Мосты и парашюты

В.ВЫШИНСКИЙ

Казалось бы, что общего между парашютом и ... мостом?

Мосты строили тысячи лет, причем это дело считалось настолько важным, что понтификами (pontifices), буквально – строителями мостов, в Древнем Риме называли жрецов, а в настоящее время так называют римских пап. А парашют изобретен всего около ста лет назад (Г.Е.Котельников, 1911 г.). Кроме того, приличный мост весит сотни и тысячи тонн (рис.1), а парашют помещается в ранце. И все же, с

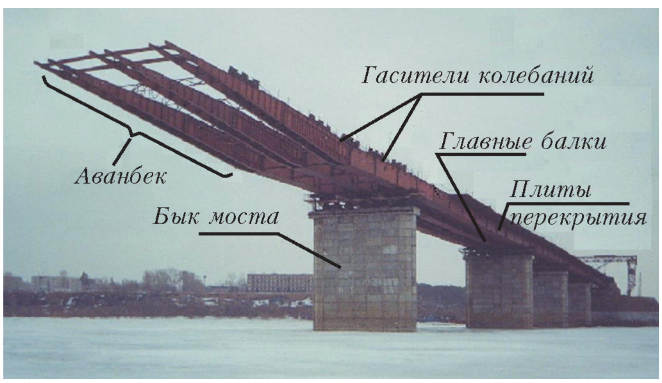


Рис.1. Монтаж моста через реку Томь в городе Томске

точки зрения аэродинамики, в них есть нечто общее: и мост и парашют – плохообтекаемые тела. А что значит – плохо или хорошо? Если при обтекании тела струйки воздуха разделяются в его носовой области и затем вновь соединяются в кормовой точке – это хорошо для самолета или дирижабля, потому что при этом сила сопротивления минимальна. Но парашют в принципе должен иметь как можно большее сопротивление, т.е. быть плохообтекаемым. Встречные струйки тока воздуха, разделившись перед плохообтекаемым телом, уже не соединяются за ним, а образуют вихри. Как говорят аэродинамики, образуется отрыв потока. На рисунке 2 это явление изображено для случая обтекания стержней прямоугольного сечения, например элементов конструкции моста. Таким образом, можно сказать, что общей чертой,

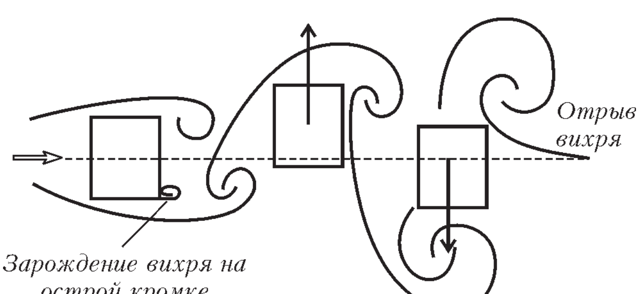


Рис. 2. Раскачка многобалочной конструкции при отрывном обтекании

объединяющей мосты и парашюты, является отрывное обтекание их воздухом.

Рассмотрим систему двух тел: спускаемый аппарат (СА) + парашют (П) и мост на этапе строительства методом продольной надвижки, когда многобалочная система, пока что облегченная от плит перекрытия, выдвигается от одного быка моста к другому (см. рис.1). И там и здесь мы имеем систему нескольких плохообтекаемых тел и существенно нестационарный (т.е. изменяющийся со временем) отрывной характер течения воздуха. При исследовании таких течений можно считать, что обтекание всех угловых кромок происходит с отрывом потока, а характер обтекания всей системы тел зависит от расстояния между телами – будь то СА+П или выдвинутые балки моста (аванбеки) при их поперечном обтекании.

Обсудим процесс спуска груза на парашюте. Изменением расстояния между СА и П можно менять величину силы сопротивления. При расстоянии L между ними, меньшем некоторого критического значения L^*, имеет место обтекание с «открытым следом» (нестационарное обтекание; рис. 3,*а*), а при $L > L^*$ – с «закрытым следом» (рис.3,*б*). Этим пользуются с целью уменьшения динамических нагрузок,

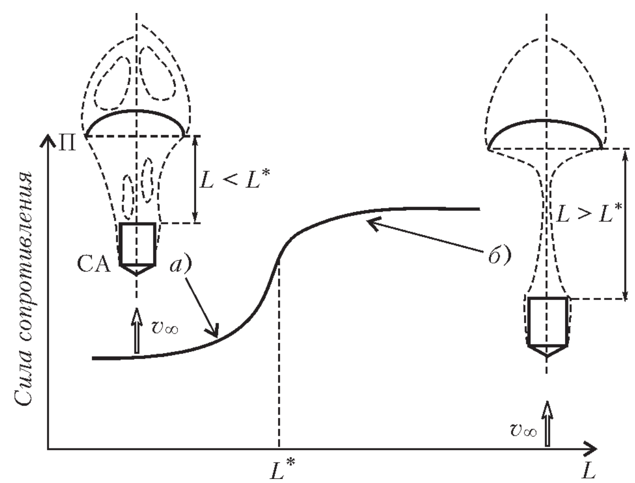


Рис.3. Изменение схемы обтекания системы двух тел при увеличении расстояния между ними

максимум которых приходится на момент раскрытия парашюта (рис. 4).

Резко тормозиться нельзя и по другой причине – спутный след может догнать быстро тормозящийся парашют и смять его. Поэтому применяют несколько парашютов – сначала

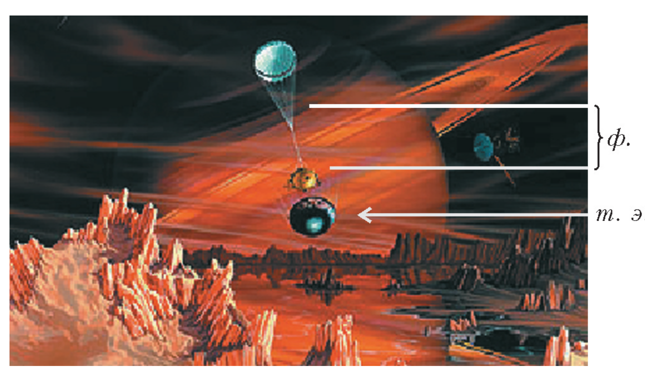


Рис.4. Изменение расстояния между спускаемым аппаратом и парашютом для управления величиной аэродинамического сопротивления (ф. – фал, который в момент раскрытия парашюта выбран, т.э. – тормозной экран, использованный на начальном этапе торможения)

маленький, а потом большой – или используют специальные ленты, которые стягивают «юбку» парашюта и по мере надобности разрываются, чтобы парашют постепенно распустился во всей своей прелести. Этот прием называется «рифовкой» парашюта – подобно тому, как на парусных судах во время штормового ветра «берут рифы» на парусах, или, по-простому, уменьшают их площадь, подвязывая специальными веревками.

А что же мост? Знание параметров его конструкции позволяет определить скорости ветра, при которых возможно возникновение аэроупругих колебаний балок, не связанных между собой плитами перекрытия. Возникновение таких колебаний очень опасно, так как может привести к разрушению строящегося моста. Но что такое аэроупругие колебания? Какова природа их возникновения?

Давно известно, что, перед тем как ступить на мост, подразделение солдат, идущих в ногу, получает команду «сбить шаг», чтобы избежать явления резонанса – совпадения собственных частот колебаний моста с частотой внешнего воздействия. Точно так же отрыв потока является тем внешним воздействием, которое при совпадении частот схода вихрей и собственных частот упругой конструкции моста может привести к его раскачке. Казалось бы, команду «сбить ногу» здесь уже не подашь. Однако не все так безнадежно.

Для борьбы с ветровым резонансом можно либо изменить конструкцию – например, еще на этапе проектирования изменив расстояние между балками, либо применить специальные системы демпфирования – например, аэродинамические системы. Если заставить вихри срываться с острых кромок нерегулярно, идти с разным шагом (не «в ногу»), то это и будет выполнение команды «сбить шаг» по-аэродинамически. На рисунке 1 видны такие гасители колебаний, имеющие вид петушиных гребней. Отрыв потока с острых кромок будет происходить по-прежнему, но масштаб вихрей и фазы схода по длине балки будут различными, так что возмущения потока, созданные предыдущей по потоку балкой, будут достигать другой балки для разных ее участков неодновременно.

Но связь мостов с парашютами оказывается еще теснее: есть парашютисты-экстремалы, которые прыгают с мостов. К сожалению, бывают неудачные прыжки, когда в результате воздействия отрывных ветровых структур, возникающих при обтекании элементов моста, происходит деформация купола парашюта, парашют «складывается», теряет свои тормозящие свойства, т.е. – увы! – становится хорошообтекаемым телом.

Критическое поведение

Э.РУМАНОВ

Для тех, кто не знает, – два слова про Ричарда Фейнмана (1918–1988). Американский физик, один из основателей квантовой электродинамики, Нобелевский лауреат, один из самых ярких теоретиков XX века. Студенты изучают физику по «Фейнмановским лекциям» (есть прекрасный русский перевод Г.И.Копылова) и находят там примерно такие слова:

Картина мира видится людям очень сложной. Многие не подозревают, что сложные процессы зачастую подчиняются простым уравнениям.

Проиллюстрируем это на конкретном примере. Нас будут интересовать качественные изменения в свойствах или поведении различных систем в критическом состоянии. Оказывается, закономерности таких изменений универсальны, в определенном отношении они не зависят от рассматриваемой системы. Впрочем, ограничимся рамками физики, химии и отчасти биологии, не затрагивая системы социальные, политические и т.п.

