_4}{4} \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_2 + \alpha_4}{4} = \\ &= 4 \cos \frac{\varepsilon - \beta}{2} \cos \frac{\gamma - \alpha}{2}. \end{aligned}$$

Поскольку суммы противоположных углов вписанного четырехугольника равны 180° , то

$$\begin{aligned} \cos \frac{\varepsilon - \beta}{2} \cos \frac{\gamma - \alpha}{2} &= \sin \beta \sin \alpha = \\ &= \sin \beta \sin \gamma = \sin \varepsilon \sin \alpha = \sin \varepsilon \sin \gamma. \end{aligned}$$

Для нахождения угла β , учитывая (32), имеем урав-

нение

$$4 + 4 \sin \alpha \sin \beta = I_3^2 = \frac{8}{1 + \delta^2}.$$

Из этого уравнения получаем

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1 - \delta^2}{1 + \delta^2}. \quad (35)$$

Отсюда и ответ: $\beta = \arcsin \frac{1 - \delta^2}{(1 + \delta^2) \sin \alpha}$.

Задача 14. В четырехугольнике Эйлера известны его углы. Вычислите ρ .

Решение. Очевидно, достаточно задать два соседних угла α и β (в обозначениях предыдущей задачи). Воспользуемся формулой (35), получим из нее значение δ^2 :

$$\delta^2 = \frac{1 - \sin \alpha \sin \beta}{1 + \sin \alpha \sin \beta}. \quad (36)$$

Подставив это значение в формулу (14), после преобразований получаем ответ:

$$\rho = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{1 + \sin \alpha \sin \beta}}. \quad (37)$$

Эта формула аналогична формуле (30) для треугольника.

Задача 15. Радиус описанной около четырехугольника Эйлера окружности равен R , а его диагонали равны a и b . Найдите: 1) радиус вписанной окружности r ; 2) расстояние d между центрами описанной и вписанной окружностей.

Решение. Пусть $a = A_2A_4$ и $b = A_1A_3$ (см. рис.16).

Тогда $a = 2R \sin \alpha$, $b = 2R \sin \beta$, и $\sin \alpha \sin \beta = \frac{ab}{4R^2}$.

Подставив это значение $\sin \alpha \sin \beta$ в формулу (37), получим ответ на первый вопрос:

$$r = \frac{ab}{2\sqrt{4R^2 + ab}}.$$

Подставив это же значение в формулу (36), получим ответ на второй вопрос:

$$d = R \sqrt{\frac{4R^2 - ab}{4R^2 + ab}}.$$

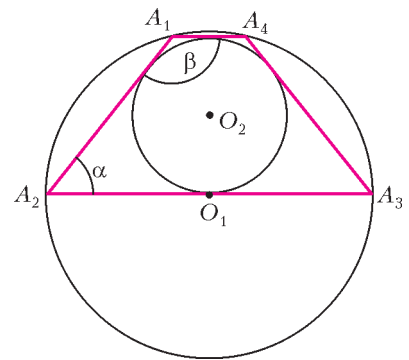


Рис. 17

Задача 16. Четырехугольник Эйлера является трапецией. Ее большим основанием является диаметр описанной окружности (рис. 17). Чему равен острый угол трапеции?

Решение. Поскольку в этом случае $\beta = 180^\circ - \alpha$, то формулы (36) и (37) запишутся так:

$$\delta^2 = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} \quad \text{и} \quad \rho = \frac{\sin^2 \alpha}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha}}.$$

В этой ситуации $\rho = \delta$, поэтому, приравняв значения δ^2 и ρ^2 , получим биквадратное уравнение:

(Продолжение см. на с. 13)

Логарифмические шкалы

В. СУРДИН

В БЫТУ, КАК ПРАВИЛО, ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ величин мы используем *линейные* шкалы: метры, мили, футы – для измерения длины, граммы, тонны, фунты – для веса, градусы Цельсия или Фаренгейта – для температуры. В науке диапазон измерений значительно шире, чем в быту, поэтому ученые часто оперируют порядками величин, записывая числа в так называемой научной символической форме. Например, вместо 56000 пишут $5,6 \cdot 10^4$. По существу, это *логарифмическая* запись, хотя в показателе степени обычно оставляют только целую часть логарифма, а мантиссу – дробную часть логарифма – записывают в виде десятичной дроби. Это удобно: целый показатель степени сразу указывает область измерения, т.е. порядок величины, а десятичная дробь уточняет значение числа, причем количество цифр в ней обычно соответствует точности измерения. В нашем примере запись « 10^4 » говорит о том, что речь идет о десятках тысяч, а запись «5,6» содержит две значащие цифры и указывает, что точность измерения составляет около 1%.

