КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» № 4 за 2006 г.)

1. Трех взвешиваний достаточно. Покажем, как это сделать. Пронумеруем все монеты слева направо от 1 до 28. Разделим их на три кучки, отнеся к первой кучке монеты с 1 по 9, во вторую – с 10 по 19, в третью – с 20 по 28.

Первым взвешиванием сравним веса первой и третьей кучек. Если весы оказались в равновесии, то фальшивые монеты находятся во второй кучке (в ней 10 монет). Если же одна из кучек оказалась тяжелее, то в ней, как минимум, содержится одна фальшивая монета. Следовательно, ближайшая монета из второй кучки тоже оказывается под подозрением.

Таким образом, в любом случае из 10 подозрительных монет за оставшиеся два взвешивания нужно найти 2 фальшивые монеты, лежащие рядом друг с другом. Снова пронумеруем эти монеты слева направо от 1 до 10.

Вторым взвешиванием сравним суммарный вес монет 3 и 4 с суммарным весом монет 7 и 8.

Если весы оказались в равновесии, то монеты 3, 4, 7, 8 – настоящие. Тогда третьим взвешиванием сравним суммарный вес монет 1 и 2 с суммарным весом монет 5 и 6. Если какая-то кучка перевесила, то монеты в этой кучке фальшивые; если же весы остались в равновесии, то фальшивые монеты – 9 и 10.

Если же какая-то кучка перевесила, например, монеты 3 и 4, то в этой кучке, как минимум, одна фальшивая монета. Поэтому третьим взвешиванием сравним суммарный вес монет 2 и 5. Если вес монет оказался одинаковым, то обе они настоящие, а фальшивые 3 и 4. Если перевесила монета 2, то фальшивые 2 и 3; если перевесила монета 5, то фальшивые 4 и 5.

2. *Указание.* В системе счисления с натуральным основанием $n > 1$ исходное число запишется так:

$$n^{200}+n^{198}+n^{196}+n^{194}+\ldots+n^4+n^2+1=$$
$$=\left(n^{100}+n^{99}+n^{98}+n^{97}+\ldots+n^2+n+1\right)\times$$
$$\times\left(n^{100}-n^{99}+n^{98}-n^{97}+\ldots+n^2-n+1\right).$$

3. Рассмотрим произвольные 4 участка, имеющие общую вершину, как показано на рисунке 1. Назовем их блоком. Участки занумерованы цифрами от 1 до 4. Длины сторон участков обозначены буквами a, b, c, d, так что площади участков равны соответственно $S_1=bc$, $S_2=bd$, $S_3=ac$, $S_4=ad$. Покажем, что на этих четырех участках имеется не более одного рыцаря. Предположим, что рыцарей не меньше двух.

Рис. 1

Ясно, что рыцари не могут быть соседями по стороне. Поэтому на участках блока ровно 2 рыцаря, которые владеют либо участками 1 и 4, либо 2 и 3. Если рыцари владеют участками 1 и 4, то $S_1>S_2$, $S_4>S_3$ и, следовательно, $S_1\cdot S_4>S_2\cdot S_3$. Если рыцари владеют участками 2 и 3, то знаки неравенств меняются на противоположные и, следовательно, $S_1\cdot S_4<S_2\cdot S_3$. Однако легко проверить, что $S_1\cdot S_4=abcd=S_2\cdot S_3$. Поэтому наше предположение неверно, т.е. в любом блоке не более одного рыцаря.

По условию поле разделено на 2006^2 участков. Очевидно, они разбиваются на 1003^2 непересекающихся блоков. Поэтому среди владельцев не более 1003^2 рыцарей. Приведем пример, когда эта оценка достигается. Возьмем квадрат 3009×3009 и разделим его на вертикальные полосы ширины 2 и 1 попеременно. Потом то же самое проделаем в горизонтальном направлении. В результате мы получим разбиение, показанное на рисунке 2. Участками 2×2 владеют рыцари, а остальными участками – лжецы.

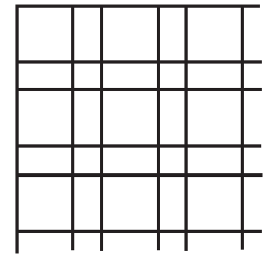

Рис. 2

4. Докажем, что точки A_1, B_1, C_1 являются серединами сторон треугольника ABC. Обозначим точки: P – середина отрезка A_1C_1; Q – середина отрезка B_1C_1; R – середина отрезка A_1B_1 (рис.3). На луче A_1Q в направлении от точки A_1 отметим точку A_2 такую, что $QA_2=A_1Q$. Получим параллелограмм $A_2C_1A_1B_1$, поэтому $A_2C_1=A_1B_1$ и $A_2C_1 \parallel A_1B_1$. Аналогично, на луче B_1P отметим точку B_2 такую, что $PB_2=B_1P$, а на луче C_1R – точку C_2 такую, что $RC_2=C_1R$. Треугольник $A_1B_1C_1$ состоит из средних линий треугольника $A_2B_2C_2$, при этом точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах треугольника $A_2B_2C_2$. Это возможно только тогда, когда точки A_2, B_2, C_2 совпадают с точками A, B, C соответственно. Действительно, в противном случае либо какие-то две из точек A_2, B_2, C_2 лежат внутри ΔABC, а одна – снаружи, либо одна точка лежит внутри, а две другие – снаружи. В каждом из этих случаев существует сторона $\Delta A_2B_2C_2$, которая не пересекает сторону треугольника ABC, что невозможно.

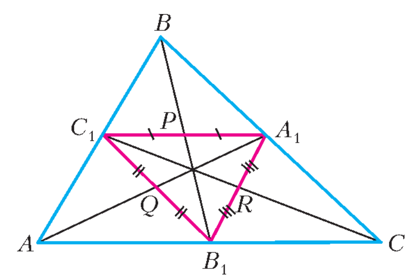

Рис. 3

5. Это число 24. Легко видеть, что оно и в самом деле делится на все натуральные числа, не превосходящие $\sqrt{24}=4{,}89$ (т.е. на 1, 2, 3 и 4). Докажем, что это число наибольшее. Предположим противное: пусть существует такое натуральное $n\ge25$, которое делится на все натуральные числа, не превосходящие $\sqrt{n}$. Тогда $\alpha\ge5$, где $\alpha=\left[\sqrt{n}\right]$ – наибольшее целое число, не превышающее $\sqrt{n}$. Заметим, что либо в тройке $\alpha,\alpha-1,\alpha-2$, либо в тройке $\alpha-1,\alpha-2,\alpha-3$ любые два числа взаимно просты. Поскольку n в таком случае должно делиться на произведение чисел $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$ или $(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)$, то заведомо

$$n\ge(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)>\left(\sqrt{n}-2\right)\left(\sqrt{n}-3\right)\left(\sqrt{n}-4\right),$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{n}}>\left(1-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\left(1-\frac{3}{\sqrt{n}}\right)\left(1-\frac{4}{\sqrt{n}}\right).$$

Если бы число $\sqrt{n}$ было больше 6, то правая часть последнего неравенства была бы не меньше числа

$$\left(1-\frac{2}{7}\right)\left(1-\frac{3}{7}\right)\left(1-\frac{4}{7}\right)=\frac{60}{343},$$

т.е. $\sqrt{n}<\dfrac{343}{60}<6$ – противоречие. Значит, $\sqrt{n}\le6$. Но при $n\ge25$ число n должно было бы делиться на $3\cdot4\cdot5=60$, что противоречит неравенству $\sqrt{n}\le5$. Итак, $n\le24$.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Да. Стекло треснуло бы под действием воды, расширяющейся при превращении в лед, однако вода в бутылке лишь охладится до 0 °С, но не замерзнет.

2. Уровень воды в сосуде понизится, поскольку объем ледяного шарика больше объема образовавшейся из него воды.
3. Можно. Вода, находящаяся под давлением 40 атм, кипит при температуре около 250 °С , что выше температуры плавления олова. На поверхности расплавленной ртути, температура плавления которой ниже 0 °С, можно, охладив ртуть, заморозить, например, каплю воды.
4. Если вода раздроблена на мелкие капли, то лишь в некоторых из них будут иметься центры кристаллизации, в большинстве же капель вода окажется в переохлажденном состоянии.
5. Снежинки служат центрами кристаллизации, вокруг которых начинается образование льда.
6. На самом деле, убавилась внутренняя энергия капли, которая была передана во внешний мир – воздуху и стеклу – как раз в виде тепла.
7. Таяние плавающих льдов не изменяет уровня Мирового океана, а растопление континентальных льдов было бы равноценно добавлению в океан огромных объемов воды.
8. Нет. Следует учесть количество теплоты, необходимое для нагревания твердых тел до температуры плавления.
9. При попадании на кожу человека одинаковых количеств пара и кипятка за счет конденсации пара выделяется примерно в 5 раз большее количество теплоты, чем за счет охлаждения кипятка.
10. Кипяток, так как он превращается в пар быстрее, чем холодная вода, а образующийся пар обволакивает горящее тело и прекращает доступ к нему кислорода.
11. Чаинки сыграли роль центров парообразования в перегретой воде.
12. Нет. Температура кипящей воды не будет повышаться, пока вся вода не превратится в пар.
13. Нет. Чем глубже в воде находится пузырек, тем больше должно быть давление насыщенного пара в пузырьке, чтобы он не схлопывался, а этому соответствует и более высокая температура.
14. Кипение воды при пониженном давлении сопровождается поглощением тепла у остающейся в стакане воды, что приводит к ее охлаждению и замерзанию.
15. При охлаждении дна колбы давление над водой становится меньше давления насыщенного пара.
16. В случае, если «точка росы» ниже 0 °С .
17. Естественно, запотевают внутренние поверхности стекол.
18. При критической температуре жидкость и ее пар неразличимы.
19. Водяной пар совершенно прозрачен, невидим и, следовательно, вовсе не имеет цвета. Белый туман, пар изо рта и облака – это не пар в физическом смысле слова, а скопление мельчайших водяных капелек.

Микроопыт

Вода имеет наибольшую плотность при +4 °С . При охлаждении (или нагревании) воды до этой температуры скорлупа будет всплывать, а при дальнейшем понижении (или повышении) температуры – погружаться.

НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ НА ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

1. $n = 5$. **2.** $\delta = 25\%$. **3.** $s = 80$ см.
4. $u_2 = 5$ м/с. **5.** $F = 320$ Н. **6.** $v_{1\max} = 4$ м/с.
7. $T = 5$ Н.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

Математика

Вариант 1

1. −19. **2.** Корень трехчлена больше.
3. $\pm\sqrt{2\pi k}$, $-1 \pm \sqrt{1+2\pi n}$, $k, n \in \mathbf{Z}$.
4. 36 и 8. С точностью до симметрии возможны три случая расположения точек A, B и C на прямой. Пусть R_1 и R_2 – радиусы первой и второй окружностей соответственно.
1) Точка A лежит между точками B и C. Тогда A находится внутри второй окружности, и не существует прямой, проходящей через A и касающейся второй окружности.
2) Точка B лежит между точками A и C (рис.4). Треугольники BEC и BDE подобны по двум углам, откуда $R_2 = 8$, что невозможно, так как $B_2 = 9$.

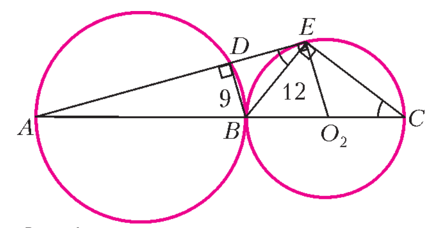

Рис. 4

3) Точка C лежит между точками A и B (рис.5). Треугольники BEC и BDE подобны по двум углам, откуда $R_2 = 8$. Треугольники ADB и AEO_2 также подобны по двум углам, откуда $R_1 = 36$.

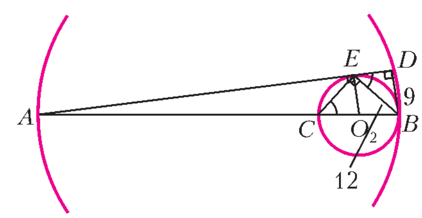

Рис. 5

5. $\frac{3}{5}$. Графики движения велосипедиста и пешехода (в осях время, расстояние) изображены на рисунке 6. Из подобия двух треугольников с параллельными сторонами 9 и 6 получаем

$$\frac{s}{AB - s} = \frac{9}{6},$$

откуда $s = \frac{3}{5}AB$.

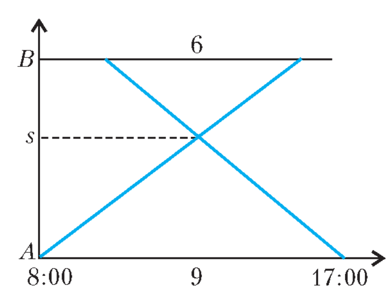

Рис. 6

6. $[0;4]$. Имеем

$$f(x) = \sqrt{4-x} - 2 \le x|x-3| + 4x = g(x),$$

причем функция $f(x)$ определена на луче $(-\infty;4]$ и убывает, а функция

$$g(x) = \begin{cases} 7x - x^2, & x \le 3, \\ x^2 + x, & x \ge 3 \end{cases}$$

определена и возрастает на всей прямой. Поскольку $f(0) = g(0)$, решением исходного неравенства является отрезок $[0;4]$.

7. $(-\infty;-2] \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup \left[0;\frac{1}{2}\right] \cup \{2\}$. *Указание.* Исходное уравнение равносильно такому:

$$\sin^2 x + a\sin x + \left|a - \frac{1}{2}\right| - \frac{3}{2} = 0 .$$

Это уравнение имеет решения, и его положительные решения образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда корни s_1, s_2 квадратного трехчлена $f(s) = s^2 + as + \left|a - \frac{1}{2}\right| - \frac{3}{2}$ удовлетворяют (с точностью до перестановки) одному из следующих условий:

1) $s_1 = 0,\ s_2 \in (-\infty;-1) \cup \{0\} \cup (1;\infty)$;

2) $s_1 = 1,\ s_2 \in (-\infty;-1] \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup [1;\infty)$;

3) $s_1 = -1,\ s_2 \in (-\infty;-1] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [1;\infty)$;

4) $s_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ s_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

В случае 1 получаем $f(0) = 0 \Rightarrow a = 2$ или $a = -1$. Если $a = 2$, то $s_2 = -2$ – подходит. Если $a = -1$, то $s_2 = 1$ – не подходит.

Осталось найти соответствующие этим случаям значения a.

8. 2. По теореме о трех перпендикулярах имеем (рис.7) $\angle ACB = 90°$, откуда $AB = \sqrt{7+5} = 2\sqrt{3}$.

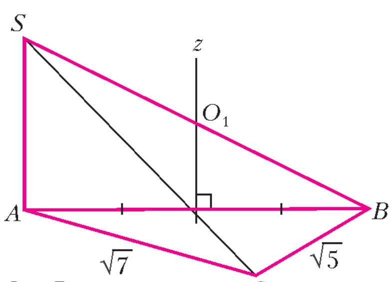

Рис. 7

Точка O_1 равноудалена от точек A, B и C, поэтому она лежит на перпендикуляре z к плоскости ABC, проходящем через середину ребра AB. Прямая z лежит в плоскости SAB, и единственная точка на ней, равноудаленная от точек S и B, – это середина ребра SB. Следовательно, O_1 – середина SB. Все точки O_n, как равноудаленные от точек A, B и C, лежат на прямой z. При этом O_2 не может совпасть с O_1. Поэтому условие задачи выполняется тогда и только тогда, когда центр сферы, описанной около O_2ABC, совпадает с O_1.

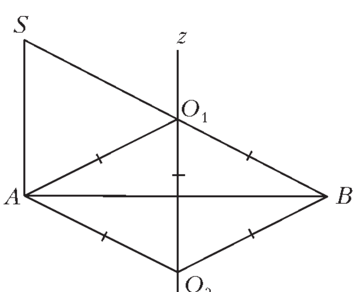

Рис. 8

Таким образом, в плоскости SAB имеем (рис.8)

$$O_1A = O_1O_2 = O_1B, \quad O_2A = O_2O_1 = O_2B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle O_1BA = 30° \Rightarrow SA = AB\,\mathrm{tg}\,30° = 2.$$

9. $(2,117)$, $(3,59)$. В силу взаимной простоты чисел m и n диагональ прямоугольника не проходит через вершины клеток внутри прямоугольника. Поэтому число пересекаемых ею клеток равно 1 плюс число вертикальных и горизонтальных линий, проходящих внутри прямоугольника. Если, скажем, горизонтальный размер прямоугольника – m, а вертикальный – n, то число вертикальных линий, проходящих внутри прямоугольника, равно $m - 1$, а горизонтальных $n - 1$. Таким образом,

$$1 + m - 1 + n - 1 = mn - 116 \Leftrightarrow mn - m - n + 1 = 116 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m-1)(n-1) = 116,$$

откуда пара $(m-1,\ n-1)$ равна либо $(1,116)$, либо $(2,58)$, либо $(4,29)$ ($m < n$ по условию). Следовательно, m и n равны либо 2 и 117, либо 3 и 59, либо 5 и 30, причем последняя пара невозможна в силу взаимной простоты m и n.

10. $\frac{\pi}{4} + \pi k \le x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \le -\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $k, n \in \mathbf{Z}$. *Указание*. Неравенство

$$4(1-t)^{2004} + (1+t)^{2006} \ge 2^{2006},$$

очевидно, выполняется при $t \ge 1$ и при $t \le -1$.

Если $-1 < t < 1$, положим $t = \cos\varphi$, $0 < \varphi < \pi$. Тогда

$$4(1-\cos\varphi)^{2004} + 4(1+\cos\varphi)^{2006} =$$

$$= 4\left(2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{2004} + \left(2\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)^{2006} = 2^{2006}\left(\sin^{4008}\frac{\varphi}{2} + \cos^{4012}\frac{\varphi}{2}\right) <$$

$$< 2^{2006}\left(\sin^2\frac{\varphi}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2}\right) = 2^{2006}$$

(неравенство строгое, поскольку $0 < \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{2}$).

Таким образом, исходное неравенство равносильно неравенству $|\mathrm{tg}\,x| \ge 1$.

Вариант 2

1. 216. *Указание.* Если x – заданное трехзначное число, а y – натуральное число, вычитаемое во втором действии, то

$$\frac{\log_3 x - y}{y}\,\frac{\log_2 x - y}{y} = 1,$$

откуда $y = \log_6 x$, т.е. $x = 6^y$.

2. $(0;\infty)$. *Указание*. Пусть $t = 3^{-x} > 0$. Очевидно, что $0 < t < 1$. После преобразований неравенство приводится к виду $\frac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{t} \ge 0$.

3. 90°. Пусть Π – плоскость, параллельная прямым a и b и проходящая через центры сфер, Π_a и Π_b – параллельные ей плоскости, содержащие прямые a и b соответственно. Плоскости Π_a и Π_b пересекают меньшую сферу, поскольку прямые a и b, касаются этой сферы. Расстояние между прямыми a и b, по условию равное диаметру меньшей сферы, равно также расстоянию между плоскостями Π_a и Π_b. Это означает, что плоскости Π_a и Π_b касаются сферы в диаметрально противоположных точках $A \in a$ и $B \in b$ (рис.9).

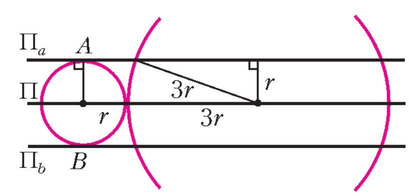

Рис. 9

Поскольку плоскости Π_a и Π_b параллельны плоскости Π и находятся на равном расстоянии от нее, то сечения ими большой сферы – окружности S_a и S_b одинакового радиуса, равного $\sqrt{(3r)^2 - r^2} = 2\sqrt{2}r$. Прямые a и b касаются окружностей S_a и S_b соответственно.

При параллельном переносе плоскости Π_b на вектор $\overline{BA}$ она переходит в плоскость Π_a, а прямая b – в параллельную ей прямую b', проходящую через точку A, касающуюся окружности S_a и не совпадающую с прямой a (рис.10).