Впервые термин «критическая точка» появился в статьях о кипении. Посмотрим, что получится, если нагревать жидкость в запаянной ампуле. (Такой опыт требует специальной техники безопасности, без которой проводить его нельзя.) Перед нагревом жидкость занимает часть ампулы, остальной объем заполнен ее паром. Давление пара устанавливается таким, что температура кипения равна комнатной. При более высоком давлении пар будет конденсироваться, отдавая тепло окружающей среде, при более низком давлении жидкость будет испаряться, отнимая тепло у среды, пока равновесие не восстановится. В прозрачной ампуле поверхность жидкости отражает свет и хорошо видна. При нагреве открытого сосуда (например, чайника) его температура остается постоянной, пока вся вода не выкипит. В ампуле же температура и давление согласованно растут: температура всегда равна температуре кипения при данном давлении (рис.1). По мере нагрева плотность пара увеличивается, так как его в ампуле становится все больше, а плотность жидкости уменьшается из-за роста температуры (тепловое расширение). В критической точке $(p_к, T_к)$ обе плотности одинаковы, и отличить жидкость от пара невозможно. Около этой точки (т.е. при давлении и температуре чуть ниже $p_к$ и $T_к$) отличие есть, но оно мало, и случайные слабые воздействия (из-за беспорядочного броуновского движения) вызывают переходы от одного состояния вещества к другому. Ампула в этих условиях заполнена как бы смесью мелких капель жидкости и пузырьков пара. Такая среда сильно рассеивает свет (явление критической опалесценции). В некоторый момент нагрева ампула мутнеет, поверхность жидкости становится невидимой. Потом прозрачность восстанавливается, но никакой поверхности раздела уже нет – вещество в ампуле однородно. Про него нельзя сказать, жидкость это или пар.

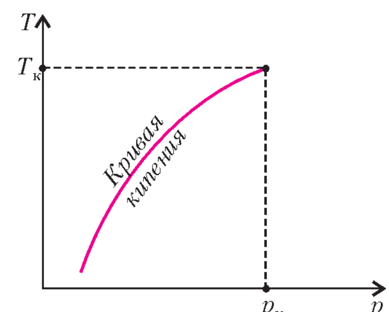


Рис. 1

Примеры качественных изменений при определенных (критических) значениях параметров встречаются повсюду. Скорость цепной реакции по достижении критической массы неудержимо нарастает, и происходит взрыв. Твердый материал разрушается, когда достигается его предел прочности. Если скорость потока жидкости или газа превысит определенную величину, в нем образуются вихри. И так далее. На первый взгляд, эти явления совершенно разнородны. Выяснилось, однако, что в критических условиях всегда наступает хаос. Эта универсальность критических явлений позволяет знакомиться с ними на самых простых примерах. А именно, обсудим критическое поведение, которое демонстрирует шарик на неровной поверхности.

Пусть шарик находится в ямке, как показано на рисунке 2. Если в начальный момент времени положить шарик на склон ямки, он будет кататься взад и вперед, пока, теряя энергию из-за трения, не остановится в нижней точке ямки – в точке *1*. При смещении шарика из этой точки вправо или влево сила, действующая на него, будет направлена так, чтобы вернуть его в эту точку. Такое равновесие называют устойчивым. Где бы ни был шарик в начальный момент, в конце концов он окажется в точке равновесия. (Для более сложных систем этот вывод не столь очевиден, но тоже справедлив.) Можно сказать, что шарик «забывает» свое прошлое. У каждой системы есть свое характерное время забывания.

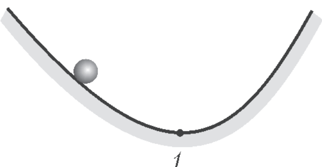


Рис. 2

Посмотрим на ямку с более пологими склонами (рис.3). Здесь шарик тоже останавливается в точке равновесия, но время забывания у него больше. Случайные толчки (если, например, ямка расположена на столике в вагоне поезда) легко выводят шарик из равновесия, после чего он не спешит туда возвращаться. В предельном случае шарика на горизонтальном столе говорят о безразличном равновесии. Если в начальный момент сообщить шарику некоторую скорость, точка, в которой он остановится, зависит от этой скорости и от его начального положения. Под действием случайных толчков шарик может посетить каждую точку стола с одинаковой вероятностью.

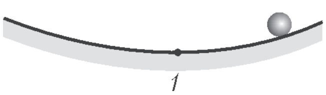


Рис. 3

Рассмотрим теперь более сложный рельеф (рис.4), где кроме ямки имеется еще горбик, вершину которого – точку *2* – математики называют точкой неустойчивого равновесия. При смещении шарика из этой точки появляется сила, стремящаяся такое смещение увеличить. Так как в реальности невозможно ни поместить шарик в точку *2* с математической точностью, ни избежать сколь угодно слабых толчков, то, с позиций экспериментатора, равновесия в этой точке нет. Значение точки *2* – в другом.

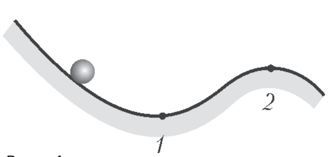


Рис. 4

Состояние движущегося шарика определяется двумя величинами – его положением x на рельефе в данный момент времени и скоростью v в этот момент. Два числа x и v можно считать координатами точки на плоскости. Ее называют фазовой плоскостью. В следующий момент времени будут уже другие значения x и v, движение «отображается» линией на фазовой плоскости – фазовой траекторией. Когда рельеф таков, как на рисунках 2 или 3, все траектории приходят в точку $x = x_1$, $v = 0$. Если же шарик на рисунке 4 перекатится через бугор, в точку *1* он может и не вернуться (это зависит от той части рельефа правее точки *2*, которая на рисунке не показана, и от начальной скорости шарика). Иными словами, траектории, сходящиеся к точке $(x_1, 0)$, занимают только часть фазовой плоскости. Эту часть называют бассейном притяжения точки x_1. Граница бассейна проходит через точку $x = x_2$, $v = 0$. По другую сторону границы расположены бассейны других точек равновесия. Фазовая плоскость поделена на бассейны притяжения подобно тому, как суша поделена водоразделами на бассейны различных водоемов.

Будем теперь спрямлять рельеф на рисунке 4 так, что ямка и горбик сглаживаются, а точки *1* и *2* сближаются. На рисунке 5 показан момент слияния этих точек. При меньшем изгибе равновесия нет, шарик катится вниз (рис.6). Таким образом, в критической ситуации, соответствующей рисунку 5, во-первых, исчезает граница бассейнов притяжения, или, точнее, левый бассейн поглощается правым, а во-вторых, при изгибе, близком к критическому, рельеф содержит почти горизонтальный участок. Движение шарика в этом случае подобно тому, что мы описывали, комментируя рисунок 3. Время забывания велико, а очень слабые случайные толчки (которые есть в любой реальной системе) вызывают «блуждания» большого размаха.

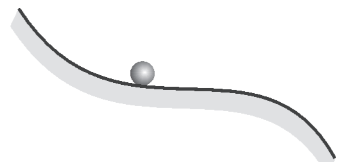


Рис. 5

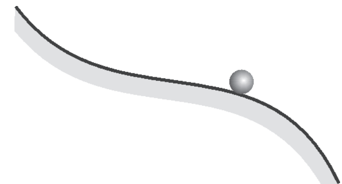


Рис. 6

Наконец, обратимся к рельефу на рисунке 7 – две ямки, разделенные горбом. Здесь при сглаживании горб исчезает, обе ямки сливаются в одну (рис.8), неустойчивая точка *2* в результате слияния с точками *1* и *3* становится устойчивой.

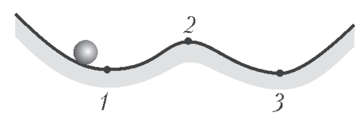


Рис. 7

Подчеркнем отличия превращений на рисунках 4–6 и на рисунках 7–8. В первом случае (слияние двух точек) равновесие исчезает, а новое положение равновесия оказывается отодвинутым от места слияния на конечное расстояние. Когда же сливаются три точки, новое равновесие возникает там, куда приходят старые точки в момент превращения. Но в обоих случаях имеют место почти горизонтальный участок рельефа, большое время забывания, хаотические колебания большого размаха под влиянием слабых случайных толчков.

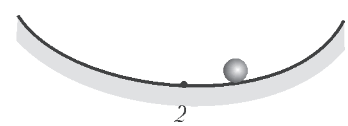


Рис. 8

При изучении критических явлений полезно понятие восприимчивости. Что такое восприимчивость применительно к шарику, можно пояснить, вернувшись к рисунку 2. Предположим, что к шарику с помощью нити, перекинутой через блок, привязан грузик (рис.9). Пусть масса грузика мала по сравнению с массой шарика. Под действием грузика шарик переберется из точки *1* в точку *1'* – это его новое положение равновесия. Отношение расстояния $\left|x_{1'} - x_1\right|$ к массе грузика и будет в данном случае восприимчивостью. Ясно, что на пологом рельефе (см. рис.3) восприимчивость больше, чем на крутом. То же относится к рельефам с почти горизонтальным участком на рисунках 5 и 8.

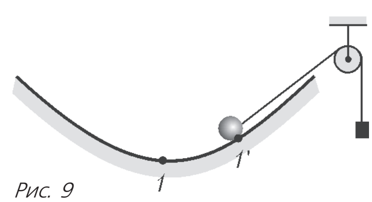


Рис. 9

Когда условия приближаются к критическим, восприимчивость любой системы (а не только шарика) растет. Отклик на каждое, даже слабое, воздействие велик. А так как среди воздействий всегда есть слабый шум, поведение системы в критических условиях оказывается хаотическим.