Большинству людей логарифмическая форма записи чисел кажется слишком научной, хотя неосознанно мы довольно часто используем ее и в обычной жизни. Такая неявная склонность к логарифмическому представлению чисел имеет глубокое физиологическое обоснование: оказывается, органы чувств в нашем теле «пользуются» логарифмическими шкалами. По-видимому, впервые это заметил французский физик Пьер Бугер (1698–1758), обнаруживший в опытах по фотометрии, что глаз фиксирует *относительное* различие яркости поверхностей. В виде правила это сформулировал немецкий физиолог Эрнст Вебер (1795–1878), изучавший мышечную и кожную чувствительность. Он установил, что мы воспринимаем не абсолютное, а относительное изменение силы раздражителя. Например, если в руке у вас гирька массой в 10 г, то вы уверенно ощущаете добавку к ней еще такой же массы; но если вы держите в руках массу в 10 кг, то добавление к ней 10-граммовой гирьки вы не почувствуете. Позже это подтвердилось и для других органов чувств – зрения, слуха, вкуса. Выяснилось, что наша чувствительность относительна и разрешающая способность органов чувств обычно составляет несколько процентов. Немецкий физик и психолог Густав Фехнер (1801–1887) сформулировал это математически:

$$S = a \ln I + b,$$

где S – интенсивность воспринимаемого нами ощущения, I – сила раздражителя, a и b – константы. Таким образом, ощущение пропорционально логарифму раздражения. Это соотношение называется *законом Вебера–Фехнера*, или *основным психофизическим законом*.

Естественно, логарифм в формуле Фехнера не обязательно должен быть натуральным, можно выбрать и любое другое основание логарифма, заменив при этом константу a . Нередко закон Вебера–Фехнера формулируют так: «При изменении силы раздражителя в геометрической прогрессии интенсивность ощущения меняется в арифметической прогрессии». Разумеется, область справедливости этого правила не безгранична; оно остается верным для раздражителей не слишком слабых (выше порога чувствительности) и не слишком сильных (ниже болевого порога). Биологические механизмы реализации закона Вебера–Фехнера пока еще не до конца ясны. Поэтому мы лишь отметим, как эта особенность нашего восприятия проявляется в науке и технике.

Некоторые общепринятые логарифмические шкалы приведены в таблице 1. Взаимное соответствие между

Таблица 1

Логарифмические шкалы

Шкала	Интервал	Запись	Выражение
exp	степень	$n \text{ exp}$	e^n
dex	степень	$n \text{ dex}$	10^n
B	бел	$n \text{ B}$	10^n
dB	децибел	$n \text{ dB}$	$10^{0,1n}$
mag	звездная	$n \text{ mag}$ или n^m	$10^{-0,4n}$

ними такое: $1 \text{ dex} = 1 \text{ B} = 10 \text{ dB} = -2,5 \text{ mag} \approx 2,303 \text{ exp}$. Заметим, что во всех этих шкалах значок после числа указывает не физическую размерность величины, а тип шкалы. Во всех логарифмических шкалах выражается отношение двух одноименных физических величин. Поэтому запись «0,5 dex» может означать как то, что годовой доход компании возрос в 3,16... раза (скажем, с 86 до 272 млн руб.), так и то, что средний удой коров в хозяйстве поднялся в 3,16... раза (скажем, с 1500 до 4750 литров в год).

Впрочем, в некоторых логарифмических шкалах единица измерения имеет свое название. Например, в шкале натуральных логарифмов единица называется *непер* и обозначается Np или Np (в старых книгах

можно встретить «неп» или «нп»): $1 \text{ Нп} = \ln(F_1/F_2)$ при $F_1/F_2 = e$, где F_1 и F_2 – физические величины одной и той же размерности, а $e \approx 2,718$ – основание натуральных логарифмов. Разумеется, эта единица названа в честь шотландского математика, изобретателя логарифмов Джона Непера (1550–1617). В его же честь и число e называют *неперовым числом*. Правда, на практике применяют неперы нечасто, в основном в электротехнике – при измерениях затухания электрических сигналов в линиях связи.