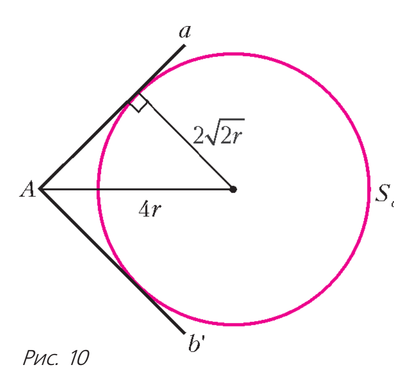

Рис. 10

Угол между прямыми a и b равен углу между прямыми a и b':

$$2\arcsin\frac{2\sqrt{2}r}{4r} = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

4. $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание.*

$$|1 - 2\sin x + \cos x| + 2\sin x + 1 = \cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |1 - 2\sin x + \cos x| = -2\sin^2 x - 2\sin x.$$

Следовательно,

$$-1 \le \sin x \le 0 \Rightarrow 1 - 2\sin x + \cos x \ge 0,$$

и уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1 - 2\sin x + \cos x = -2\sin^2 2x - 2\sin x, \\ 1 - 2\sin x + \cos x \ge 0, \end{cases}$$

решая которую получаем ответ.

5. 60°, $\dfrac{405\sqrt{3}}{16}$. Проведем через точку A прямую, параллельную стороне LM (рис.11). Эта прямая пересекает окружность в точке C. Дуги AB и BC равны, поэтому угол BKC равен углу BKA, а значит, и углу BKM (KB – биссектриса). Следовательно, точка C лежит на стороне KM.

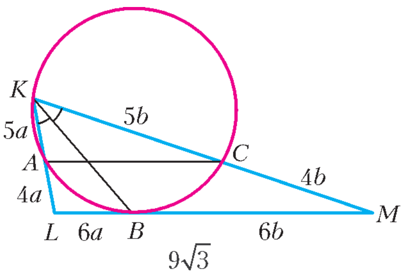

Рис. 11

По теореме о касательной и секущей, $LB^2 = LA \cdot LK \Rightarrow 6a^2 = LA(LA + 5a) \Rightarrow LA = 4a$. Отсюда $LK = 9a$,

$AC = \dfrac{AK}{LK} \cdot LM = \dfrac{5a}{9a} 9\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$, и $\sin\angle K = \dfrac{AC}{2R} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2 \cdot 5} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

т.е. $\angle K$ может равняться либо 60°, либо 120°.

Если бы угол K равнялся 120°, то дуга AB равнялась бы 120° и центр окружности находился бы между прямыми AC и LM. Тогда расстояние от прямой AC до точки K было бы меньше, чем до прямой LM, а у нас эти расстояния относятся как 5:4. Следовательно, $\angle K = 60^\circ$.

По теореме Фалеса имеем $KC = 5b$, $CM = 4b$, откуда по теореме о квадрате касательной получаем $BM = 6b$.

Запишем теорему косинусов для треугольника KLM:

$$(9a)^2 + (9b)^2 - 2 \cdot 9a \cdot 9b \cdot \cos 60^\circ = (6a + 6b)^2.$$

Поскольку $6a + 6b = LM = 9\sqrt{3}$, получим, что $81ab = \dfrac{405}{4}$, а

$$S_{KLM} = \frac{1}{2} 9a \cdot 9b \sin 60^\circ = \frac{405\sqrt{3}}{16}.$$

6. $\dfrac{1}{3}$. *Указание*. При фиксированном x выражение

$$|2x - y - 1| + |x + y| + |y| = |y - (2x - 1)| + |y - (-x)| + |y - 0|$$

принимает минимальное значение $m(x)$ при y, равном среднему из трех чисел $2x - 1$, $-x$, 0, при этом само $m(x)$ равно разности максимального и минимального из этих трех чисел. В свою очередь, эта разность минимальна при $x = 1/3$.

Вариант 3

1. (3; 1).

2. $(-\infty; 10) \cup \{11\} \cup (14; +\infty)$. *Указание.* Для всех значений переменных из области определения правая часть неравенства отрицательна.

3. 90°, 60°. *Указание*. Положим $BC = x$, $AB = y$, $AC = z$. Тогда по условию $AM = \dfrac{\sqrt{13}}{2}x$, $z \ge y$ (в треугольнике против большего угла лежит большая сторона).

По формуле для медианы треугольника имеем $2(y^2 + z^2) = x^2 + 13x^2$, а из теоремы косинусов следует $x^2 = y^2 + z^2 - \sqrt{3}yz$. Отсюда $z = 2x$, $y = \sqrt{3}x$ и $x^2 + y^2 = z^2$.

4. $\left(\operatorname{arctg}\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. *Указание.* Выполните замену $t = \operatorname{tg} x \ge \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

5. $AD{:}BC = 2{:}1$. Определим положение точки L, в которой плоскость ABK пересекает ребро SD пирамиды $SABCD$. Для этого продолжим боковые стороны AB и CD основания пирамиды – трапеции $ABCD$ – до пересечения их в некоторой точке P (рис.12). Эта точка принадлежит плоскостям ASB, ABC и CSD, следовательно, точка L лежит на прямой PK.

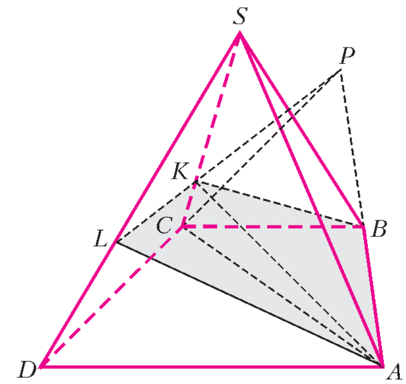

Рис. 12

Обозначим длины оснований AD и BC трапеции $ABCD$ через a и b соответственно; пусть при этом $a : b = k$. Треугольники APD и BPC подобны, следовательно, $DP : PC = AD : BC = k$.

Применим теорему Менелая к треугольнику CSD и прямой KL, пересекающей стороны CS и DS и продолжение стороны CD этого треугольника, используя условие задачи:

$\dfrac{SL}{LD} \cdot \dfrac{DP}{PC} \cdot \dfrac{CK}{KS} = 1$, стало быть, $\dfrac{SL}{LD} = \dfrac{5}{2k}$.

Отсюда $\dfrac{SD}{SL} = 1 + \dfrac{LD}{SL} = \dfrac{5 + 2k}{5}$.

Рассмотрим далее две пары треугольных пирамид: $SABK$, $SABC$ и $SAKL$, $SACD$. Обозначим их объемы через v_1, V_1 и v_2, V_2 соответственно. Воспользуемся теперь тем, что отношение объемов двух тетраэдров с равными трехгранными углами при вершине равно отношению произведений длин ребер, выходящих из этой вершины:

$$\frac{v_1}{V_1} = \frac{SA \cdot SB \cdot SK}{SA \cdot SB \cdot SC} = \frac{SK}{SC} = \frac{5}{7},$$

$$\frac{v_2}{V_2} = \frac{SA \cdot SK \cdot SL}{SA \cdot SC \cdot SD} = \frac{SK \cdot SL}{SC \cdot SD} = \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{5 + 2k}.$$

Следовательно,

$$\frac{V_{SABKL}}{V_{SABCD}} = \frac{v_1 + v_2}{V_1 + V_2} = \frac{5}{7} \cdot \frac{V_1 + \frac{5}{5+2k}V_2}{V_1 + V_2}.$$

Кроме того,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{AD}{BC} = k.$$

Таким образом,

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{1 + \frac{5}{5+2k}k}{1 + k} = \frac{95}{189} \Leftrightarrow 19k^2 - 28k - 20 = 0.$$

Найденное квадратное уравнение имеет единственный положительный корень: $k = 2$.

6. $a = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание*. После замены $t = |\sin(x + a)|$, $y = \cos 2x$, где $0 \le t \le 1$, $|y| \le 1$, данное уравнение принимает вид

$$f(y) \equiv ty^2 - 2t(t - 1)y - 2t^2 + t + 1 = 0.$$

Значение $t = 0$, очевидно, следует исключить. При $0 < t \le 1$ вычислим дискриминант квадратного уравнения относительно y:

$$\frac{D}{4} = t^4 - t.$$

Условие $D \ge 0$ дает единственное возможное значение $t = 1$. Но тогда $y = 0$, и мы приходим к системе

$$|\sin(2x + a)| = 1, \; \cos 2x = 0.$$

Вариант 4

1. 14^{00}.

2. $\left\{-\frac{11\pi}{6};\frac{\pi}{6};2\pi;\frac{13\pi}{6}\right\}$. *Указание.* Из требований, предъявляемых к основанию логарифма, вытекают ограничения
$-6<x<7$, $x\neq 0$, $x\neq 1$.
При этих условиях данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\cos x>0,\\ \sin 2x-2\sin x+1=\cos x.\end{cases}$$

3. $[3;6)\cup\left(6;\frac{133}{2}-11\sqrt{6}\right)$. *Указание.* После замены $t=\sqrt{2x-6}$, где $t\geq 0$, данное неравенство принимает вид
$11\sqrt{t^2-2\sqrt{6}t+6}>t^2-6 \Leftrightarrow 11\left|t-\sqrt{6}\right|>\left(t-\sqrt{6}\right)\left(t+\sqrt{6}\right)$.

4. 672. Пусть K, L и M – точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника ABC, а N – проекция центра этой окружности O на прямую AD (рис.13). Тогда $OL=OK=6$. Поскольку прямые BC и AD параллельны, то LN – их общий перпендикуляр, $LN=OL+ON=14$.

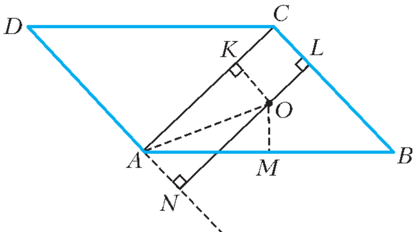

Рис. 13

Из прямоугольного треугольника AOK следует $AK=8$.
Используя попарные равенства отрезков касательных, имеем для полупериметра p треугольника ABC равенство $p=BC+AK=BC+8$.
Различные выражения площади треугольника ABC дают уравнение

$$\frac{1}{2}\cdot BC\cdot LN=p\cdot OK\text{, т.е. } 7BC=6p.$$

Из полученных соотношений находим $BC=48$, а затем и площадь параллелограмма $ABCD$.

5. $\left(\frac{3d+8}{6};\frac{3d}{2}\right)$, $d\in \boldsymbol{R}$. *Указание.* Разложив на множители подкоренные выражения в первом и третьем слагаемых, заметим, что после замены $\alpha=x-y+d\geq 0$, $\beta=4-2x+d\geq 0$, $\gamma=x+y-2d\geq 0$ уравнение приводится к виду

$$\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\alpha\gamma}+\sqrt{\beta\gamma}=4.$$

Из неравенства $\sqrt{uv}\leq\frac{u+v}{2}$ при $u\geq 0$ и $v\geq 0$, равенство в котором возможно лишь при $u=v$, следует, что

$$\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\alpha\gamma}+\sqrt{\beta\gamma}\leq\alpha+\beta+\gamma=4.$$

Отсюда $\alpha=\beta=\gamma=\frac{4}{3}$. Теперь легко находятся x и y.