Для шарика критические условия связаны только с изменениями равновесия. Более интересны системы, которым внешнее воздействие не дает прийти в равновесие. Так, Земля не приходит в равновесие с межпланетной средой благодаря световому потоку от Солнца, а чтобы в камере холодильника поддерживалась температура ниже комнатной, надо включить его в сеть. Время забывания у таких (активных) систем, разумеется, тоже ограничено. Поэтому рано или поздно их поведение перестает зависеть от начальных условий. Система, как говорят, выходит на установившийся режим.

Есть разные сорта установившихся режимов. Выход на стационарный режим можно наблюдать, не расставаясь с шариком. Надо его бросить в сосуд с вязкой жидкостью (например, с глицерином). Скорость, с которой шарик опускается вниз, быстро выходит на постоянное значение, определяемое равенством силы тяжести шарика и суммы двух сил: выталкивающей (архимедовой) силы и силы вязкого трения. Из-за трения при движении шарика выделяется тепло, так что жидкость, окружающая шарик, нагревается, и ее вязкость падает. От этого установившаяся скорость увеличивается, тепла выделяется больше, вязкость становится еще меньше и так далее. Возникает, как говорят, обратная связь между скоростью и вязкостью. Такая связь служит причиной неустойчивости описанного режима при определенных условиях (значениях параметров). Для стального шарика в глицерине, например, критический радиус составляет примерно 1 см, а критическая скорость – около 1 м/с. Однако наблюдение этого явления в лабораторных условиях нереально. Тепловые процессы идут медленно, неустойчивость развивается за время порядка десятков минут, так что сосуд пришлось бы делать слишком глубоким. Иное дело, например, движение пластов земной коры. Возможно, некоторые землетрясения обусловлены тепловой неустойчивостью этого движения. Другой подозрительный в этом плане объект – ледник, ползущий вниз по склону горы.

Стационарный режим, как и состояние равновесия, тоже можно характеризовать восприимчивостью, которая в критической области параметров должна расти. Есть надежда, что изучение низкочастотного шума сложных промышленных и природных систем позволит найти признаки, предупреждающие заранее о назревающем кризисе. Трудно поверить, что сложные химические или биологические системы имеют что-либо общее с шариком, ямками и горбиками. Тем не менее, высокая восприимчивость и обусловленная ею хаотизация в критических условиях обнаружены у всех систем, исследованных до сих пор. Обратное утверждение о том, что высокую восприимчивость можно получить только в условиях, близких к критическим, не доказано, но, по-видимому, верно.

Нестационарные установившиеся режимы называют автоколебаниями. Многие холодильники работают в периодическом режиме: мотор включается, когда температура в камере превысит допустимое значение, и выключается после того, как она достаточно понизилась, затем следует стадия медленного нагрева из-за теплопроводности стенок, и все повторяется. Другой пример периодического режима – ход часов. В них источником «внешнего» воздействия, мешающего прийти в равновесие, служит батарейка или сжатая пружина.

До сих пор мы говорили о хаосе, который не выходит за пределы относительно узкой критической области параметров. Но есть режимы, которые после своего рождения остаются хаотическими, даже когда значения параметров уходят из критической области. Изучение такого хаоса показало, что и здесь важную роль играет соседство устойчивых и неустойчивых состояний. Именно хаос мешает делать достоверные предсказания, например правдивые прогнозы погоды. Хаос многолик, и особенно интересны различия между его проявлениями в разных случаях. Кое-что об этом уже удалось узнать, но главная работа – впереди.

Людмила, Черномор и шапка-невидимка

А.СТАСЕНКО

Везде всечасно замечали
Ее минутные следы:
То позлащенные плоды
На шумных ветвях исчезали,
То капли ключевой воды
На луг измятый упадали...
Сам карла утренней порою
Однажды видел из палат,
Как под невидимой рукою
Плескал и брызгал водопад.

А.С.Пушкин

Вспомнили? Ну конечно, речь идет о Людмиле, законной супруге Руслана, похищенной нехорошим Черномором. Это она приватизировала шапку-невидимку из черноморского гардероба. Однако действительно ли Людмила могла чувствовать себя столь комфортно, а Черномор был настолько бессилен увидеть «невидимую» пленницу?

В самом деле, невидимость тела означает, что оно ничего не отражает, не поглощает и не преломляет (см. по этому поводу, например, недавнюю статью В.Белонучкина «Как увидеть невидимку» в «Кванте» №4 за 2006 г.). Следовательно, хрусталик глаза, который должен фокусировать лучи на сетчатке, перестает «работать», а сетчатка, которая должна преобразовывать сфокусированную энергию в полезный сигнал, перестает что-либо поглощать.

Итак, абсолютно невидимая Людмила смогла бы перемещаться только ощупью, ориентируясь лишь на звуки или запахи (что может быть тоже сомнительным – но это лежит вне темы данной статьи).

А что же Черномор? Конечно, во времена князя Владимира (Красное Солнышко) и его дружинника Руслана, т.е. в X веке, не были еще сформулированы законы теплового

(Продолжение см. на с.34)

Морская вода даже при самом сильном холоде не замерзает до твердого и чистого льда.

Михаил Ломоносов

Я предположил, что во время кипения теплота поглощается водой и проникает в состав пара, образующегося из нее, тем же способом, как она поглощается льдом при таянии и проникает в состав образующейся воды.

Джозеф Блэк

Облако – туман в высоте.

Владимир Даль

Можно, как известно, расплавить посредством трения друг о друга в безвоздушном пространстве два куска льда; теперь делают попытки превратить воду в лед посредством неслыханно большого давления.

Юлиус Роберт Майер

...чтобы наблюдать насыщенный пар выше обыкновенной точки кипения воды, приходилось кипятить ее в замкнутых котлах, под искусственной атмосферой из сжатого воздуха и пара...

Александр Столетов

А так ли хорошо знакомы вам лед, вода и пар?

Еще как знакомы, ответят очень многие. Вода – это самое распространенное на Земле вещество. Все живое, в том числе и мы сами, в основном состоит из воды. Ее физические свойства изучены-переизучены, они даже используются в качестве эталонов.

Все это так, однако вода в своих различных агрегатных состояниях и по сей день преподносит множество сюрпризов. Особенности этого вроде бы простого вещества до конца еще не поняты, и поведение воды не всегда можно прогнозировать. Смириться с таким положением дел ученые, безусловно, не желают и упорно продолжают разбираться со все более тонкими деталями строения воды и ее участия в загадочных эффектах.

А стимулирует исследователей понимание исключительной важности воды для жизни на Земле. Ведь более полные знания о ней необходимы и для решения экологических проблем, и для создания новых лекарств и методов лечения, и для противостояния глобальным климатическим изменениям, и для совершенствования производственной деятельности человека...

Масштабы этих задач побуждают и нас обратиться к разговору о физических свойствах одной из четырех основных стихий. Посмотрите, ведь и среди школьных вопросов и задач найдется немало таких, которые заставят вас засомневаться в простоте этого простого вещества – воды.

Вопросы и задачи

1. Останется ли целой доверху заполненная водой закупоренная стеклянная бутылка, если ее опустить в тающий лед?

2. Ко дну сосуда с водой изнутри приморожен шарик изо льда. Изменится ли уровень воды в сосуде, когда лед растает?

3. Можно ли расплавить олово в горячей воде? А заморозить воду расплавленным металлом?

4. Капельки тумана могут оставаться жидкими и при температуре $-30\ ^\circ C$. Почему?

5. При первых морозах водоемы легче замерзают, если идет снег. Как это объяснить?

6. Какая физическая ошибка допущена в стихотворении о капле: «Она жила и по стеклу текла, но вдруг ее морозом оковало, и неподвижной льдинкой капля стала, а в мире поубавилось тепла»?

7. Почему превращение в воду плавающих в море льдов не приводит к наводнениям, тогда как растопление льда, покоящегося на острове Гренландия, вызвало бы катастрофический подъем уровня океана?

8. Удельная теплота плавления меди значительно меньше, чем у льда. Значит ли это, что для плавления медной пластинки в зимних условиях потребуется меньше энергии, чем для плавления льдинки той же массы?

9. Почему ожоги паром опаснее ожогов кипятком?

10. Что быстрее потушит пламя – кипяток или холодная вода?

11. В кастрюле с тяжелой крышкой вскипятили воду. Сняв кастрюлю с плиты, ей дали слегка остыть, затем в спокойную воду насыпали чайную заварку, и вода бурно закипела. Почему?

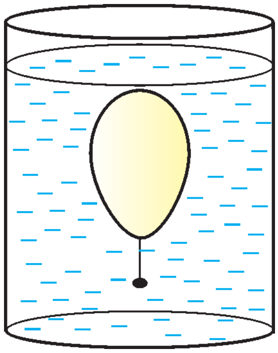
12. Желая ускорить процесс варки, хозяйка усилила огонь под кастрюлей, в которой кипела вода. Верно ли поступила хозяйка?

13. Одинаковы ли показания термометров, один из которых помещен у поверхности кипящей воды, а другой – в ее толще?

14. Стакан с небольшим количеством воды поставили под колокол воздушного насоса и стали откачивать воздух. Почему вода сначала закипела, а потом замерзла?

15. Воду вскипятили в круглодонной колбе, колбу закупорили и перевернули. Если теперь на дно колбы положить немного снега или облить ее холодной водой, то вода в колбе закипит. Как это объяснить?

16. В каком случае «точка росы» становится «точкой инея»?



17. Иногда поверхности окон запотевают. Какие это поверхности – внешние или внутренние?

18. При критической температуре удельная теплота парообразования любой жидкости, в том числе и воды, равна нулю. Почему?