Громкость и высота звука – белы, децибелы, октавы

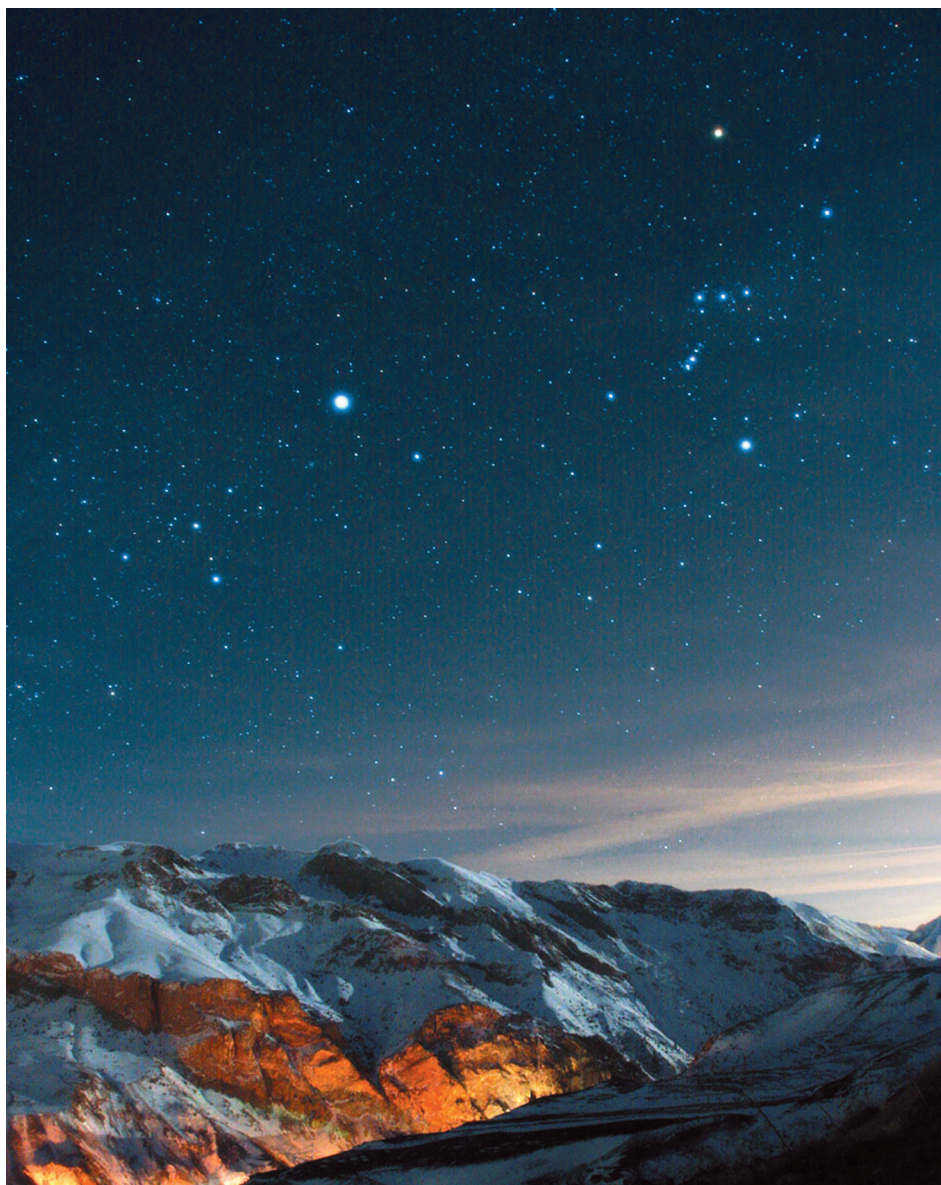
В шкале обычных десятичных логарифмов единица измерения называется «бел» – в честь американского изобретателя телефона Александра Белла (1847–1922). Чаще применяется ее десятая часть – децибел. Обе единицы в основном используются в акустике для измерения уровня интенсивности звука и звукового давления, а также в электротехнике. Разность уровней в 1 дБ означает отношение в $10^{0,1} = 1,2589\dots$ раз. Три децибела почти точно означают удвоение. В акустике за ноль принимают еле слышимый звук (давление около $2 \cdot 10^{-5} \text{ Н/м}^2$), так что уровень громкости в 90 дБ означает миллиардкратное превышение интенсивности звука над едва уловимым шепотом.

Однако у единиц «бел» и «децибел» есть особенность, затрудняющая их применение за пределами акустики и электротехники. Дело в том, что эти логарифмические шкалы определяются по-разному для разных физических величин. Введенное выше определение ($\lg(I_1/I_2)$) используется только для энергетических величин, к которым относятся мощность, энергия, поток энергии и т.д. А для силовых величин – напряжение, сила тока, давление, напряженность поля, ... – используется иное определение:

$$1 \text{ Б} = 2 \lg(p_1/p_2) \text{ и} \\ 1 \text{ дБ} = 20 \lg(p_1/p_2),$$

поскольку, к примеру, интенсивность звука (поток энергии) и звуковое давление связаны соотношением $I \sim p^2$. Иногда это приводит к путанице: если в акустике 1 дБ = 0,2303 Нп, то в электротехнике 1 дБ = 0,1151 Нп. Неоднозначность белов и децибелов делает более удобной единицу «dex», которая все чаще применяется в математике, астрономии и многих областях физики.

Если амплитуду звуковой волны мы воспринимаем как громкость, то ее частота характеризует высоту звука. И в этом случае справедлив закон Вебера–Фехнера: разные звуки воспринимаются нами как равноотстоящие по высоте, если равны отношения их частот. Для измерения интервалов высоты звука применяются логарифмические единицы. Основная среди них – октава, ограниченная частотами, отношение которых равно двум. Понятие октавы становится все более популярным за пределами музыкальной сферы, поскольку числа вида 2^n широко используются в импульсной электронике, в частности в вычислительной технике. Правда, в этих областях слово «октава»



На этой фотографии, сделанной иранским любителем астрономии Б.Тафреши, мы видим весь диапазон звезд, доступных невооруженному глазу человека. Участок неба охватывает созвездия Ориона (вверху справа), Единорога (вверху слева) и Большого Пса (левее центра). Самая яркая звезда здесь – Сириус (альфа Б. Пса), ярчайшая звезда нашего небосвода; она имеет звездную величину $-1,5$. А самые слабые звезды на снимке имеют величину $6,5$; поток света от них в 1600 раз слабее, чем от Сириуса.

обычно заменяют словом «бит» (двоичный разряд), но по сути они близки.