6. 7. Пусть O_1 и O_2 — центры первой и второй сфер соответственно, а r и R — их радиусы, D – точка касания второй сферы с той гранью двугранного угла, в которой лежит точка A_1, а величина двугранного угла равна 2α.
Проведем сечение через точки O_1, O_2, A и D (рис.14, где для определенности $R>r$). Пусть также O_3 – проекция точки O_1 на прямую O_2D. Тогда

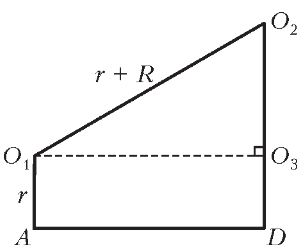

Рис. 14

$$O_1O_2=r+R,\ O_2O_3=|r-R|,$$
$$AD=O_1O_3=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=2\sqrt{rR}.$$

Аналогично получаем $BC=2\sqrt{rR}$.
Рассмотрим плоскость, проходящую через точки O_1, A и B (рис.15) и пересекающую ребро двугранного угла в точке E.
Очевидно, что
$O_1A=O_1B=r$,
$\angle AEO_1=\angle BEO_1=\alpha$,
$O_1A\perp AE$, $O_1B\perp BE$,
$AB\perp EO_1$. Следовательно, $\angle ABO_1=\angle BAO_1=\alpha$, тогда из треугольника ABO_1 находим $AB=2r\cos\alpha$.
Аналогично рассмотрим плоскость, проходящую через точки O_2, C и D, и получим $CD=2R\cos\alpha$.

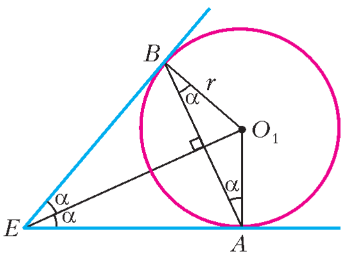

Рис. 15

Плоскости, содержащие точки O_1, A, B и O_2, C, D соответственно, перпендикулярны ребру двугранного угла, а значит, параллельны. Заметим, что пары точек A и B, C и D симметричны относительно плоскости, проходящей через точки E, O_1 и O_2 (биссектральной плоскости двугранного угла), поэтому лежат в одной плоскости. Отсюда следует, что $AB\parallel CD$, стало быть, $ABCD$ – равнобокая трапеция (рис.16). Для высоты h этой трапеции имеем равенство

$$h^2=AD^2-\left(\frac{AB-CD}{2}\right)^2.$$

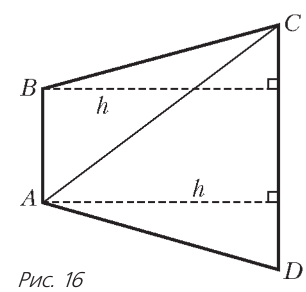

Рис. 16

Следовательно,

$$AC^2=h^2+\left(\frac{AB+CD}{2}\right)^2=4rR\left(1+\cos^2\alpha\right).$$

Из свойств касательных и секущих следует $AL\cdot AC=AD^2$. Точно так же $CK\cdot AC=CB^2$. Тогда из равенства $AD=CB$ получаем $AL=CK$, значит, $AK=CL$. Далее,

$$KL=AL+CK-AC=\frac{2AD^2}{AC}-AC=\frac{8rR}{AC}-AC,$$

т.е.

$$\frac{KL}{AC}=\frac{8rR}{AC^2}-1=\frac{2}{1+\cos^2\alpha}-1.$$

Поэтому, используя условие задачи, имеем

$$\frac{1-\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}=\frac{1}{7}\text{, откуда } \cos^2\alpha=\frac{3}{4}.$$

Так как $CB^2=4rR=28$, окончательно находим

$$AC^2=4rR\left(1+\cos^2\alpha\right)=49\text{, т.е. } AC=7.$$

Вариант 5

1. πn, $n\in\boldsymbol{Z}$. **2.** $1/2$.

3. $\{3\}\cup\left[-4-\sqrt{29};-2\right]\cup\left[1;-4+\sqrt{29}\right]$.

4. 14. *Указание.* Площадь треугольника KMN равна 9, а его высота 3.

5. $\left(\frac{8}{9};\frac{5-\sqrt{7}}{3}\right)$; $\left(\frac{8}{9};\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right)$.

6. 4. Центры всех окружностей, касающихся сторон PQ и RS, лежат на одной прямой – биссектрисе угла, образованного продолжениями этих сторон (рис. 17). Заметим, что при условии $PQ\neq RS$ окружности не касаются друг друга.
Пусть r, x и R – радиусы наименьшей, средней и наибольшей

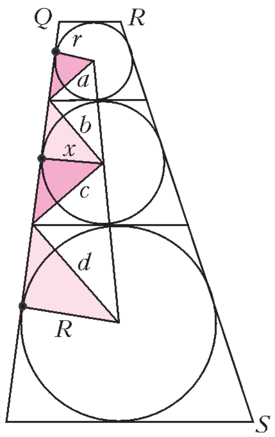

Рис. 17

окружностей соответственно. Биссектрисы смежных углов при параллельных прямых и боковой стороне PQ образуют с линией центров окружностей два прямоугольных треугольника с катетами a, b и c, d, причем острые углы в этих треугольниках равны.

Радиусы окружностей, перпендикулярные стороне PQ, образуют с отрезками a, b, c, d еще две пары прямоугольных треугольников с катетами r, x, R и гипотенузами a, b, c, d.

Треугольники с катетами a, b и c, d подобны. Следовательно, есть еще две пары подобных треугольников со сторонами r, a, x, c и x, b, R, d соответственно. Тогда

$$\frac{r}{x}=\frac{a}{c} \text{ и } \frac{b}{d}=\frac{x}{R} \Rightarrow x^2=Rr \Rightarrow \left(\frac{x}{r}\right)^2=\frac{R}{r}.$$

По условию $\frac{x}{r}=2 \Rightarrow \frac{R}{r}=4$.

7. $a \in \left(0;\, 2-\sqrt{3}\right) \cup \left(2+\sqrt{3};\, +\infty\right)$. *Указание.* Поскольку $x>0$, $a>0$, $a \neq 1$, после преобразований получаем

$$\begin{cases} \left((x-1)^2-ax\right)(x+2)=0, \\ a>0,\ a\neq 1,\ x>0. \end{cases}$$

Квадратное уравнение $x^2-(a+2)x+1=0$ имеет 2 положительных различных корня x_1 и x_2, а $x+2 \neq 0$. При этом $x_1^2+x_2^2=a^2+4a+2$. Осталось решить неравенство

$$a^2+4a+2>8a+1$$

при $a>0$, $a \neq 1$.

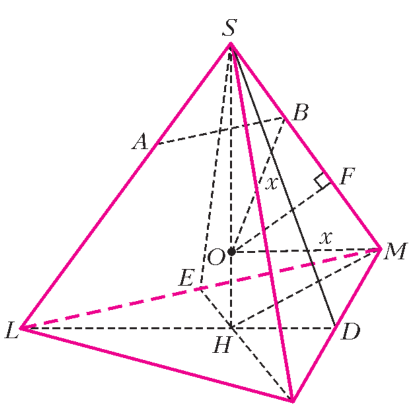

Рис. 18

8. $4\sqrt{13}$. Центр O сферы, проходящей через точки A, B, K и M, равноудален от всех этих точек (рис.18). Следовательно,точка O лежит на высоте SH пирамиды. Остается определить точку O так, чтобы было $OB=OM$. В такой точке высоту SH пересекает плоскость, перпендикулярная к отрезку BM и проходящая через его середину. Она пересекает треугольник SHM по отрезку OF (F – середина отрезка BM, $OF \perp SM$).

Пусть $OB=OM=x$. Тогда $OF=\sqrt{x^2-16}$,

$$SH=\sqrt{SM^2-MH^2}=\sqrt{12^2-\left(6\sqrt{3}\right)^2}=6.$$

Из подобия ΔSFO и ΔSHM имеем

$$\frac{OF}{SF}=\frac{MH}{SH} \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2-16}}{8}=\frac{6\sqrt{3}}{6} \Rightarrow x=4\sqrt{13}.$$

Вариант 6

1. $[-1;\,1]$. **2.** $\left(-\frac{13}{4};\,-3\right)$.

3. $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\frac{\pi}{8}\pm\frac{5\pi}{12}+\pi n$, $k,n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Приведите уравнение к виду

$$\cos x\left(2\cos 2x+2\sin 2x+\sqrt{6}\right)=0.$$

4. $\frac{9}{2}$. *Указание.* Докажите, что четырехугольник $EFGH$ – прямоугольник (рис. 19). Точка E равноудалена от сторон CD и BC (так как лежит на биссектрисе CE), а значит, $EG \parallel AB$. Но $CK \parallel AF$, поэтому $AKEG$ – параллелограмм и

$$EF^2+FG^2+GH^2+EH^2=2EG^2=\frac{9}{2}.$$

5. 24:49.

6. $4-\sqrt{7}<a<4+\sqrt{7}$. *Указание.* Подкоренное выражение есть квадрат положительного числа $x^2+3|x|+1$. Поэтому уравнение преобразуется к виду

$$x^2+3ax+a^2+a=0,$$

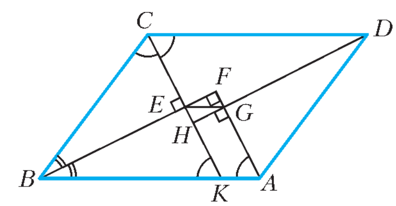

Рис. 19

причем его левая часть представляет собой квадратный трехчлен $f(x)$ с положительным старшим коэффициентом. Он имеет корни, лежащие по разные стороны от числа –3, тогда и только тогда, когда $f(-3)<0$.

Вариант 7

1. $\{-1\} \cup [1;\,+\infty)$. **2.** $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. $\frac{\sqrt{385}}{4\sqrt{6}}$. *Указание.* Пользуясь теоремой косинусов для треугольников ABC и ADC, найдите $\cos\angle D$, а затем и радиус круга по формуле $R=\frac{BD}{2\sin\angle D}$.