19. Какого цвета водяной пар?

Микроопыт

Выпустите из яйца его содержимое через маленькое отверстие в остром конце. Залепите дырочку воском или пластилином, к которому прикрепите на нитке грузик. Массу грузика надо подобрать так, чтобы он удерживал скорлупу почти у дна высокой банки с водой комнатной температуры.

Если вынести банку на мороз, то через некоторое время ваш «прибор» всплывет, но вскоре опустится. Если теперь внести банку в комнату, то скорлупа вновь проделает свой путь вверх-вниз. Объясните это.

Любопытно, что...

...расширение воды при замерзании и ее закипание при пониженном давлении были открыты лишь в семнадцатом столетии искусным английским экспериментатором Робертом Бойлем.

...из морской воды образуется исключительно прочный полярный лед. Иная точка зрения, разделявшаяся, судя по эпиграфу, Ломоносовым, «не позволила» пробиться к Северному полюсу ни одной из экспедиций XVII–XIX веков, так как парусники всякий раз застревали в мощных льдах.

...способ приготовления мороженого поначалу охраняли как большой секрет. Напрасно опытные повара при многих европейских дворах пытались заморозить смесь из взбитых сливок и фруктовых соков, пользуясь льдом в обычных погребах. Оказывается, дело было в добавлении соли – перемешивая ее с колотым льдом, можно было значительно понизить температуру, вплоть до полного замерзания смеси.

...одна из особенностей льда заключается в том, что температура его плавления, в отличие от большинства веществ, понижается с увеличением давления. Однако этот эффект не отвечает за появление водяной смазки под лезвием коньков, чем долгие годы пытались объяснить их легкое скольжение по льду.

...знаменитый сказочник Андерсен упомянул в «Снежной королеве» десятиконечные снежинки, хотя много раньше астроном Кеплер установил их шестиконечную форму. Правда, Декарту удалось наблюдать крайне редкие двенадцати- и восемнадцатиконечные кристаллики снежинок.

...недавно была обнаружена пятая форма плотного аморфного льда, образующегося под действием высокого давления при температуре около –200 °С. Заметим, что все виды льдов, кроме обычного, тонут в воде. Иначе говоря, лед, получающийся при нормальных условиях, ведет себя аномально.

...в годы второй мировой войны для восстановления потерь флота английские ученые предложили морскому ведомству построить непотопляемые авианосцы изо... льда. Для этого предполагалось использовать айсберги, за которыми в Арктику была даже направлена специальная экспедиция. Проект, правда, так и не был осуществлен, однако внимание к разного рода ледяным сооружениям неизмеримо возросло.

...большая теплоемкость воды объясняется тем, что ее молекулы объединяются в так называемые кластеры, (супермолекулы) и при поступлении к воде тепла заметная его часть тратится на разрыв связей между входящими в состав кластера соседками-молекулами.

...на Марсе жидкой воды нет, так как при марсианском атмосферном давлении, в 160 раз меньшим, чем на Земле, вода может существовать лишь в твердом и газообразном состояниях. А на Венере вода в жидкой фазе не могла бы находиться потому, что температура поверхности этой планеты около 480 °С, что заметно выше критической температуры воды. Правда, исследователи не потеряли надежды обнаружить замерзшую воду на Луне, где она могла бы сохраниться на дне глубоких полярных кратеров.

...как известно, в скороварке пищу можно приготовить гораздо быстрее, чем в обычной кастрюле. Однако открывать эту посуду следует очень осторожно: после разгерметизации давление падает, и жидкость оказывается заметно перегретой, что приводит к взрывному вскипанию во всем объеме кастрюли, выплескиванию горячей воды и... ожогам.

...английский физик Чарльз Вильсон, предложивший в 1912 году применяемый и поныне способ регистрации заряженных частиц с помощью камеры, заполненной пересыщенным паром, до этого занимался исследованием происхождения дождей и туманов.

...феномен «памяти воды», т.е. ее способность длительное время хранить информацию, так активно обсуждался в последние годы, что заставил ученых провести специальные эксперименты. Увы, результат отрицателен: вода обладает нестабильной, постоянно меняющейся структурой и, скорее, является одним из самых «забывчивых» веществ на свете.

Что читать в «Кванте» о льде, воде и паре

(публикации последних лет)

1. «Наглядный способ регистрации заряженных частиц» – 2001, №6, с.11;
2. «Водяные пары» – 2002, №2, 26;
3. «Тепловые свойства воды» – 2002, №3, с.10;
4. «Снежинки и ледяные узоры на стекле» – 2002, №5, с.29;
5. «О структуре льда» – 2002, Приложение №6, с.19;
6. «О физике на приусадебном участке» – 2003, №1, с.27;
7. «Вода внутри нас» – 2003, №2, с.2;
8. «Насыщенные и ненасыщенные водяные пары» – 2004, №2, с.23;
9. «Костры в поле и русская баня» – 2004, Приложение №4, с.60;
10. «Калейдоскоп «Кванта» – 2005, №3, с.32;
11. «Метастабильные капли и обледенение самолета» – 2005, №4, с.8;
12. «Задачи с жидкостями» – 2006, №1, с.40.

Материал подготовил А.Леонович

(Начало см. на с. 31)

излучения (хотя люди не могли не чувствовать тепла, идущего от костра). Не было и тепловизоров, которые в наше время различают участки тела с разностью температур в доли градуса. Но ведь и Черномор был не прост: «Он звезды сводит с небосклона, Он свистнет – задрожит луна…» При таких энергетических возможностях не знать законов термодинамики и равновесного электромагнитного излучения нагретых тел – совсем неприлично для колдуна.

Нормальные люди, конечно, были тогда еще менее изощренными. Только в 1879 году Йозеф Стефан из экспериментальных наблюдений установил, что полный поток энергии, излучаемой нагретым телом, пропорционален четвертой степени его температуры. Через пять лет этот факт был подтвержден теоретически (из термодинамических соображений) Людвигом Больцманом. Это важное соотношение теперь называется законом Стефана–Больцмана и формулируется так: плотность потока энергии тела, нагретого до температуры T, равна

$$q = \sigma T^4,$$

где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ – постоянная, носящая имена этих ученых.

Постоянная Стефана–Больцмана является довольно красивой комбинацией «еще более фундаментальных констант» –

$$\sigma = 12\pi \frac{k^4}{c^2 h^3}\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots\right),$$

каждая из которых венчает важнейший раздел физики:

скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – это специальная теория относительности,

постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – квантовая механика,

постоянная Больцмана $k = 1{,}4 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – статистическая физика

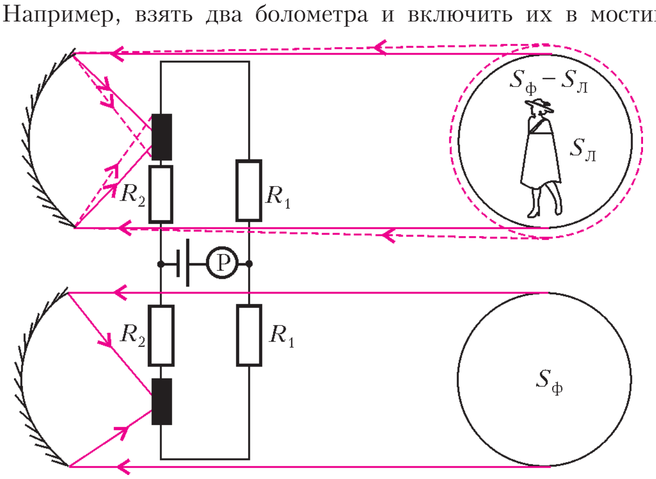
(не хватало еще постоянной тяготения!).

А еще присутствуют вездесущее число π и бесконечный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Советуем самостоятельно вычислить σ – вы получите большое удовольствие, находясь в окружении знаменитых имен.

Итак, все тела (звезды, деревья, стены, учителя и даже школьники) излучают электромагнитные волны. Часть волн, которая относится к инфракрасному излучению, т.е. невидимому диапазону спектра излучения молекул, атомов и ядер, получила название теплового излучения.

Что мог бы при своем могуществе сделать Черномор? Например, взять два болометра и включить их в мостик Уитстона (см. рисунок). Болометр (от греч. «луч» и «измеряю») – это приемник излучения всех длин волн, которые, падая на него, изменяют его электрическое сопротивление. В результате с помощью болометра можно измерять мощность излучения.



Затем Черномор мог бы сфокусировать на каждый из них излучение, отраженное двумя одинаковыми параболическими зеркалами. Посмотрим, что из этого может получиться.

Если в «поле зрения» обоих зеркал попадает только фоновое излучение, то регистрирующий прибор P покажет ноль. Если же в поле зрения одного из зеркал окажется объект площадью сечения $S_Л$, то излучение фона будет приходить уже от площади $S_ф - S_Л$. Тогда возникнет разность мощностей, регистрируемых болометрами:

$$\left(\left(S_ф - S_Л\right) q_ф + S_Л \sigma T_Л^4 - S_ф q_ф\right)\Delta\Omega,$$

положив которую равной наименьшей регистрируемой мощности W_{min}, получим

$$W_{min} = S_Л\left(\sigma T_Л^4 - q_ф\right)\Delta\Omega.$$

Здесь $q_ф \sim \sigma T_ф^4$ – плотность потока фонового излучения, $\Delta\Omega \sim \frac{D^2}{x_{max}^2}$ – телесный угол, под которым видна площадь зеркала от излучающего его объекта, где D – диаметр зеркала, x_{max} – максимальное расстояние между зеркалом и объектом. Тут и участок фона и Людмила рассматриваются как удаленные излучающие объекты, расположенные в одной плоскости. Таким образом,

$$x_{max} \sim D\sqrt{\frac{\sigma S_Л \left|T_Л^4 - T_ф^4\right|}{W_{min}}}.$$

Знак модуля означает, что объект может быть как теплее, так и холоднее фона.