Яркость источников света – шкала звездных величин

Астрономы измеряют блеск небесных светил в звезд-

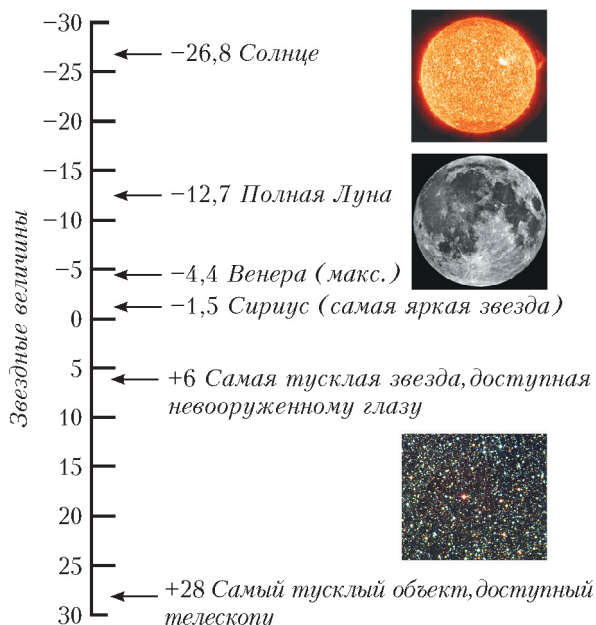


Рис. 1

ных величинах (рис.1). Это безразмерная величина, характеризующая освещенность, создаваемую небесным объектом вблизи наблюдателя. Как видим, словом «блеск» астрономы характеризуют зрительное восприятие, не совсем совпадающее с тем, что принято в быту. Блеск одного источника указывают путем его сравнения с блеском другого, принятого за эталон. Такими эталонами являются специально подобранные звезды.

Основанием шкалы звездных величин служит число $\sqrt[5]{100} \approx 2,512$. Это дань исторической традиции, не имеющая какого-либо рационального оправдания. Для целей астрономической фотометрии вполне хватило бы неперов или белов, но звездные величины родились гораздо раньше, и теперь от них трудно отказаться. Обозначают звездную величину латинской буквой m (от лат. *magnitudo* – величина). Среди странностей этой шкалы есть еще одна – ее направление обратное: чем больше значение звездной величины, тем слабее блеск объекта. Например, звезда 2-й звездной величины (2^m) в 2,512 раза ярче звезды 3-й величины (3^m) и в $2,512 \cdot 2,512 = 6,310$ раза ярче звезды 4-й величины (4^m) и так далее.

Химическая чувствительность – шкала кислотности

Очень близка к шкале звездных величин и химическая шкала реакции среды – так называемая шкала кислотности (рис.2). Напомним, что известный школьникам и всем, кто пользуется косметикой, водородный показатель рН определяется таким соотношением:

$$\text{pH} = -\lg[\text{H}^+],$$

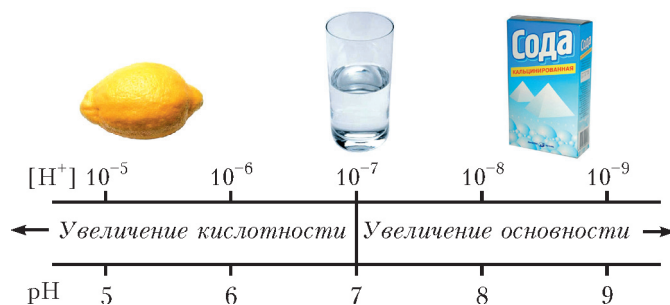


Рис. 2

где $[\text{H}^+]$ – концентрация положительных водородных ионов в растворе. При этом за ноль принимают чистую воду при комнатной температуре (нейтральная среда), имеющую $[\text{H}^+] = 10^{-7}$. Далее при повышении кислотности значение рН уменьшается – чем не шкала звездных величин? Чем выше кислотность, тем ниже значение индекса, только основанием логарифма служит не 2,512 (как у звездных величин), а 10.

Как известно, первыми химическими индикаторами были наши вкусовые рецепторы, которыми сегодня пользуются только повара, а раньше использовали и химики. Поэтому неудивительно, что в химии появилась логарифмическая шкала концентрации: сработал закон Вебера–Фехнера, которому подчиняются все наши чувства.

Сила землетрясения – шкала Рихтера

Какие еще остались у нас чувства? Ну, скажем, чувство равновесия и вертикального направления – назовем его для краткости «вестибулярное чувство». Его типичным раздражителем служат... землетрясения. Оказывается, их силу тоже измеряют в логарифмической шкале.

Степень сотрясения почвы на поверхности Земли называют интенсивностью землетрясения (или же силой землетрясения) и выражают в баллах – например, по международной 12-бальной сейсмической шкале, или шкале Меркалли (см. таблицу 2). Однако это весьма относительная характеристика, выводимая по ощущениям и произведенным разрушениям, которые зависят не только от энергии, выделившейся в очаге землетрясения, но и от положения очага относительно наблюдателя. Даже точно в эпицентре землетрясения его балл зависит от глубины очага. Поэтому более объективной величиной служит *магнитуда* землетрясения M , пропорциональная логарифму максимальной амплитуды смещения частиц почвы (эта величина измеряется сейсмометрами.) Магнитуда характеризует общую энергию сейсмических волн, возбужденных подземным толчком. Такая шкала называется шкалой Рихтера – в честь известного сейсмолога из Калифорнийского технологического института Ч.Рихтера.