4. $\left(\sqrt{17}-7\right)/8$. *Указание.* Приведите уравнение к виду $f\left(2\arcsin(2x+1)\right)=f\left(\arccos(6x+3)\right)$, где $f(t)=3^t+\log_3 t$ – возрастающая функция. Поэтому исходное уравнение равносильно уравнению $2\arcsin(2x+1)=\arccos(6x+3)$, которое, в свою очередь, равносильно системе

$$\begin{cases} \cos 2\left(\arcsin(2x+1)\right)=6x+3, \\ 0 \le 2\arcsin(2x+1) \le \pi. \end{cases}$$

5. 7. Пусть скорость плота и реки равна 1 (км/ед. времени), тогда скорости лодки и катера относительно плота равны 1 и 2 соответственно (рис.20). Первая встреча катера с плотом происходит в момент 1, когда лодка находится на расстоянии 1 км от них. В момент 2 катер догоняет лодку, оказываясь на расстоянии 2 км от плота, а в момент 3 снова встречается с плотом. Из подобия треугольников ABC и ADE, а также ACD и AEF получаем, что третья встреча катера с плотом происходит в момент 9. Далее, аналогично, катер встречает плот в моменты 27, 81, 243, 729, 2187, … При этом к моменту седьмой встречи плот проплывает 729 < 1000 км, а к моменту восьмой – должен был бы проплыть 2187 > 1000 км.

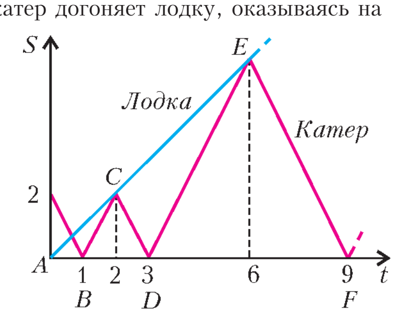

Рис. 20

6. $360-171\sqrt{3}$. *Указание.* Из подобия прямоугольных треугольников $AA'C'$, AEH, $FA'H$ и GAH (рис.21) имеем

$$AH=5\sqrt{3}>8=AA',\quad AG=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}}>4\sqrt{2}=AO,$$

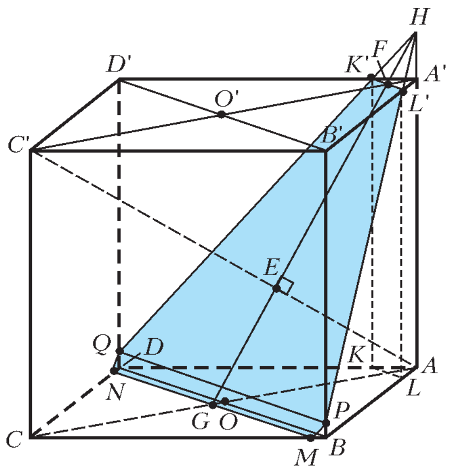

Рис. 21

$A'F = \dfrac{5\sqrt{3}-8}{\sqrt{2}} < 4\sqrt{2} = A'O'$, $CG = 8\sqrt{2} - \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Поэтому искомое сечение есть шестиугольник $K'L'PMNQ$, а плоскость сечения образует с плоскостью ABC угол α, причем $\cos\alpha = \dfrac{AG}{GH}$. Проекция сечения на плоскость ABC есть шестиугольник $KLBMND$, площадь которого равна площади квадрата $ABCD$ без треугольников CMN и AKL (или $A'K'L'$).

Вариант 8

1. $\dfrac{7+24\sqrt{3}}{50}$. **2.** 0; 2.

3. $\left[0; \dfrac{1}{9}\right) \cup [1; \infty)$. *Указание.* Прологарифмируйте неравенство по основанию 2.

4. Через 28 минут. **5.** $\dfrac{180\pi}{180+\pi}$. **6.** 6.

7. $(-4; -1)$. *Указание.* Первое уравнение системы задает окружность $\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + (y+3)^2 = \dfrac{45}{4}$, а второе – прямую $y = -a(x+b)$, проходящую через точку $(-b; 0)$, не лежащую на одной горизонтали с центром $\left(\dfrac{5}{4}; -3\right)$ окружности. Следовательно, для того чтобы при любом значении углового коэффициента a такая прямая пересекала данную окружность ровно в двух различных точках, необходимо и достаточно, чтобы точка $(-b; 0)$ лежала внутри окружности, т.е. выполнялось неравенство $\left(-b - \dfrac{5}{4}\right)^2 + (0+3)^2 < \dfrac{45}{4}$.

Вариант 9

1. $\dfrac{1}{2}$.

2. 2. *Указание*. Пусть $\sqrt{y} = u$, $\sqrt{z} = v$. По свойству арифметической прогрессии имеем

$$\begin{cases} 2u = 1 + v, \\ 2\left(u^2 - 1\right) = 1 + \left(v^2 - u^2\right). \end{cases}$$

3. $\pi + 2\pi n$, $\dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$.

4. а) 40 км, б) 80 км/ч и 60 км/ч.

5. $AB = \dfrac{89}{6}$, $CD = \dfrac{23}{3}$.

6. $c < -\pi$, $c \ge \pi$. *Указание*. Уравнение

$$2x \arcsin(\sin x) = c \cdot 3^{\log_3 x} + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases}$$

где $g(x) = c + \dfrac{3}{x}$ – убывает от ∞ до c при $x > 0$, а

$$f(x) = 2\arcsin\sin x = \begin{cases} 2x, & x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right], \\ 2(\pi - x), & x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$$

– 2π-периодическая функция (рис.22):

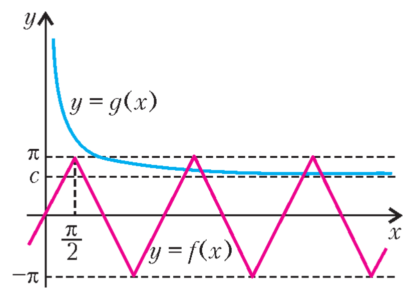

Рис. 22

1) в случае $c \ge \pi$ не имеет корней, так как $g(x) > c \ge \pi \ge f(x)$;
2) в случае $c < -\pi$ не имеет корней на луче $x > x_0$, где $g(x_0) = -\pi$, так как при $x > x_0$ справедливы оценки $g(x) < g(x_0) = -\pi \le f(x)$, а на промежутке $0 < x \le x_0$ имеет конечное множество корней, так как на каждом отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более двух корней;
3) в случае $-\pi \le c < \pi$ имеет бесконечно много корней, так как при каждом целом достаточно большом n на любом отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$ есть хотя бы один корень.

Вариант 10

1. $[-4; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$. **2.** $\{0\} \cup \left[2; \dfrac{12}{5}\right]$.

3. $5 \Big/ \left(2\sin\dfrac{2\pi}{5}\right)$. *Указание.* Пусть O_1 и O_2 – центры описанных окружностей из условия задачи. Докажите, что треугольник O_1DO_2 прямоугольный, а $\angle O_1O_2D = \angle ABC$.

4. $(-3; -2) \cup [1; 2]$. **5.** $10/3$ л. **6.** $\dfrac{11\pi}{30}$.

7. $\dfrac{120}{19}$.

8. -5; -4. *Указание.* Наибольшее значение квадратичной функции из условия задачи на отрезке достигается в одном из концов этого отрезка.

Вариант 11

1. $(-\infty; -1] \cup [1; 2) \cup (2; \infty)$.

2. $4\sqrt{3}$ и $4\sqrt{3}$ (одна из трех хорд); $2\sqrt{3}$ и $6\sqrt{3}$ (две другие хорды). *Указание*. Пусть P и Q – центры большей и меньшей окружностей соответственно. Поскольку число хорд одинаковой длины нечетно, одна из этих хорд должна быть перпендикулярна прямой PQ, а две другие симметричны относительно этой прямой (рис.23).

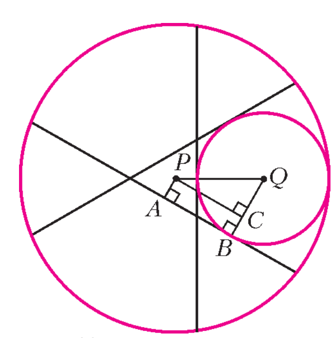

Рис. 23

3. $\left(1, -\dfrac{3}{2}, -3\right)$, $\left(-1, \dfrac{3}{2}, 3\right)$.

Указание. Левая часть уравнения неотрицательна, а правая – неположительна. Поэтому они по отдельности равны нулю.

4. 525. **5.** $\dfrac{9+3\sqrt{2}}{2}$.

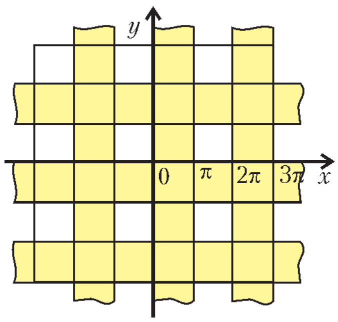

Рис. 24

6. $3\pi^2k^2$. *Указание.* Решением неравенства $\sin x \ge 0$ на плоскости Oxy является множество полос

$2\pi m \le x \le \pi + 2\pi m$, $m = \boldsymbol{Z}$,

а неравенства $\sin y \le 0$ – множество полос

$-\pi + 2\pi n \le y \le 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Изобразим эти полосы на плоскости и заштрихуем их (рис.24). Каждый квадрат

$-\pi k \le x \le \pi k$, $-\pi k \le y \le \pi k$

имеет площадь $4\pi^2k^2$ и разбивается на квадраты со стороной 2π, в каждом из которых заштриховано $\frac{3}{4}$ от его площади.

Вариант 12

1. $-\frac{1}{2};1$. **2.** $\left(\frac{1}{2};1\right)\cup\left(6;\frac{13}{2}\right)$.

3. $\left\{\frac{13\pi}{5}\right\}$. *Указание.* Приведите уравнение к виду

$\sin x = \sin\frac{2\pi}{5}$.

4. 24 трактора в первой бригаде и 45 – во второй. **5.** $\sqrt{2}$.

6. $a \in \left[-1;\frac{1}{4}\right]\cup[1;+\infty)$.