Теперь сделаем численные оценки. Пусть диаметр зеркала D = 0,1 м (вполне портативный прибор), температура окружающей среды, т.е. «фона», $T_ф = 21\ °\text{C} = 294$ К (вполне комфортная температура, как и должно быть в садах волшебника), температура тела объекта – Людмилы в легкой одежде – $T_Л = 36\ °\text{C} = 309$ К, площадь силуэта Людмилы $S_Л = 0{,}5\ \text{м}^2$, а наименьшая мощность, регистрируемая прибором, $W_{min} = 1$ мкВт. Подставляя все это в приведенное выше выражение, получим

$$x_{max} \sim 0{,}1\sqrt{\frac{5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}5\left(309^4 - 294^4\right)}{10^{-6}}}\ \text{м} \approx 700\ \text{м}.$$

Эта оценка показывает, что Черномор вполне мог бы зарегистрировать присутствие теплой Людмилы на менее теплом фоне в пределах своего очень немалого аквапарка.

Отсюда видно, что даже волшебникам полезно знать законы физики, а уж достать дефицитный прибор – для них самое простое дело.

Примечание. Приведенные выше оценки сделаны в предположении, что размеры болометра малы, а отражающие параболические зеркала собирают параллельные лучи строго в одну точку. На самом деле, болометры имеют какие-то конечные размеры, а на краях отражателей происходит дифракция, так что «поле зрения» каждого зеркала увеличивается (пунктир на рисунке). Эти факторы приведут к уменьшению x_{max}. Помимо конечного размера болометра, на размер поля зрения должно влиять и такое явление, как дифракция падающего излучения на краях входного зрачка, т.е. зеркала. Однако, чтобы не усложнять наши рассуждения, ограничимся сказанным, считая, что мы делаем, как говорят математики, оценку сверху.

МАТЕМАТИКА ТУРНИРОВ

А.ЗАСЛАВСКИЙ, Б.ФРЕНКИН

На математических олимпиадах в течение многих лет регулярно предлагаются задачи о круговых турнирах, т.е. соревнованиях n участников, каждый из которых встречается с каждым (как правило, один раз). Результатом каждой встречи является либо победа одного игрока и поражение другого, либо ничья. В некоторых задачах рассматриваются турниры без ничьих.

Отметим, что помимо эстетической привлекательности задачи о турнирах имеют и прикладное значение. Дело в том, что если вначале математические методы применялись в основном только в физике и технике, то с середины двадцатого века началось широкое использование математики в медицине и гуманитарных науках. При этом выяснилось, что часто приходится иметь дело с данными качественного характера, которые не могут быть описаны с помощью количественных переменных и функциональных зависимостей между ними.

Существенную часть таких данных составляют так называемые экспертные оценки. Психологические исследования показывают, что человек не может давать надежные ответы на вопросы количественного типа, поэтому экспертам задают качественные вопросы типа: «Какой из данных объектов в наибольшей степени обладает таким-то свойством?» Исторически одним из первых экспертных методов стал *метод парных сравнений,* в котором эксперту предъявляются все пары объектов из данной совокупности и эксперт отвечает, какой из двух объектов предпочтительнее. Очевидно, что ответы эксперта можно записать в виде турнирной таблицы, причем, в зависимости от того, разрешено эксперту объявлять объекты равноценными или нет, получится турнир с ничьими или без ничьих. Соответственно, возникающие при этом задачи можно формулировать на языке турниров.

Популярность турнирной тематики стала одной из причин, побудившей нас совместно с С.Токаревым и А.Толпыго представить на XVII Летней конференции Турнира городов серию задач о турнирах.

Эти задачи решались весьма активно, поэтому имеет смысл рассказать о таких и родственных им задачах в отдельной статье.

Распределения результатов

В дальнейшем мы будем считать, что за победу в партии игрок получает 1 очко, за ничью – $1/2$ очка, за поражение – 0 очков.[1] Число очков, набранное i-м участником во всех встречах, будем обозначать s_i. Прежде всего выясним, каким условиям должен удовлетворять набор чисел s_i.

Задача 1. *а) Докажите, что числа* $s_1 \le \ldots \le s_n$ *удовлетворяют условиям*

$$s_1 + \ldots + s_n = \frac{n(n-1)}{2},$$
$$s_1 + \ldots + s_k \ge \frac{k(k-1)}{2},\ k = 1,\ \ldots,\ n-1. \qquad (1)$$

б) Даны n целых неотрицательных чисел $s_1 \le \ldots \le s_n$, *удовлетворяющих условиям (1). Докажите, что существует турнир без ничьих, в котором участники набирают* $s_1, \ldots, s_n$ *очков.*

в) Даны n полуцелых неотрицательных чисел $s_1 \le \ldots \le s_n$, *удовлетворяющих условиям (1). Докажите, что существует турнир с ничьими, в котором участники набирают* $s_1, \ldots, s_n$ *очков.*

Решение. а) Так как любые k участников проводят между собой $\frac{k(k-1)}{2}$ встреч и в каждой встрече ее участники в сумме получают одно очко, сумма очков любых k участников не меньше $\frac{k(k-1)}{2}$. При $k = n$ это неравенство, очевидно, обращается в равенство.

б) Для любого допустимого набора $s_1, \ldots, s_n$ рассмотрим все разности

$$s_1 + \ldots + s_k - \frac{k(k-1)}{2}, \quad k = 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Упорядочим наборы по максимальной из этих разностей, а если максимальные разности равны, то – по количеству разностей, равных максимальной. Существование искомого турнира докажем индукцией по полученному порядку.

Если для всех k

$$s_1 + \ldots + s_k = \frac{k(k-1)}{2},$$

то

$$s_1 = 0,\ \ s_2 = 1,\ \ \ldots,\ \ s_n = n-1$$

и турнир строится очевидным образом. Пусть

$$s_1 + \ldots + s_k - \frac{k(k-1)}{2} = l > 0$$

– максимальная из разностей. Тогда $s_1, \ldots, s_k - 1, s_{k+1} + 1, \ldots, s_n$ – допустимый набор, предшествующий данному, и по предположению индукции существует турнир с таким распределением очков. Если в этом турнире $(k+1)$-й участник победил k-го, то изменим результат их встречи на противоположный, если же победил k-й участник, то, поскольку $s_{k+1} + 1 > s_k - 1$, то найдется участник, выигравший у k-го, но проигравший $(k+1)$-му. Поменяв результаты этих встреч, получим турнир с нужным распределением очков.

в) Аналогично пункту б), проводится индукция по числу m полуцелых s_i. Отметим, что таким образом доказывается более сильное утверждение: существует турнир с данным распределением очков и числом ничьих $m/2$.

Утверждение пункта в) можно усилить: для любого набора полуцелых чисел s_i, удовлетворяющих условиям (1), существует турнир со следующим свойством для любых трех участников A, B, C: если A выиграл у B, а B у C, то A выиграл у C. Такие турниры будем называть *полутранзитивными.*

Задача 2. *Докажите, что для любого турнира с ничьими существует полутранзитивный турнир, в котором все участники набрали такое же число очков.*

Указание к решению. Среди всех турниров с данным распределением очков рассмотрите турнир с наибольшим числом ничьих.

[1] *В современных футбольных турнирах за победу дается 3 очка, а за ничью – 1, но с этой системой пока не связано никаких интересных математических фактов.*

Задача 3. *а) Докажите, что если в круговом турнире все N участников, кроме одного, набрали одинаковое число очков, то этот участник либо у всех выиграл, либо всем проиграл.*

б) Докажите, что если любые два игрока набрали разное количество очков и при этом нет ничьих, то занявший первое место выиграл у всех, занявший второе – у всех, кроме первого, и т.д.

Решение. а) Пусть «нестандартный» участник набрал больше очков, чем «стандартные». Результат «среднеарифметического» участника составляет $(N-1)/2$. Недобор «стандартного» участника до этого количества не может быть меньше $1/2$, поэтому «стандартные» вместе не добрали не менее чем $(N-1)/2$ очков. «Нестандартный» должен на столько же превысить средний уровень, т.е. он получил не меньше $N - 1$ очков. Это возможно лишь в случае, когда «нестандартный» у всех выиграл. Аналогично разбирается случай, когда «нестандартный» набрал меньше, чем «стандартные».

б) Если на турнире не было ничьих, то число очков каждого участника – целое, в промежутке от 0 до $N-1$. Если все они различны, то это все целые числа от 0 до $N-1$. Очевидно, игрок с $N-1$ очками выиграл у всех остальных. Тогда игрок с $N-2$ очками выиграл у всех, кроме первого, и т.д.

Задача 4. *а) N спортсменов провели круговой турнир. Через год те же спортсмены встретились снова. Докажите, что найдется участник, сумма очков которого изменилась не больше чем на $[N/2]$, где квадратные скобки обозначают целую часть числа.*

б) Приведите пример, когда оценка $[N/2]$ достигается.

в) N спортсменов, где N четно, дважды провели круговой турнир. Сумма очков каждого изменилась не менее чем на $N/2$. Докажите, что она у всех изменилась ровно на $N/2$.