В эпицентре при фиксированной глубине очага магнитуда и балл (по 12-бальной шкале) практически взаимно пропорциональны: 1 балл $\sim 1,5M$. Сама же магнитуда M связана с энергией подземного толчка E

Таблица 2

Сейсмическая шкала Меркалли

Балл	Название землетрясения	Краткая характеристика
1	Незаметное	Отмечается только сейсмическими приборами
2	Очень слабое	Ощущается отдельными людьми, находящимися в состоянии полного покоя
3	Слабое	Ощущается лишь небольшой частью населения
4	Умеренное	Распознается по легкому дребезжанию и колебанию предметов, посуды и оконных стекол, скрипу дверей и стен
5	Довольно сильное	Общее сотрясение зданий, колебание мебели. Трещины в оконных стеклах и штукатурке. Пробуждение спящих
6	Сильное	Ощущается всеми. Картины падают со стен. Откалываются куски штукатурки. Легкое повреждение зданий
7	Очень сильное	Трещины в стенах каменных домов. Антисейсмические, а также деревянные постройки остаются невредимыми
8	Разрушительное	Трещины на крутых склонах и на сырой почве. Памятники сдвигаются с места или опрокидываются. Дома сильно повреждаются
9	Опустошительное	Сильное повреждение и разрушение каменных домов
10	Уничтожающее	Крупные трещины в почве. Оползни и обвалы. Разрушение каменных построек. Искривление железнодорожных рельсов
11	Катастрофа	Широкие трещины в земле. Многочисленные оползни и обвалы. Каменные дома совершенно разрушаются
12	Сильная катастрофа	Изменения в почве достигают огромных размеров. Многочисленные трещины, обвалы, оползни. Возникновение водопадов, подпруд на озерах, отклонение течения рек. Ни одно сооружение не выдерживает

(в джоулях) логарифмически:

$$M = -2,5 + \frac{5}{8} \lg E .$$

Например, катастрофическое 9-балльное землетрясение 1948 года, разрушившее город Ашхабад, имело магнитуду $M = 7$. Следовательно, в очаге этого землетрясения (на глубине около 20 км) выделилась энергия порядка 10^{15} Дж, что эквивалентно взрыву 250-килотонной бомбы. Сильнейшие из зарегистрированных землетрясений имели магнитуду 8,9. Таких землетрясений с начала инструментальных наблюдений зарегистрировано два, оба под океаном. Одно произошло в 1933 году у берегов Японии, другое – в 1906 году у берегов Эквадора.

Как видим, балл землетрясения практически изменяется как десятичный логарифм его энергии (1 балл $\sim 0,94 \lg E$). Разность уровней в 1 балл по сейсмической шкале весьма близка к 1 белу. Если сравнить это с основанием шкалы звездных величин (2,512) или громкости звука в децибелах (1,259), то можно заключить, что у шкалы нашего вестибулярного чувства весьма грубый шаг (10).

Сила ветра – шкала Бофорта

Ветер интересует не только моряков и летчиков, он также весьма сильно влияет на качество астрономичес-

ких наблюдений. Его интенсивность воспринимается сразу несколькими органами чувств – глазами, кожей, ушами, а также объективно измеряется анемометром как скорость воздушного потока (которую метеорологи предпочитают называть силой ветра).

Для визуальной оценки силы ветра существует особая 13-балльная шкала, разработанная английским адмиралом Ф.Бофортом в 1806 году. Балл Бофорта имеет словесное определение силы ветра – штиль, свежий ветер, шторм, ураган и т.п. и визуальное, описательное проявление его действия на суше и на море – характер качания деревьев, характер и высота волн. Сначала эта шкала применялась только самим ее автором. Но в 1874 году Постоянный комитет Первого метеорологического конгресса принял шкалу Бофорта для использования в международной синоптической практике. Позже шкала менялась и уточнялась, а в 1963 году была принята Всемирной метеорологической организацией в том виде, как она приведена в таблице 3 (на стандартной высоте 10 м над открытой ровной поверхностью).

Легко видеть, что баллы по шкале Бофорта – назовем их $ББ$ – функционально связаны со скоростью ветра (v). Но вот что любопытно – математическая зависимость оказалась не логарифмической, а степенной:

$$ББ \approx 1,25v^{5/8},$$

Сила ветра у земной поверхности по шкале Бофорта

Баллы Бофорта	Словесное определение силы ветра	Скорость ветра, м/с	Действие ветра	
			на суше	на море
0	Штиль	0–0,2	Штиль. Дым поднимается вертикально	Зеркально гладкое море
1	Тихий	0,3–1,5	Направление ветра заметно по отношению дыма, но не по флюгеру	Рябь, пены на гребнях нет
2	Легкий	1,6–3,3	Движение ветра ощущается лицом, шелестят листья, приводится в движение флюгер	Короткие волны, гребни не опрокидываются и кажутся стекловидными
3	Слабый	3,4–5,4	Листья и тонкие ветви деревьев все время колеблются, ветер развеивает верхние флаги	Короткие, хорошо выраженные волны. Гребни, опрокидываясь, образуют стекловидную пену, изредка образуются маленькие белые барашки
4	Умеренный	5,5–7,9	Ветер поднимает пыль и бумажки, приводит в движение тонкие ветви деревьев	Волны удлиненные, белые барашки видны во многих местах
5	Свежий	8,0–10,7	Качаются тонкие стволы деревьев, на воде появляются волны с гребнями	Хорошо развитые в длину, но не очень крупные волны, повсюду видны белые барашки (в отдельных случаях образуются брызги)
6	Сильный	10,8–13,8	Качаются толстые сучья деревьев, гудят телеграфные провода	Начинают образовываться крупные волны. Белые пенные гребни занимают значительные площади (вероятны брызги)
7	Крепкий	13,9–17,1	Качаются стволы деревьев, идти против ветра трудно	Волны громоздятся, гребни срываются, пена ложится полосами по ветру
8	Очень крепкий	17,2–20,7	Ветер ломает сучья деревьев, идти против ветра очень трудно	Умеренно высокие длинные волны. По краям гребней начинают взлетать брызги. Полосы пены ложатся рядами по направлению ветра
9	Шторм	20,8–24,4	Небольшие повреждения, ветер срывает дымовые колпаки и черепицу	Высокие волны. Пена широкими плотными полосами ложится по ветру. Гребни волн начинают опрокидываться и рассыпаться в брызги, которые ухудшают видимость
10	Сильный шторм	24,5–28,4	Значительные разрушения строений, деревья вырываются с корнем. На суше бывает редко	Очень высокие волны с длинными загибающимися вниз гребнями. Образующаяся пена выдувается ветром большими хлопьями в виде густых белых полос. Поверхность моря белая от пены. Сильный грохот волн подобен ударам. Видимость плохая
11	Жестокий шторм	28,5–32,6	Большие разрушения на значительном пространстве. На суше наблюдается очень редко	Исключительно высокие волны. Суда небольшого и среднего размера временами скрываются из вида. Море все покрыто длинными белыми хлопьями пены, располагающимися по ветру. Края волн повсюду сдуваются в пену. Видимость плохая
12	Ураган	32,7 и более		Воздух наполнен пеной и брызгами. Море все покрыто полосами пены. Очень плохая видимость

где скорость выражена в м/с. Интересно было бы понять причину этого исключения. Почему весьма общий закон Вебера–Фехнера не проявил себя в этом случае? Можно предположить, что рецепторы человека прямо не участвуют в определении силы ветра, что это оценка скорее эмоциональная, чем

физиологическая. Действительно, оценивая силу ветра, мы обычно думаем об ущербе, который он может причинить. Однако, как мы увидим далее, наши эмоции также – и это поистине удивительно! – подчиняются психофизическому закону.

Туринская шкала опасности столкновения Земли с астероидами и кометами

Оценка опасности объекта	Балл	Краткая характеристика
Безопасен	0	Вероятность столкновения в ближайшие десятилетия равна нулю. К этой же категории относят столкновения Земли с объектами, которые сгорают в атмосфере, не достигнув поверхности
Заслуживает внимательного слежения	1	Вероятность столкновения крайне низка. Скорее всего, подобные тела в ближайшие десятилетия с Землей не встретятся
Вызывает беспокойство	2	Вероятность столкновения низка, хотя тело пролетит довольно близко. Подобные события происходят нередко
	3	Вероятность столкновения с телом, способным вызвать локальные разрушения, составляет не менее 1%
	4	Вероятность столкновения с телом, способным привести к региональным разрушениям, составляет свыше 1%
Явно угрожает	5	Вероятность столкновения с телом, способным вызвать катастрофу регионального масштаба, очень велика
	6	То же – с вероятными глобальными последствиями
	7	То же – с неизбежными глобальными последствиями
Столкновение неизбежно	8	Вероятность катастрофических локальных событий – одно в 50–1000 лет
	9	Вероятность катастрофических региональных событий – одно в 1000–100000 лет
	10	Вероятность глобальной катастрофы (с изменением климата на планете) – не менее одного события в 100000 лет

Восприятие психических явлений – шкала эмоций

На нескольких примерах мы убедимся, что не только физиологические, но и психические шкалы, определяющие силу наших эмоций, также имеют логарифмический характер – для своих субъективных оценок произведенного на нас впечатления мы подсознательно выбираем «ступеньки» в виде геометрической прогрессии.

В качестве общеизвестного примера начнем со шкалы Ландау, по которой знаменитый физик оценивал заслуги своих коллег. Вот как об этом вспоминает академик В.Л. Гинзбург: «... Ландау имел “шкалу заслуг” в области физики. Шкала была логарифмическая (классу 2 отвечали достижения в 10 раз меньше, чем для класса 1). Из физиков нашего века класс 0,5 имел только Эйнштейн, к классу 1 относились Бор, Дирак, Гейзенберг и ряд других...»

Другие источники рассказывают о шкале Ландау немного иначе: «Ландау присваивал великим ученым-физикам всего мира “звездные” номера. Вы знаете, что звезда первой величины – это очень яркая звезда, звезда второй величины – менее яркая и т. д. Эйнштейну, Бору и Ньютону Ландау присвоил половинную величину – 0,5. Дирак, Гейзенберг – это звезды первой величины. Себе он присваивал вторую величину».

Остается неясным, логарифм по какому основанию – 10 или 2,512 – использовал Лев Ландау для определения уровня гениальности физиков-теоретиков. Несомненно лишь одно: для этих сугубо эмоциональных,

субъективных оценок он использовал логарифмическую шкалу.