7. $2\pi + 8$. *Указание.* Данная фигура изображена на рисунке 25. Ее верхняя часть — полукруг, а нижняя ограничена графиком функции $f(x)$, состоящим из участков парабол. На

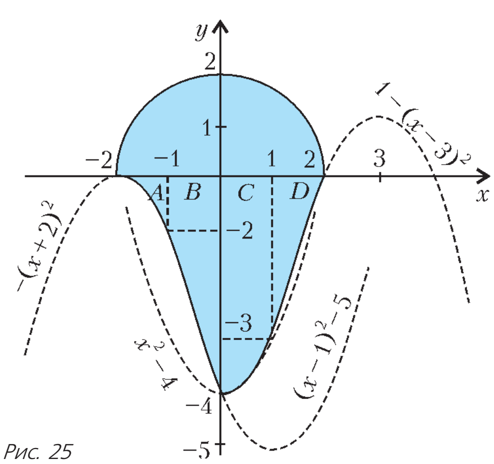

Рис. 25

каждом отрезке график функции $y = f(x)$ получается из графика параболы $y = x^2$ движением вдоль осей и отражением. Поэтому фигура D дополняет B до прямоугольника со сторонами 1 и 4. Аналогично, фигура A дополняет C до прямоугольника со сторонами 1 и 4.

Вариант 13

1. 6. **2.** $[3;11]$. **3.** πm, $m \in \boldsymbol{Z}$. **4.** 20%.

5. $\{(0;0);(2;0);(1;1)\}$. *Указание.* Из данной системы следует, что $-1 < y < 2$, так что возможны лишь $y = 0$ и $y = 1$.

6. 30.

7. При $b < 1$ $x \in \left\{-\frac{1}{3}\right\}\cup[1;+\infty)$;

при $b = 1$ $x \in \left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$;

при $b > 1$ $x \in \left[-\frac{1}{3};1\right)$.

Указание. Преобразуйте исходное неравенство к виду

$$2(b-1)\sqrt{3x+1} \ge (b-1)(3x+1).$$

Вариант 14

1. 0. **2.** $[3;\infty)$. **3.** $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\pm\operatorname{arctg}2+\pi n$, $k,n \in \boldsymbol{Z}$.

4. 2. *Указание.* Докажите подобие треугольников ADC и ABE, а также BEF и CDE.

5. $(0;-a)\cup(-a;\infty)$ при $a < 0$, $(-\infty;-3a)\cup\left(-\frac{a}{3};0\right)$ при $a > 0$, решений нет при $a = 0$.

6. $\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Преобразуйте уравнение к виду

$$9(\cos x - \cos 3x)^2 - 35\sqrt{3}(\cos x - \cos 3x) + 72 = 0,$$

откуда либо $\cos x - \cos 3x = 3\sqrt{3}$, либо $\cos x - \cos 3x = \frac{8\sqrt{3}}{9}$. Первое уравнение корней не имеет. Исследуем значения выражения $\cos x - \cos 3x = 4\left(\cos x - \cos^3 x\right)$. Рассмотрим функцию $f(t) = t - t^3$ при $t \in [-1;1]$. Имеем

$$f'(t) = 1 - 3t^2 = 0 \text{ при } |t| = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Поскольку $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$, $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$ и $f(\pm 1) = 0$, то множество значений функции f есть отрезок $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{9};\frac{2\sqrt{3}}{9}\right]$. Таким образом, $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ – наибольшее значение выражения $\cos x - \cos 3x$, которое достигается лишь при $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Вариант 15

1. $\{-5\}\cup(2;3)$.

2. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{2}\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}+\pi n,\ k,n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Данное уравнение приводится к виду

$4\cos 4x\cos 2x + 3\cos 4x + 4\cos 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\cos 4x + 1)(4\cos 2x + 3) = 0$.

3. $\left(-\frac{3}{2};0\right)\cup\left(\frac{9}{2};\frac{27}{2}\right]$. **4.** $\frac{7\sqrt{13}}{10}$.

5. $\left\{-1;\frac{1}{2}\right\}$. *Указание.* После замены $t = 3^{4x^2+2x-1}$, где $t > 0$, получаем уравнение $9t^2 - 26t - 3 = 0$.

6. $\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right)\cup\left(-\frac{1}{12};0\right)$. **7.** 25.

Вариант 16

1. 17 роз. **2.** $\pm\sqrt{\frac{7}{2}}$. **3.** $\pi - 2$.

4. $1\pm\frac{\pi}{2}\mp 2\pi k, \frac{1}{3}\pm\frac{\pi}{6}\mp\frac{2\pi n}{3},\ k,n \in \boldsymbol{N}$.

5. $29\frac{2}{3}$%, $24\frac{2}{3}$%, $18\frac{2}{3}$%, $11\frac{2}{3}$%. **6.** $a \in (-\infty;-35]$. **7.** 7 суток.

Вариант 17

1. $(-\infty;0]$. **2.** $\frac{100}{49}$. **3.** $(3;+\infty)$.

4. $-\pi + 4\pi n < x < 4\pi n$, $4\pi n < x < \pi + 4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

5. $3\sqrt{\frac{3}{2}}$. **6.** $\frac{8\pi}{3}$. **7.** $\left[\frac{17-\sqrt{29}}{2};9\right)$.

8. $x_* > k_*$. *Указание*. Левая часть уравнения

$$\left(k^2-1\right)^8 = \frac{1}{2(k-1)}$$

неотрицательна, $k \neq 1$, следовательно, $k > 1$. При этих значениях переменной исходное уравнение равносильно уравнению

$$2\left(k^2-1\right)^8(k-1)-1=0 .$$

Заметим, что его левая часть монотонно возрастает при $k > 1$. Значит, это уравнение имеет единственный корень k_*. Осталось подставить x_* в левую часть уравнения и убедиться, что получаемое выражение больше нуля.

Физика

Физический факультет

1. Поскольку нить нерастяжима, проекции скоростей всех точек нити на направление нити одинаковыми. Следовательно, при движении точки A нити вертикально вверх со скоростью v относительно плоскости, по которой движутся катушки, когда отрезок нити слева от этой точки образует с вертикалью угол α, как показано на рисунке 26, проекции скоростей точек отрезка нити AB на его направление равны $v\cos\alpha = v_{A\parallel} = v_{B\parallel}$. Если обозначить через v_0 скорость движения оси левой катушки относительно горизонтальной плоскости, а через ω – угловую скорость вращения этой катушки относительно ее оси и учесть, что катушка не скользит по горизонтальной плоскости, то можно записать $v_0 = \omega R$, где $R = nr$ – радиус щеки катушки.

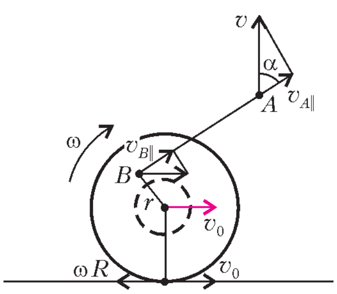

Рис. 26

По условию задачи, нить не скользит по катушке, а потому проекции скоростей точки B катушки и точки B нити на направление нити равны, т.е. $v_{B\parallel} = \omega r + v_0\sin\alpha$. Следовательно, ось левой катушки относительно горизонтальной плоскости движется со скоростью

$$v_0 = \frac{v\cos\alpha}{\frac{1}{n}+\sin\alpha} .$$

Поскольку скорость оси правой катушки относительно той же плоскости из соображений симметрии равна по модулю, но направлена противоположно скорости движения оси левой катушки, искомый модуль скорости сближения катушек равен

$$v_{\text{сбл}} = 2v_0 = \frac{2v\cos\alpha}{\frac{1}{n}+\sin\alpha} = \frac{2v}{1+\sqrt{3}} .$$

2. При решении задачи следует считать, что между ударами о полусферу на шарик действует только сила тяжести. Поскольку при упругом ударе угол падения равен углу отражения (докажите это самостоятельно), то прямая AB лежит в вертикальной плоскости, проходящей через центр O полусферы. Пусть, как это показано на рисунке 27, радиусы OA и OB образуют с горизонтом углы β.

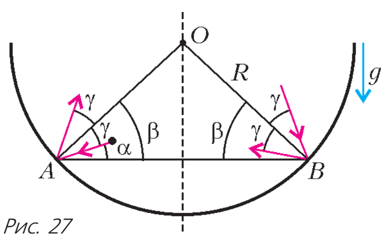

Рис. 27

Тогда углы падения и отражения равны $\gamma = \beta - \alpha$. Из закона сохранения энергии следует, что модуль v скорости шарика при падении и отражении в точках A и B один и тот же, при этом

$$AB = 2R\cos\beta = 2vt_1\cos(\beta-\gamma) = 2vt_2\cos(\beta+\gamma) ,$$

$$gt_1 = v\sin(\beta-\gamma) ,\ gt_2 = v\sin(\beta+\gamma) .$$

Из этих соотношений следует, что $\sin 2(\beta-\gamma) = \sin 2(\beta+\gamma)$. Поскольку $\beta > \gamma$ и $\beta+\gamma < \frac{\pi}{2}$, решение предыдущего уравнения имеет вид $\pi - 2(\beta-\gamma) = 2(\beta+\gamma)$, т.е. $\beta = \frac{\pi}{4}$, а потому $2R\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}R$. Отсюда $\sqrt{2}Rg = v^2\sin 2(\beta-\gamma) = v^2\sin 2\alpha$. Таким образом, модуль искомой скорости равен

$$v = \sqrt{\frac{\sqrt{2}Rg}{\sin 2\alpha}} = \sqrt{2\sqrt{2}Rg} .$$

3. Поскольку нить нерастяжима, к тому моменту, когда легкий груз достигнет верхней точки своей траектории, поднявшись на высоту, равную радиусу цилиндра R, тяжелый груз опустится на высоту $\pi R/2$ и грузы будут двигаться с одинаковыми по модулям скоростями. Согласно закону сохранения механической энергии, модуль v указанной скорости должен удовлетворять соотношению

$$\left(\frac{1}{2}\pi M - m\right)Rg = \frac{1}{2}(m+M)v^2 .$$

В момент отрыва легкий груз движется по дуге окружности радиусом R в горизонтальном направлении, а потому его центростремительное ускорение, равное v^2/R, обеспечивается только действием силы тяжести, т.е. имеет место равенство $mv^2/R = mg$. Подставляя сюда значение скорости из предыдущего соотношения, находим искомое отношение масс грузов:

$$n = \frac{M}{m} = \frac{3}{\pi-1} .$$

4. Будем считать, что верхний конец пружины неподвижен. Поскольку после отрезания действующая на оставшуюся часть веревки сила тяжести уменьшается на величину nMg и скорость этой части веревки сразу после отрезания равна нулю, амплитуда A колебаний любой точки оставшейся части веревки равна $A = \frac{nMg}{k}$, а циклическая частота колебаний составляет $\omega = \sqrt{\frac{k}{(1-n)M}}$.