Решение. а) Для краткости положим $M = [N/2]$. Пусть в турнире X таких участников, каждый из которых увеличил свое количество очков более чем на M. Прирост их суммы очков обозначим D. Пусть $X > 0$. Тогда $D > XM$. Сумма очков в поединках между данными участниками всегда одна и та же. Прирост достигается в матчах с другими участниками. Максимален он в том случае, если в первом турнире данные X спортсменов всем проиграли, а во втором турнире у всех выиграли. Тогда $D = X(N-X)$. Значит, $XM < X(N-X)$, откуда $[N/2] < N - X$. Так как X целое, то отсюда следует, что $X < N/2$. При $X = 0$ это неравенство также выполняется.

Пусть теперь Y – число таких участников, каждый из которых уменьшил свое количество очков более чем на M. Аналогично предыдущему, $Y < N/2$.

Сложив последние два неравенства, получаем искомый результат.

б) Пусть 1-й участник выиграл у всех, 2-й – у всех, кроме первого, и т.д. (i-й участник набрал $N - i$ очков). Далее, пусть таблица второго турнира имеет аналогичный вид, но участники сдвинулись по кругу на M (где снова $M = [N/2]$): 1-й занял $(M+1)$-е место, 2-й – $(M+2)$-е место, … …, $(N-M)$-й – последнее место, $(N-M+1)$-й – первое место, …, N-й – M-е место. Тогда те, кто в первом турнире занял первые $N-M$ мест, ухудшили свой результат на M очков, а остальные улучшили его на $N-M$. Но всегда $N - M \ge M$, поэтому минимальное изменение равно M.

в) Участники турнира делятся на тех, кто увеличил свою сумму очков не менее чем на $N/2$, и на тех, кто ее, соответственно, уменьшил. Хотя бы одна из этих групп включает не менее $N/2$ спортсменов. Пусть, например, такова первая группа, и в ней X спортсменов. Если D – прирост их суммы очков, то $D \ge XN/2$. Эта сумма увеличилась за счет матчей с остальными $N - X$ участниками, поэтому $D \le X(N-X)$. Отсюда $N - X \ge N/2$. Но по предположению $X \ge N/2$. Значит, $X = N/2$, и оба неравенства обращаются в равенства. Первое из этих равенств означает, что все спортсмены первой группы увеличили свою сумму очков ровно на $N/2$. Как следует из доказанного, вторая группа состоит из $N - X = N/2$ участников, поэтому к ней применимо такое же рассуждение.

Транзитивные и правильные турниры

Определение 1. *Циклом длины k* назовем набор из k участников, таких, что 1-й выиграл у 2-го, 2-й – у 3-го, … …, $(k-1)$-й – у k-го, k-й – у 1-го. Число циклов в турнире обозначим NT.

Понятие цикла особенно важно для анализа парных сравнений. Действительно, если эксперт предпочитает 1-й объект 2-му, 2-й – 3-му, …, $(n-1)$-й – n-му, то естественно ожидать, что 1-й объект для него предпочтительнее n-го. Поэтому наличие циклов свидетельствует о противоречиях оценок эксперта. Чем больше таких противоречий, тем больше сомнений вызывает компетентность данного эксперта. В связи с этим возникает задача количественного измерения противоречивости. Следующее утверждение показывает, что в турнирах без ничьих мерой противоречивости может служить число циклов длины 3.

Задача 5. *Докажите, что если в турнире без ничьих есть цикл длины k, то есть по крайней мере $k-2$ цикла длины 3.*

Указание к решению. Воспользуйтесь методом математической индукции.

При больших n перебор всех троек игроков является слишком трудоемким. Поэтому желательно иметь более простой способ нахождения числа циклов. Оказывается, что оно выражается через числа s_i:

$$NT = \frac{n(n-1)(2n-1)}{12} - \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i^2}{2}. \qquad (2)$$

Если вид формулы (2) дан, то доказать ее довольно просто: надо убедиться, что при замене результата одной встречи на противоположный правая и левая части (2) меняются одинаково. [2] Гораздо труднее понять, как эта формула может быть выведена. На конференции Турнира городов тайваньская команда нашла следующее красивое решение этой задачи:

Так как трех из n участников турнира можно выбрать $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ способами, число нециклических троек равно $C_n^3 - NT$. Посчитаем теперь количество таких троек A, B, C, что A выиграл у B, а B у C. Так как каждая циклическая тройка дает три такие цепочки, а нециклическая одну, общее число цепочек равно $C_n^3 + 2NT$. С другой стороны, если игрок B набрал s_i очков, то выигравшего у него игрока A можно выбрать $n - 1 - s_i$ способами, а проигравшего игрока $C - s_i$ способами. Следовательно, число цепочек, в которых B является средним игроком, равно $s_i(n-1-s_i)$, а общее число цепочек равно $\sum_i s_i(n-1-s_i)$. Приравняв два полученных выражения и использовав, что $\sum s_i = n(n-1)/2$, получим формулу (2).

[2] *Подробнее об этом можно прочесть в статье А.Заславского «О логичных и нелогичных турнирах» в «Кванте» №5 за 1997 год.*

Для турниров с ничьими проблема измерения противоречивости резко осложняется. Прежде всего это связано с тем, что необходимо считать тройки не одного, а трех типов.

Определение 2. В турнире с ничьими назовем тройку участников *нетранзитивной*, если результаты их встреч между собой задаются одной из трех следующих таблиц:

$$\begin{pmatrix} - & 1 & 0 \\ 0 & - & 1 \\ 1 & 0 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & 1 & 1/2 \\ 0 & - & 1 \\ 1/2 & 0 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & 1/2 & 1 \\ 1/2 & - & 1/2 \\ 0 & 1/2 & - \end{pmatrix}.$$

Суммарной нетранзитивностью турнира естественно считать величину $NT = a + bx + cy$, где a, b, c – число троек, соответственно, первого, второго и третьего видов, x, y – некоторые коэффициенты. Понятно, что для вычисления NT недостаточно знать количество очков s_i, но, возможно, его удастся выразить через числа v_i, n_i, p_i выигрышей, ничьих и проигрышей каждого участника. Таким образом, необходимо найти ответ на два вопроса:

а) Существуют ли веса x, y, при которых NT выражается через v_i, n_i, p_i?

б) Какова формула для NT при этих значениях x, y?

Метод, примененный для турниров без ничьих, позволяет ответить сразу на оба вопроса. Однако он требует довольно громоздких вычислений, поэтому приведем только ответ: $x = 1/2$, $y = 1/6$ и

$$NT = \frac{\left(n^3 - n\right) - \sum n_i\left(n_i + 2\right) - 3\sum\left(v_i - p_i\right)^2}{24}. \qquad (3)$$

Разумеется, если все $n_i = 0$, то (3) переходит в (2).

Задача 6. *Найдите максимально возможное значение NT.*

Ответ. $\left(n^3 - n\right)/24$ при нечетных n, $\left(n^3 - 4n\right)/24$ при четных.

Задача 7. *Верно ли, что все полутранзитивные турниры с одинаковыми s_i имеют одно и то же количество*

а) ничьих;

б) нетранзитивных троек?

Ответ. Нет. Например, можно рассмотреть следующие два турнира:

$$\begin{pmatrix} - & 1/2 & 1 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & - & 1/2 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & - & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & - & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & - & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & - & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & - & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & - & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & - & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & - \end{pmatrix}.$$

Практическая ценность формулы (3) оказывается сомнительной из-за невозможности дать содержательную интерпретацию коэффициенту $y = 1/6$. Впрочем, требование отсутствия троек третьего вида вообще кажется слишком жестким. Действительно, представим себе, что у нас есть n предметов различной массы и чашечные весы с некоторым порогом чувствительности, т.е. их чашки остаются в равновесии, если массы положенных на них предметов отличаются меньше чем на критическое значение ε. Тогда, если взвесить каждую пару предметов и занести результаты взвешиваний в турнирную таблицу, то в ней вполне могут оказаться тройки третьего вида (если разности весов первого и второго, а также второго и третьего предметов меньше порога, но разность весов первого и третьего больше). С другой стороны, очевидно, что полученный турнир обладает следующим свойством: если A выиграл у B, то A выиграл у всех игроков, набравших не больше очков, чем B, а B проиграл всем игрокам, набравшим не меньше очков, чем A. Назовем такой турнир *правильным.*

Задача 8. *а) Докажите, что правильный турнир является полутранзитивным.*

б) Докажите, что полутранзитивный турнир не является правильным тогда и только тогда, когда найдутся четыре игрока, результаты встреч которых друг с другом задаются одной из следующих таблиц:

$$\begin{pmatrix} - & 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & - & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & - & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & - & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & - & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & - \end{pmatrix}.$$

в) Приведите пример распределения очков, для которого не существует правильного турнира.

г) Найдите условия на количества очков, при которых правильный турнир существует.

Таким образом, турнир является правильным тогда и только тогда, когда он не содержит нетранзитивных троек первого и второго вида и четверок из пункта б) задачи 8. В качестве отклонения от правильности можно взять какую-нибудь функцию от количества таких троек и четверок. Но существует ли такая легко вычисляемая функция, нам неизвестно.

Задача 9. *Для турнира с данными s_i найдите:*

а) максимально возможное число ничьих;

б) минимально возможное число нетранзитивных троек.

Ответы на оба вопроса неизвестены.

Неправильные партии и странные игроки

В предыдущем разделе мерой противоречивости турнира считались циклы. Здесь мы рассмотрим ряд других показателей, которые можно использовать для той же цели.

Задача 10. *Будем называть встречу двух игроков неправильной, если выигравший ее набрал в итоге меньше очков, чем проигравший. Какую долю от общего числа встреч могут составлять неправильные?*

Эта задача (автор – С.Токарев) предлагалась на Московской математической олимпиаде в 2000 году. Интуитивно кажется очевидным, что неправильные партии должны составлять менее половины общего количества. Но это неверно! Доля неправильных партий может превышать любое число, меньшее $3/4$.