Уже отмечалось, что в быту мы тоже нередко используем шкалу логарифмов. Примеры можно было бы продолжать долго. Так, богатых людей мы делим на миллионеров и миллиардеров. Города делим по населению на миллионные и стотысячные. Покупая продукты в магазине, стараемся экономить рубли, а задумываясь о покупке нового холодильника или телевизора, обращаем внимание лишь на сотни рублей. Как и в случае физиологических шкал, в бытовых эмоциональных вопросах мы воспринимаем не абсолютное, а относительное различие. При этом оно становится для нас заметным и значимым, когда превышает несколько процентов от измеряемой величины. Похоже, что чувствительность нашего «измерителя эмоций» близка к чувствительности глаза, уха и прочих физиологических рецепторов.

Рассмотрим примеры нескольких эмоциональных шкал, предложенных в последние годы.

Туринская и палермская шкалы астероидной опасности

В 1999 году на конференции ООН по мирному использованию космического пространства Международный астрономический союз представил систему оценки угрозы возможных столкновений Земли с астероидами и кометами. Степень угрозы указывается по 11-бальной шкале, разработанной американским астрономом Ричардом Бинзелом. Поскольку автор впервые представил эту шкалу своим коллегам на

симпозиуме в Турине, за ней закрепилось название «Туринская шкала астероидной опасности».

В целом шкала Бинзела подобна шкале Рихтера, используемой сейсмологами для указания разрушительной силы землетрясений. Обе они вполне доступны пониманию неспециалистов, в чем и заключается их несомненная польза. Туринская шкала позволяет классифицировать астероиды и другие небесные тела (с учетом их размера и скорости относительно нашей планеты) по 11 уровням степени их опасности для землян. Она учитывает не только вероятность столкновения астероида с Землей, но и потенциальные разрушения, к которым может привести катастрофа.

Как видно из таблицы 4, к нулевой категории отнесены те объекты, о которых с уверенностью можно сказать, что они не достигнут поверхности Земли, к первой категории – те, что все же заслуживают внимательного слежения, ко второй, третьей и четвертой отнесены малые планеты, вызывающие оправданное беспокойство. В пятую–седьмую категории включены тела, явно угрожающие Земле, а объекты из последних трех несомненно столкнутся с нашей планетой, причем последствия для ее биосферы могут быть локальными, региональными или глобальными. Туринская шкала оказалась полезной для классификации и объяснения публике возможных последствий космических столкновений. Хотя она не содержит четких количественных критериев, все же можно заметить, что с переходом к следующему баллу, эмоциональное напряжение возрастает на порядок.

Количественно это подтвердилось в недавно опубликованной профессиональной версии Туринской шкалы, названной Палермской шкалой опасности столкновения. Вместо баллов в ней используется непрерывный индекс PS (от Palermo Scale), определенный в виде логарифма отношения ожидаемой вероятности столкновения с конкретным объектом на интервале расчетного времени к фоновой вероятности столкновения с подобными объектами за это же время:

$$PS = \lg \frac{P_i}{f \Delta t},$$

где P_i – вероятность столкновения в момент сближения объекта с Землей, Δt – время, оставшееся до вероятного столкновения (в годах), f – фоновая частота столкновения с подобными или более опасными объектами. Последняя величина оценена как функция от энергии удара E (в мегатоннах ТНТ) в таком виде:

$$f = \frac{0,03}{E^{4/5}} \text{ событий в год.}$$

Таким образом, степень страха метеоритной опасности также имеет логарифмический характер.

Статистика военных потерь – шкала Ричардсона

А теперь мы обратимся к измерениям, связанным не с гипотетическими, а с реальными катастрофами нашей цивилизации – с войнами. Они происходят регулярно

и порой кажутся неизбежными. Главный, а часто и единственный, результат войны – убийство людей. Кажущаяся неизбежность и трудность прогнозирования сближают войны с природными катаклизмами. Возможно, именно поэтому поэтотом количественным изучением войн заинтересовался английский метеоролог Луис Ричардсон, написавший в результате своих исследований книгу «Статистика смертельной вражды» (1960 г.).

Чтобы разгадать логику войны, нужно непредвзято изучить явление и создать его обобщенный портрет. Ричардсон собрал массив данных о сотнях войн, произошедших в период между 1820 и 1945 годами. В качестве важнейшей характеристики войны, ее смертности, он предложил использовать индекс M – «магнитуду войны», определенную как десятичный логарифм числа погибших N :

$$M = \lg N.$$

Диапазон значений M – от локальных конфликтов до мировых войн – оказался такой же, как у землетрясений по шкале Рихтера: $3 < M < 8$. Задавшись вопросом о том, как часто случаются войны с определенным числом жертв, Ричардсон обнаружил, что чем больше людей гибнет на войне, тем меньше ее вероятность, т.е. тем реже происходят такие конфликты. Это соответствует и природным катастрофам: разрушительные штормы случаются реже сильных ливней.

Любопытно, что Ричардсон попытался экстраполировать полученную им зависимость в область глобальной катастрофы, способной уничтожить человечество ($M = 10$). Для этого печального события он получил характерное время ожидания около 1000 лет. Однако Карл Саган, обсуждая работу Ричардсона в своей книге «Космос» (1980 г.), предположил, что появление после 1945 года ядерного оружия должно изменить ход кривой Ричардсона: «последняя война», по мнению Сагана, может вспыхнуть в ближайшие 100 лет. События последних десятилетий, ослабившие военное противостояние супердержав, позволяют надеяться, что оценка Ричардсона ближе к истине.