Как известно, при гармонических колебаний точки с амплитудой A и циклической частотой ω амплитуда ее ускорения равна $A\omega^2$. Поскольку направленное вертикально вниз ускорение любой точки оставшейся части веревки по модулю не может превышать g, должно иметь место соотношение

$$A\omega^2 \le g .$$

Подставляя сюда выражения для амплитуды и циклической частоты колебаний, находим, что $n = 0{,}5$.

5. Поскольку нагревание осуществляется медленно и поршень сразу начинает подниматься, можно пренебречь изменением кинетической энергии поршня при нагревании. Действующая на поршень со стороны гелия сила направлена перпендикулярно плоскости поршня и по модулю равна

$$F_{\text{г}} = F + Mg + p_0 S .$$

Следовательно, при подъеме поршня на высоту Δh гелий совершит над ним работу

$$A = F_{\text{г}}\Delta h .$$

Считая, что уравнение состояния гелия в интересующем диапазоне изменения его параметров совпадает с уравнением

Клапейрона–Менделеева, запишем

$$F_{\text{т}}\Delta h = R\Delta T ,$$

где R – универсальная газовая постоянная, а ΔT – увеличение температуры гелия при смещении поршня вверх на Δh. При изменении температуры гелия изменяется его внутренняя энергия. Как известно, гелий является одноатомным газом. Поэтому его внутренняя энергия в расчете на один моль в модели идеального газа равна $(3/2)RT$. Следовательно, при увеличении температуры гелия на ΔT он, согласно первому закону термодинамики, должен получить количество теплоты

$$Q = \frac{3}{2}R\Delta T + A .$$

По условию задачи теплообменом системы «цилиндр–поршень–газ» с внешней средой и теплоемкостью цилиндра с поршнем следует пренебречь. Поэтому общее количество теплоты, полученное системой, равно

$$Q = \Delta q + F\Delta h ,$$

где Δq – количество теплоты, отданное спиралью, а $F\Delta h$ – количество теплоты, выделившееся в системе за счет трения поршня о цилиндр.По определению теплоемкость системы равна $C = \Delta q/\Delta T$. Подставляя в это соотношение составленные ранее выражения, получим

$$C = \left(\frac{3}{2} + \frac{Mg + p_0S}{Mg + p_0S + F}\right)R = \left(\frac{5}{2} - \frac{F}{Mg + p_0S + F}\right)R .$$

Отметим, что второе выражение в окончательном ответе можно получить непосредственно, если учесть, что нагревание гелия осуществляется изобарно, а молярная теплоемкость одноатомного газа при таком процессе равна $(5/2)R$.

6. Будем считать, что поведение аргона в заданном цикле подчиняется уравнению состояния идеального газа. Как известно, при изотермическом расширении внутренняя энергия идеального газа не изменяется (при таком процессе температура газа остается неизменной). Поэтому, согласно первому закону термодинамики, при этом процессе газ должен получить от нагревателя количество теплоты

$$q_{\text{н}} = A .$$

При изохорном охлаждении объем газа остается неизменным, а его температура понижается. Следовательно, газ должен отдать холодильнику количество теплоты, равное уменьшению его внутренней энергии. При адиабатическом сжатии нет теплообмена газа с окружающими телами. Поскольку при сжатии над газом совершается работа, то его внутренняя энергия, а следовательно, и температура повышаются. Из этого следует, что заданное в условии задачи изменение температуры ΔT равно уменьшению температуры газа при его изохорном охлаждении или увеличению температуры газа при его адиабатическом сжатии. Как известно, аргон является одноатомным газом. Его молярная теплоемкость при изохорном процессе равна $(3/2)R$, где R – универсальная газовая постоянная. Значит, при охлаждении аргон должен отдать холодильнику количество теплоты

$$q_{\text{х}} = \frac{3}{2}R\Delta T .$$

На стадии адиабатического сжатия над аргоном совершается работа

$$A_{\text{а}} = \frac{3}{2}R\Delta T .$$

Таким образом, в заданном цикле работа газа равна

$$A_{\text{ц}} = A - A_{\text{а}} ,$$

а полученное от нагревателя количество теплоты равно A. Как известно, коэффициент полезного действия цикла равен отношению работы газа за цикл к количеству теплоты, полученному им от нагревателя за то же время:

$$\eta = \frac{A_{\text{ц}}}{q_{\text{н}}} = 1 - \frac{3R\Delta T}{2A} .$$

7. При решении этой задачи, как обычно, будем считать, что сферы находятся достаточно далеко от всех других тел, потенциал бесконечно удаленной от сфер точки (а потому и любой точки, соединенной с землей) равен нулю, а диэлектрическая проницаемость среды вне и между сферами равна единице. Поскольку внутренняя сфера соединена с ключом тонким проводом, пренебрежем электрическими зарядами на этой проволоке и ключе, т.е. будем учитывать лишь электрические поля, порождаемые зарядами на сферах. При выполнении сделанных предположений нужно считать, что в исходном состоянии, когда ключ находится в положении *1*, потенциал внутренней сферы равен нулю, а в конечном состоянии, когда ключ находится в положении *2*, потенциал равен $\mathcal{E}$. Значит, и в исходном и в конечном состояниях на внутренней сфере должен находиться определенный заряд. Обозначим величину этого заряда в указанных состояниях q_1 и q_2 соответственно.

Учитывая симметрию расположения сфер и сделанные предположения, можно утверждать, что электростатическое поле между сферами на расстояниях ρ от их центра, удовлетворяющих условию $r \le \rho \le R$, в начальном и конечном состояниях должно быть таким же, как от точечных зарядов q_1 и q_2 соответственно, помещенных в центр сфер. Поскольку внешняя сфера изолирована, то ее полный заряд остается неизменным и равным q, а поле вне сфер, т.е. при $\rho \ge R$, в начальном и конечном состояниях такое же, как от точечного заряда, находящегося в центре сфер и равного $q + q_1$ и $q + q_2$ соответственно. Следовательно, заряды q_1 и q_2 должны удовлетворять соотношениям

$$\frac{q}{R} + \frac{q_1}{r} = 0 \text{ и } \frac{q}{R} + \frac{q_2}{r} = 4\pi\varepsilon_0\mathcal{E} ,$$

где ε_0 – электрическая постоянная. Из этих соотношений следует, что после переключения ключа из положения *1* в положение *2* через источник должен протечь заряд $\Delta q = q_2 - q_1$. При этом сторонние силы батареи совершат работу $A = \mathcal{E}\Delta q$. Согласно закону сохранения энергии, эта работа равна сумме приращения энергии электростатического поля, вызванного изменением заряда внутренней сферы, и энергии, выделившейся в виде тепла.

Вычислить энергию электростатического поля, когда ключ находился в положении *1*, можно, например, из следующих соображений. Напряженность электрического поля на расстояниях ρ от центра сферы, удовлетворяющих условию $r \le \rho \le R$, должна быть такой же, как от точечного заряда q_1, помещенного в ее центр, т.е. равной

$$E(\rho) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\rho^2} ,$$

а потому разность потенциалов между внутренней и наружной сферами составляет

$$\Delta\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = \frac{q_1(R - r)}{4\pi\varepsilon_0 rR} .$$

Из этого выражения следует, что взаимная емкость рассматриваемых проводящих концентрических сфер, т.е. емкость сферического конденсатора, равна

$$C = \frac{q_1}{\Delta\varphi_1} = \frac{4\pi\varepsilon_0 rR}{R - r} .$$

Как уже отмечалось, на внешней поверхности сферы радиусом R в исходном состоянии находился заряд $q + q_1$, а потому между этой поверхностью и достаточно удаленными от нее телами существовало электрическое поле. Рассматривая указанную поверхность как одну обкладку сферического конденсатора, другой обкладкой которого являются достаточно удаленные от нее тела, можно утверждать, что емкость этого конденсатора равна $C^* = 4\pi\varepsilon_0 R$. Воспользовавшись известным выражением для энергии электростатического поля конденсатора, найдем энергию электростатических полей нашей системы в исходном и конечном состояниях:

$$W_1 = \frac{q_1^2}{2C} + \frac{\left(q+q_1\right)^2}{2C^*} = \frac{q^2\left(R-r\right)}{8\pi\varepsilon_0 R^2},$$

$$W_2 = \frac{q_2^2}{2C} + \frac{\left(q+q_2\right)^2}{2C^*} = \frac{\left(4\pi\varepsilon_0 R\mathcal{E}\right)^2 r + q^2\left(R-r\right)}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Искомое выделившееся количество теплоты равно

$$Q = A + \left(W_1 - W_2\right) = 2\pi\varepsilon_0 r\mathcal{E}^2.$$

8. Положим потенциал отрицательной клеммы батареи равным нулю. Тогда в момент замыкания ключа потенциал катода диода станет равным $\mathcal{E}$, потенциал же анода диода ниже, значит, диод будет заперт. По условию задачи диод следует считать идеальным, т.е. в запертом состоянии диод ток не проводит и емкость между его выводами равна нулю. Следовательно, в момент замыкания ключа потенциал анода диода будет равен $\mathcal{E}/3$.
После замыкания ключа через резистор сопротивлением $2R$, подключенный к конденсатору, начнет протекать ток, которым будет заряжаться конденсатор. По прошествии некоторого промежутка времени потенциал анода диода превысит потенциал его катода, и диод откроется. Начиная с этого момента, резисторы сопротивлением $2R$ можно считать соединенными параллельно, а после заряда конденсатора разность потенциалов между его обкладками станет равной падению напряжения на резисторе сопротивлением $4R$. В соответствии с законом Ома, это разность потенциалов будет равна
$\Delta\varphi = \dfrac{4R}{5R}\mathcal{E} = 0{,}8\mathcal{E}$, а установившийся заряд любой обкладки конденсатора по модулю станет равным $q = C\Delta\varphi$. Поскольку конденсатор плоский, то напряженность электростатического поля, создаваемого зарядами одной из его пластин в любой точке между ними, следует считать постоянной и равной по модулю $E = \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta\varphi}{d}$, где d – расстояние между обкладками конденсатора, которое можно найти из выражения емкости плоского воздушного конденсатора: $C = \varepsilon_0 S/d$.
Итак, между пластинами конденсатора через достаточно большое время после замыкания ключа будет действовать электростатическая сила взаимного притяжения, модуль которой равен

$$F = Eq = \frac{C\Delta\varphi^2}{2d} = \frac{0{,}32C^2\mathcal{E}^2}{\varepsilon_0 S}.$$