Решение. Докажем сначала, что доля неправильных встреч всегда меньше $3/4$. Пусть n – число игроков, $m = [n/2]$. Игроков, занявших первые m мест, назовем сильными, а остальных – слабыми (между участниками с одинаковой суммой очков места распределяются произвольно). Пусть x – число правильных партий между сильными и слабыми. Сумма очков, набранных сильными во встречах между собой, равна $m(m-1)/2$, а во встречах со слабыми она не больше x. Поэтому средний результат сильного не больше $(m-1)/2 + x/m$. Аналогично, средний результат слабого не меньше $(n-m-1)/2 + \left(m(n-m) - x\right)/(n-m) = (n+m-1)/2 - x/(n-m)$. Если есть неправильные партии, то не все игроки набрали поровну, и средний результат сильного больше, чем слабого. Отсюда $x > m(n-m)/2 \geq \left(n^2 - 1\right)/8$. Так как общее число партий равно $n(n-1)/2$, то доля правильных партий больше $(n+1)/(4n) > 1/4$.

Теперь докажем, что доля неправильных партий может быть сколь угодно близка к $3/4$. Возьмем сначала турнир из $2k + 1$ игроков, в котором каждый участник с номером $i \leq k$

проиграл участникам с номерами $i + 1, \ldots, i + k$ и выиграл у остальных, а каждый участник с номером $i > k$ выиграл у участников с номерами $i - k, \ldots, i - 1$ и проиграл остальным. Теперь «размножим» каждого участника, заменив его блоком из k новых, и пусть игроки из разных блоков играют друг с другом так же, как соответствующие прежние участники, а игроки из одного блока играют вничью. Занумеруем игроков в каждом блоке числами от 1 до k. Будем менять результаты участников из блока $k + 1$ во встречах с блоком $k + 1 - i$ ($i = 1, \ldots, k$). Пусть j-й игрок блока $k + 1$ при $j \le k - i$ играет вничью с игроками $j + 1, \ldots, j + i$ и выигрывает у остальных игроков блока $k + 1 - i$, а при $j > k - i$ выигрывает у игроков $j - k + i, \ldots, j - 1$ и делает ничью с остальными. В партиях блока $k + 1$ с блоком $k + 1 + i$ заменим ничьими ik проигрышей по аналогичной схеме. Теперь сумма очков одинакова внутри каждого блока и убывает при росте номера блока. Число неправильных партий составляет $\frac{3}{2}k^4 - \frac{k^3}{2} - k^2$. Поскольку общее число партий равно $k(2k+1)\left(k(2k+1)-1\right)/2$, то при больших k доля неправильных партий будет сколь угодно близка к $3/4$.

Определение 3. Назовем участника турнира *странным*, если он выиграл у всех, кто набрал больше очков, чем он, и проиграл всем, кто набрал меньше. С теми, кто выступил наравне с ним, странный игрок мог сыграть как угодно.

Подробно о странных игроках можно прочесть в статье Б.Френкина «Странные игроки» в «Кванте» № 6 за 1999 год. Поэтому здесь мы просто приведем перечень основных фактов.

Задача 11. *Тридцать три богатыря провели турнир без ничьих. Один странный богатырь победил всех, кто в итоге набрал больше очков, чем он, и проиграл всем, кто набрал меньше, чем он. Наравне со странным не набрал очков никто. Докажите, что странный богатырь занял место не выше тринадцатого и не ниже двадцать первого.*

Решение. Предположим, что странный занял место выше тринадцатого. Тогда количество тех, кто набрал меньше очков, чем он, превышает двадцать. Рассмотрим их поединки между собой. Каждый из них провел не менее 20 таких поединков. Кто-то выиграл не менее половины этих поединков и, следовательно, набрал в них не менее 10 очков. Кроме того, он выиграл у странного – значит, всего набрал не менее 11 очков. Странный набрал больше его – значит, не менее 12 очков. Но странный выиграл только у тех, кто занял более высокое место на турнире – следовательно, их не менее 12, и странный занял место не выше тринадцатого.

Поменяем теперь результаты всех матчей на противоположные. Условия задачи по-прежнему выполняются, и по доказанному странный богатырь занял место не выше тринадцатого. Снова поменяем результаты на противоположные. Последовательность мест изменится на обратную. Заметим теперь, что при 33 участниках двадцать первое место – это тринадцатое с конца.

Задача 12. *Докажите, что все странные участники имеют одинаковое количество очков.*

Решение. Пусть A и $Б$ – странные, причем A набрал больше очков, чем $Б$. Тогда A проиграл $Б$. Очевидно, A сыграл с каким-то третьим игроком (и не с одним) лучше, чем с ним сыграл $Б$. Но если такой игрок B набрал меньше очков, чем A, то B выиграл у A (по определению странного игрока). Если же B набрал не меньше очков, чем A, то B набрал больше, чем $Б$, и тогда $Б$ (как странный) выиграл у B. Значит, A ни с кем не сыграл лучше, чем $Б$, в противоречии с предыдущим.

Определение 4. Если игрок получил столько же очков, сколько странный, но сам не является странным, то назовем его *средним.* Тех, кто набрал больше, будем называть *сильными,* а тех, кто набрал меньше, – *слабыми.*

Задача 13. *Может ли странный игрок разделить первое место? А последнее?*

Решение. Пусть в турнире шесть участников. Первые трое сыграли между собой вничью, четвертый с пятым – также вничью, причем оба проиграли первым троим, а шестой выиграл у первых трех и проиграл четвертому и пятому. Тогда шестой разделил первое место с первыми тремя игроками и при этом является странным.

Чтобы поместить странного игрока на последнее место, поменяем все результаты на противоположные.

Задача 14. *Могут ли на первом или последнем месте находиться только странные?*

Решение. Пусть первое место полностью принадлежит странным и их число равно M. Любой из них проиграл всем, кто не делит первое место, и поэтому набрал не более $M - 1$ очков. Игрок, не находящийся на первом месте, выиграл у всех странных и потому получил результат не меньше M, что противоречит предыдущему. Значит, первое место не может принадлежать только странным.

Для последнего места рассуждение аналогичное.

Задача 15. *Известны результаты всех игроков. Известно также, что на турнире были странные участники. Сколько очков они набрали?*

Решение. Странный игрок набирает очки только во встречах с теми, кто получил не меньше очков. Поэтому он обладает следующим свойством:

Количество очков, полученное странным игроком, меньше числа игроков, набравших столько же или больше (включая его самого).

Пусть игрок A набрал больше очков, чем странный (который по определению выиграл у всех, кто набрал больше его). Тогда сумма очков игрока A заведомо больше, чем число игроков, имеющих столько или больше, чем он. Как следствие, A не обладает указанным свойством. Ответ на поставленный вопрос теперь ясен: количество очков странного участника – это наибольшее количество очков, которое меньше числа игроков, набравших столько или больше.

Отметим, что мы заново доказали, что все странные имеют одинаковую сумму очков,

Задача 16. *Докажите, что число странных всегда не больше $[N/2] - 1$.*

Решение. Все странные игроки делят одно и то же место в турнирной таблице. Пусть это место не является первым. Тогда участник, находящийся на первом месте, проиграл всем странным. Но он проиграл меньше встреч, чем выиграл. Значит, число проигранных им матчей меньше $N/2 - 1$ и (как целое) не больше $[N/2] - 1$, что и требуется. Если же странные участники делят первое место, то аналогичное рассуждение можно применить к последнему месту.

Задача 17. *Для произвольного $N \ge 4$ и произвольного натурального $K \le [N/2] - 1$ постройте пример, когда число странных равно K.*

Решение. Пусть $M = [N/2]$, $1 \le L \le M - 1$, игроки занумерованы от 1 до N и разделены на 4 группы. В первую группу включим участников с номерами от 1 до L, во вторую – от $L + 1$ до M, в третью – от $M + 1$ до $N - L$ и в четвертую – остальных. Пусть при этом игроки первой группы проиграли все матчи со второй группой и выиграли матчи с третьей и четвертой. Четвертая группа выиграла у второй и проиграла первой и третьей. Все остальные встречи закончились вничью. Нетрудно подсчитать, что игроки первой группы набрали по $N - M + (L-1)/2$ очков, т.е. не меньше $N/2$.

Игроки четвертой группы получили по $M-(L+1)/2$ очков – не больше $N/2-1$. Во второй и третьей группах результат равен $(N-1)/2$. Отсюда следует, что вторую группу составляют странные, первую – сильные, третью – средние, а четвертую – слабые. При этом число странных равно $[N/2]-L$, и за счет выбора L его можно сделать любым натуральным числом в пределах от 1 до $[N/2]-1$.

Задача 18. *Докажите, что на любом турнире сильные вместе со странными составляют меньше 2/3 от общего числа игроков, и что то же верно для слабых вместе со странными. Если же на турнире нет средних, то сильные и слабые составляют более чем по трети участников турнира, а странные – менее трети. Более точно, если N имеет вид $3M$, $3M+1$ или $3M+2$ (M натуральное), то число странных не превосходит, соответственно, $M-2$, $M-1$, M.*

Решение. Рассмотрим «среднеарифметического» сильного игрока (т.е. сложим очки, набранные сильными, и разделим на число таких участников). Этот условный игрок выиграл у стольких же сильных, скольким и проиграл. При этом он проиграл всем странным. Поэтому сумма очков «среднеарифметического» сильного игрока не больше, чем число средних и слабых плюс половина числа сильных. Аналогично, результат «среднеарифметического» странного игрока не меньше, чем число сильных плюс половина числа странных. Но эта сумма меньше, чем в первом случае. Как следствие, общее число средних и слабых больше, чем половина общего числа сильных и странных. А это и означает, что сильные и странные составляют менее двух третей от всего состава игроков. Утверждение о численности странных вместе со слабыми доказывается аналогично.