Не менее интересной оказалась экстраполяция кривой Ричардсона в область малых значений M , вплоть до $M = 0$. Ричардсон предположил, что таким образом можно получить грубую оценку частоты происходящих в мире убийств. У него получилось, что где-то на Земле каждые пять минут убивают человека. В психологическом смысле это оправдано: убийство и война – это синонимы, даже если речь идет об одном человеке.

Как видим, свойственный человеческой физиологии и психике логарифмический закон расширяет динамический диапазон наших органов чувств, притупляя их реакцию на сильные раздражители и тем самым отодвигая болевой порог. Очевидно, в течение миллионов лет это способствовало выживанию вида *Homo sapiens*. Вопрос в том, не окажется ли это свойство нашей психики роковым для человечества в современную эпоху.

Руджер Божкович

А. ВАСИЛЬЕВ

НА ПОЛИТИЧЕСКОЙ КАРТЕ ЕВРОПЫ НЕТ В НАСТОЯЩЕЕ время государства «Далмация», подарившего миру одного из крупнейших астрономов и математиков своего времени – Руджера Божковича (1711–1787).

Божкович родился в Рагузе, на территории современной Хорватии, и получил начальное образование в иезуитском колледже своего родного города. С 1725 года он продолжил занятия в Риме, где поразил своими способностями профессоров математики Римского иезуитского колледжа, в частности он предложил свой собственный вывод теоремы Пифагора, а сразу по окончании колледжа был назначен преподавателем математики в этом колледже. Тогда же он обнаружил интерес к астрономическим проблемам, публикуя каждый год трактаты, названия которых говорят сами за себя: «Солнечные пятна» (1736 г.), «Траектория Меркурия» (1737 г.), «Северное сияние» (1738 г.), «Форма Земли» (1739 г.), «Движение небесных тел в безвоздушной среде» (1740 г.), «Различные эффекты гравитации» (1741 г.), «Абerrация неподвижных звезд» (1742 г.).

Проблемы чистой математики и разнообразные физические проблемы также привлекали его внимание. Божкович принимал участие во всех актуальных диспутах того времени, включая обсуждение отклонения формы Земли от идеальной сферы, расчет орбиты кометы из ограниченного числа наблюдений и так далее. Его участие в этих дискуссиях привлекло внимание ряда итальянских и иностранных академий, членом которых он был избран. Со знаменитым математиком Эйлером Божкович разделил приз за решение одной из задач, поставленных Французской академией.

В ряде научных трудов Божкович изложил концепцию, согласно которой все тела состоят из точечных структур,

не имеющих геометрических размеров и не подверженных делению, причем между этими точками существует отталкивание на малых расстояниях и притяжение на больших расстояниях. В концепции Божковича впервые были введены частицы, движущиеся со скоростью света. Все это удивительным образом предвосхитило многие позднейшие открытия физики элементарных частиц.

Деятельность Божковича, разумеется, не ограничивалась написанием трактатов и участием в дискуссиях. Он был советником папы римского по многим техническим проблемам. В частности, благодаря Божковичу купол собора Св. Петра был укреплен железными дугами. Папа Бенедикт XIV поручил ему точный расчет длины меридиана, а влияние Божковича на папу, в свою очередь, привело к отмене в 1757 году запрета церкви на учение Коперника.

В 1764 году Божкович принял приглашение университета Павии занять пост профессора математики и примерно в то же время совместно с Лагранжем участвовал в организации обсерватории Брера в Милане. В 1772 году Божкович предполагал перебраться в университет Пизы, однако король Франции Луи XV переманил его на должность главного оптика военно-морского флота. В этой должности Божкович оставался до 1783 года, когда он вернулся в Италию для издания своих ранее неопубликованных книг. Последние годы жизни этот деятельный человек и гениальный провидец современной физики провел в одном из удаленных монастырей.

Любопытную оценку Божковичу дал великий французский математик Даламбер: «...Свои работы Божкович излагает скорее как гуру, которому известна абсолютная истина, нежели как исследователь, способный запутаться в собственных рассуждениях».

Этюд о формуле Эйлера

(Начало см. на с. 2)

$\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha - 1 = 0$. Нужный нам корень этого уравнения равен $\sin \alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Замечание. В некоторых наших задачах «волшебным» образом появляется число из «золотого сечения»: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Причина этого нам неизвестна.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 17. Для данных двух окружностей рассматриваются два четырехугольника Эйлера – трапеция и дельтоид.

Острый угол трапеции равен x , а острый угол дельтоида равен y . Найдите соотношение между этими углами.

(Ответ: $\sin y = \sin^2 x$.)

Задача 18. Четырехугольник Эйлера – дельтоид. Центр описанной окружности лежит на вписанной окружности. Найдите острый угол дельтоида.

(Ответ: $\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.)

Задача 19. Решите задачу 4, используя формулу (35).

Задача 20. У двух дельтоидов Эйлера сумма острых углов равна 90° . Докажите, что если $\delta_1 = p/q$, где p и q положительные, то $\delta_2 = (q-p)/(q+p)$.

Задача 21. Найдите углы трапеции Эйлера, если радиус вписанной в нее окружности в полтора раза больше расстояния между центрами вписанной в нее окружности и описанной около нее окружности.

(Ответ: $60^\circ, 120^\circ$.)