9. По условию задачи, когда сопротивление каждого из реостатов становится равным определенному значению, показания амперметра перестают зависеть от частоты. Действительно, при достаточно низкой частоте ω емкостное сопротивление конденсатора становится значительно больше, а индуктивное сопротивление катушки оказывается значительно меньше сопротивления шунтирующих их реостатов. При увеличении же частоты генератора емкостное сопротивление конденсатора уменьшается, а индуктивное сопротивление катушки растет. Поэтому при достаточно высокой частоте ω можно считать, что конденсатор «закорачивает» шунтирующий его реостат, а током, текущим через катушку, можно пренебречь по сравнению с током, текущим через шунтирующий ее реостат. Таким образом, если сопротивление каждого из реостатов равно R_0, то при достаточно низкой и при достаточно высокой частоте подключенная к источнику цепь ведет себя как резистор с сопротивлением R_0, причем в широком интервале частот отношение амплитуд напряжения генератора и силы тока через амперметр равно $U/I = R_0$.
Даже если сопротивление реостата R не равно R_0, значения напряжения на катушке индуктивности и шунтирующем ее реостате должны быть одинаковы, как и значения напряжения на конденсаторе и шунтирующем его реостате. При этом фаза напряжения $U_L(t)$ на катушке на $\pi/2$ больше фазы текущего по ней тока $I_L(t)$, поскольку $U_L(t) = LI'_L(t)$. Текущий же по шунтирующему катушку реостату ток $I_{RL}(t)$ изменяется синфазно с напряжением $U_L(t)$, так как $U_L(t) = RI_{RL}(t)$. Из сказанного следует, что фаза напряжения на катушке опережает фазу тока $I(t)$ через амперметр на такой угол φ_L, что $\operatorname{tg}\varphi_L = R/(\omega L)$.
Фаза напряжения $U_C(t)$ на конденсаторе меньше фазы текущего по нему тока $I_C(t)$ на $\pi/2$, так как $I_C(t) = q'_C(t) = CU'_C(t)$. Фазы же напряжения на конденсаторе и тока $I_{RC}(t) = U_C(t)/R$, текущего по шунтирующему конденсатор реостату, совпадают. Значит, фаза суммарного тока $I(t)$, текущего через эти элементы, опережает фазу напряжения на них на такой угол φ_C, что $\operatorname{tg}\varphi_C = \omega CR$.
Итак, текущий через амперметр ток удовлетворяет соотношению

$$I(t) = I_L(t) + I_{RL}(t) = I_C(t) + I_{RC}(t),$$

а напряжение генератора равно

$$U(t) = U\sin\omega t = U_L(t) + U_C(t).$$

Поэтому векторная диаграмма напряжений на элементах цепи при произвольных, но равных сопротивлениях реостатов будет иметь вид, показанный на рисунке 28.

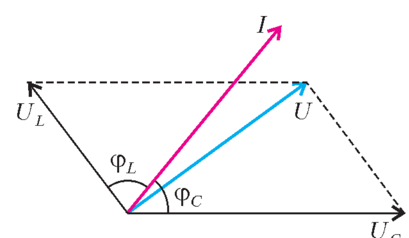

Рис. 28

Из этого рисунка можно понять, что отношение амплитуды напряжения $U(t)$ к амплитуде тока $I(t)$ не будет зависеть от частоты ω только при условии, что $\varphi_L + \varphi_C = \pi/2$, т.е. при условии совпадения фаз $U(t)$ и $I(t)$.
Таким образом, при выполнении сделанных предположений и при $R = R_0$ текущий через амперметр ток и напряжение генератора должны изменяться синфазно при всех допустимых значениях ω.
Выполнение соотношения $\varphi_L + \varphi_C = \pi/2$ эквивалентно требованию $\operatorname{tg}\varphi_L \operatorname{tg}\varphi_C = 1 = CR_0^2/L$. Поскольку $R_0 = U/I$, то

$$L = \frac{CU^2}{I^2}.$$

10. С точки зрения электромагнитной теории света, падающий нормально на пленку пучок белого света следует рассматривать как набор плоских монохроматических волн, волновой фронт которых параллелен поверхности пленки.
По условию задачи мыльная пленка находится в воздухе, т.е. среде, показатель преломления которой с большой точностью можно считать равным единице. Как известно, при нормальном падении на границу раздела двух однородных изотропных сред отражение волны от оптически более плотной (другими словами, имеющей больший показатель преломления) среды происходит с потерей половины длины волны. Поэтому при отражении от границы «воздух–пленка» будет происходить потеря половины длины волны, а при отражении от границы «пленка–воздух» этой потери не будет. Поскольку

отраженная от второй границы волна дважды проходит через пленку толщиной d, не испытывая преломления и изменения своей фазы при каждом прохождении границы раздела, то разность хода отраженных от обеих границ пленки волн с длиной волны λ вне пленки будет равна $\Delta = 2nd - \frac{\lambda}{2}$. Отраженный свет, из-за интерференции отраженных волн, будет иметь максимальную интенсивность, если эта разность хода кратна длине падающей волны. Поскольку искомая толщина пленки должна быть минимальной, то $\Delta = 0$.

С точки зрения квантовых представлений, монохроматический свет – это поток фотонов, каждый из которых имеет энергию $W = h\nu$, где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка, а ν – частота колебаний монохроматического света по электромагнитной теории. Поскольку эксперимент проводится в воздухе, то скорость распространения света можно считать равной скорости распространения света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Учитывая, что $c = \lambda\nu$, из ранее приведенных соотношений находим искомую толщину пленки:

$$d = \frac{\lambda}{4n} = \frac{hc}{4nW} \approx 0{,}1 \text{ мкм}.$$

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $\frac{l\sqrt{g}}{\sqrt{2}\left(2\sqrt{H} + \sqrt{H-h}\right)} \le v_0 \le \frac{l\sqrt{g}}{\sqrt{2}\left(2\sqrt{H} - \sqrt{H-h}\right)}$, или $1{,}75 \text{ м/с} \le v_0 \le 3{,}5 \text{ м/с}$.

2. $L = \frac{l}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8Hv^2}{gl^2}}\right) = 20$ м. **3.** $N = \left[\frac{l}{d}\right] = 20$, где символом [...] обозначена целая часть числа.

4. $v_{y\,\max} = \frac{1}{2}\alpha_0^2\sqrt{gl} = 1$ см/с. **5.** $\tau = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}$.

6. $v_0 = \frac{p}{\rho}\sqrt{\frac{\mathrm{M}}{2EN_\mathrm{A}}} \approx 9 \cdot 10^{-8}$ см/с. **7.** $\eta = 1 - \frac{5(m-1)}{4\left(n^2-1\right)} = \frac{1}{6}$.

8. $\Delta U = \frac{3}{5}mgH$. **9.** $L = \frac{l}{1 - \frac{p_1^2(m_1+m_2)}{2Tlm_1m_2}}$. **10.** $E_1 = 0$, $\varphi_1 = 2\varphi_0$.

11. $U = \frac{C_0U_0}{C}\left(1 - \left(\frac{C_0}{C_0+C}\right)^n\right)$. При $n = 20$ и $\frac{C_0}{C_0+C} = 0{,}1$ $U \approx \frac{C_0U_0}{C} = 40$ В. **12.** $r = 5R$. **13.** $B = \frac{3}{4}B_0$.

14. Амплитуда напряжения не изменилась, амплитуда тока уменьшилась в $\sqrt{2}$ раз.

15. $R = \frac{2l}{k+1} = 8$ см. **16.** $v_0 \le \sqrt{\frac{gd}{n^2-1}}$.

17. $b = \frac{Fd(n-1)}{nF - d(n-1)} \approx 0{,}34$ см. **18.** $F_1 = \frac{Ld}{D_2 - d} = 6$ см, $F_2 = \frac{Ld}{2d - D_1 - D_2} \approx -2{,}73$ см, $F_3 = \frac{Ld}{D_1 - d} = 5$ см.

19. $W_2 = W_1\frac{\lambda_1\eta_1}{\lambda_2\eta_2}$. **20.** $s = \frac{P\tau^2}{2Mc} \approx 0{,}13$ мм.

Химический факультет

Вариант 1

3. Энергия взаимодействия увеличилась в 2 раза.

4. $v_\text{г} = \frac{vLN}{H} = 5625$ м/с.

5. $A = \frac{R}{2}\left(\frac{T_1}{V_1} + \frac{T_2}{V_2}\right)(V_2 - V_1) = 1245$ Дж. **6.** В 2 раза.

7. $a = -\omega\sqrt{A^2\omega^2 - v^2} \approx -1{,}2$ м/с^2.

8. $F = \left(M + m\left(1 - \frac{a^2}{g^2}\right)\right)g = 2{,}75$ Н.

9. $\varphi = \frac{\Delta x}{L(n-1)} = 0{,}1$ рад. **10.** $v_\text{др} = \frac{F\mathrm{M}}{BleSN_\mathrm{A}\rho} \approx 10^{-4}$ м/с.

Вариант 2

3. $v_\text{ср} = 2$ м/с. **4.** $\mathcal{E}_m = \frac{2\pi}{T}\Phi_m \approx 3{,}14$ Вб.

5. $H = 2h = 3$ м. **6.** $C_2 = C_1\frac{q_1}{C_1(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) - q_1} = 2$ мкФ.

7. $a = \frac{v^2}{l} - 4g = 50$ м/с^2. **8.** $\Delta T = T\frac{\rho gh}{p_0} = 7{,}5$ К.

9. $F = \frac{\eta UI}{v} = 6$ кН. **10.** $x = \frac{d(D_1 + D_2) - 1}{D_2(dD_1 - 1)} = 1$ м.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»
kvant.info
Московский центр непрерывного математического образования
kvant.mccme.ru
Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru
Костромской центр дополнительного образования «Эврика»
ceemat.ru

Квант журнал ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия, З.В.Сурова

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: 930-56-48
E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области
Тел./факс: (501) 443-92-17, (272) 6-25-36
E-mail: marketing@chpk.ru