Задача 19. *Постройте пример (для произвольного $N \geq 5$), когда на турнире есть странные, нет средних, а число сильных, как и число слабых, равно наименьшему целому, большему $N/3$.*

Решение. Разделим участников турнира на три группы, причем в первые две включено по $[N/3]+1$ человек. Пусть игроки первой группы выиграли все матчи у игроков второй группы. Аналогично, вторая группа выиграла у третьей, а третья – у первой. Внутри каждой группы все матчи закончились вничью. Нетрудно убедиться, что третья группа состоит из странных, первая – из сильных и вторая – из слабых.

Задача 20. *Пусть в круговом турнире все участники набрали разное количество очков. Постройте пример, когда ничьих ровно две и имеется странный игрок.*

Решение. Пусть число игроков нечетно, они занумерованы от 1 до $2M+1$ и меньшие номера выиграли у больших со следующими исключениями: вничью сыграли первый с M-м и $(M+2)$-й с последним, игрок с номером $M+1$ выиграл у всех предыдущих и проиграл всем последующим. Нетрудно убедиться, что сумма очков убывает с ростом номера и $(M+1)$-й игрок – странный.

Задача 21. *В круговом турнире была только одна ничья. Любые два участника набрали разное количество очков. Докажите, что странных игроков нет.*

Решение (найдено участниками конференции Турнира городов). Предположим, что странный игрок есть. Так как он один, то он не занимает ни первого, ни последнего места. Следовательно, первый игрок проиграл странному и, значит, набрал не более $n-2$ очков, а последний выиграл у странного и, значит, набрал не менее одного очка. С другой стороны, так как в турнире была ровно одна ничья, два игрока имеют полуцелые количества очков и $n-2$ игрока – целые. Таким образом, существуют игроки, набравшие 1, 2,..., $n-2$ очка.

Рассмотрим последнего игрока. Так как он выиграл у странного, он набрал ровно 1 очко, т.е. проиграл всем остальным. Тогда предпоследний игрок (если это не странный) выиграл у странного и у последнего и, значит, проиграл всем остальным. Повторяя это рассуждение, получаем, что ни один из слабых игроков не мог сыграть вничью. Аналогично, вничью не мог сыграть ни один из сильных игроков. Противоречие.

(Окончание следует)

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Две незнакомые головоломки из знакомых деталей

(Начало см. на 2-й с. обложки)

Винт и гайка. Очень может быть, что эта головоломка была придумана примерно в то же время, что и детали, из которых она состоит. Место ее рождения пока не удалось установить даже с точностью до континента. В Африке, Европе и Азии найдены ее варианты, состоящие из палочек с привязанными к ним колечками. У коряков, живущих на полуострове Камчатка, эта игрушка считается национальной головоломкой и известна с незапамятных времен.

Задача состоит в том, чтобы переместить одно из колец на петлю с другим кольцом. В конструкции, приведенной на фотографии, требуется соединить винт и гайку.

Как в большинстве хороших головоломок, задача сначала кажется неразрешимой. А решается она, можно сказать, «в лоб»! Нужно упрямо продвигать гайку по веревке до тех пор, пока она не соединится с винтом. Только не пытайтесь просунуть большую гайку через маленькое отверстие. Вместо этого вытягивайте через отверстие веревочный узел и продвигайте веревку по гайке, а не наоборот.

Болт и шайба. Эта замечательная головоломка создана московским изобретателем Кириллом Гребневым. Чтобы оценить ее, следует иметь в виду, что придумать головоломку, внешне простую, но трудную в решении, гораздо сложнее, чем состоящую из множества деталей. Далеко не каждому изобретателю головоломок это под силу. По совокупности достоинств игрушку «Болт и шайба» можно назвать лучшей головоломкой 2006 года, причем не только в России. Она оказалась самой популярной на ежегодной октябрьской встрече голландского клуба «NKC», объединяющего более 400 любителей головоломок из 38 стран.

Задача головоломки очевидна – нужно снять шайбу с болта. Чтобы это стало возможным, необходимо отцепить от шайбы удерживающий ее шнурок. Петлю, которая охватывает шайбу, можно двигать в двух направлениях, но лишь одно направление приводит к цели. Будем надеяться, что этой подсказки вам окажется достаточно.

Желаю успехов!

А.Калинин

Несколько задач на закон сохранения механической энергии

А.ЧЕРНОУЦАН

В этой статье представлены задачи, которые предлагались в последние годы на письменных вступительных экзаменах по физике в РГУ нефти и газа им. И.М.Губкина. Эти задачи были отобраны по следующим критериям. Во-первых, при их решении используются подходы и методы, применение которых требует хорошего понимания физической сущности законов сохранения, что является сложным для многих абитуриентов. Во-вторых, преимущество отдавалось задачам, содержащим красивую физическую «изюминку» или подвох, что выделяет их в ряду аналогичных задач. В то же время, уровень сложности предлагаемых задач вполне «абитуриентский» (хотя и из верхнего эшелона), они не претендуют на высокое звание «олимпиадных».

Надеемся, что эта статья позволит вам глубже познакомиться с такой важной и нетривиальной темой, как закон сохранения механической энергии.

В первой группе из четырех задач внимание концентрируется на анализе возможных случаев, соответствующих различным соотношениям между исходными данными. Неумение увидеть скрытые в условии задачи возможности может привести к ошибочным результатам.

Задача 1. *Груз массой $m = 1,6$ кг подвешен к потолку на упругом резиновом шнуре жесткостью $k = 250$ Н/м. Грузу резким толчком сообщают начальную скорость $v_0 = 1$ м/с, направленную вертикально вверх. На какую максимальную высоту (отсчитывая от начальной точки) поднимется груз?*

Наиболее часто встречающаяся ошибка состоит в том, что абитуриенты не обращают внимания на слова про резиновый шнур и решают задачу так, как будто груз висит на пружине. Однако шнур, в отличие от пружины, работает только на растяжение. Если шнур не растягивать, а «сжимать» (сближать его концы), то он теряет форму, изгибается, не оказывая никакого сопротивления.

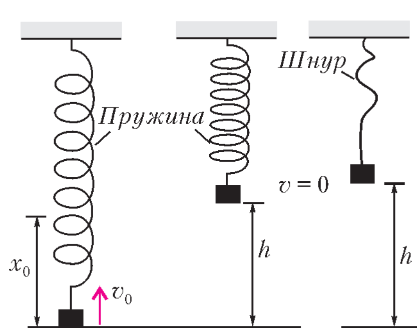


Рис. 1

Давайте и мы начнем решение со случая груза на пружине и посмотрим, не даст ли нам сам ответ (как это часто бывает) какую-нибудь подсказку, «сигнал» о том, что что-то не в порядке. Заодно поговорим о важном методическом приеме, помогающем существенно упрощать решение задач с вертикальными пружинами.

Запишем закон сохранения энергии системы, отсчитывая потенциальную энергию тяготения от начального положения груза (рис.1):

$$\frac{kx_0^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{k\left(x_0 - h\right)^2}{2}.$$

Здесь h – искомая высота, а x_0 – начальное растяжение пружины (шнура), которое находится из условия равновесия висящего груза:

$$kx_0 - mg = 0 .$$

Раскрывая скобки в законе сохранения энергии и подставляя x_0, приходим к совсем короткому уравнению

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kh^2}{2} .$$

Заметим, что ускорение силы тяжести g вообще не вошло в конечное уравнение, как будто поле тяжести отсутствует. В чем причина? Здесь проявилось следующее свойство груза на пружине: если отсчитывать общую потенциальную энергию для равнодействующей силы тяжести и силы упругости от положения равновесия, то она принимает вид $E_п = ky^2/2$, где $y = x - x_0$ – смещение из этого положения. Действительно, равнодействующая сила в положении равновесия равна нулю, а при смещении груза на y возникает сила $F_y = -ky$, равная изменению силы упругости (сила тяжести не меняется). Поскольку сама равнодействующая такая же, как сила упругости, то и потенциальная энергия для нее такая же, как для чистой силы упругости. Это свойство часто используется молча, без всяких пояснений, например – при рассмотрении вертикальных колебаний груза на пружине.

Подставляя численные данные в последнее уравнение, находим искомую высоту:

$$h = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} = 80 \text{ мм} .$$

Вернемся к задаче со шнуром. Казалось бы, полученный ответ как в общем виде, так и в числовом выражении ничем не помогает нам заметить допущенную ошибку. Однако будем внимательны и, заподозрив подвох, проверим, остается ли шнур в *растянутом* состоянии до самого верхнего положения груза. Для этого вычислим начальное растяжение шнура x_0 и сравним его с h:

$$x_0 = \frac{mg}{k} = 64 \text{ мм} < h = 80 \text{ мм} .$$

Видим, что груз при подъеме проходит точку, после которой шнур теряет свои упругие качества, изгибается, и сила упругости исчезает. Условие исчезновения силы упругости имеет вид

$$v_0\sqrt{\frac{m}{k}} > \frac{mg}{k} \text{, или } v_0 > g\sqrt{\frac{m}{k}} .$$

В таком случае задачу надо решать заново.

Упрощающий подход с объединением силы тяжести и силы упругости больше не действует (на некотором этапе движения сила упругости исчезает), и закон сохранения энергии надо записать так:

$$\frac{mv_0^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2} = mgh\,,$$

откуда (с учетом равенства $x_0 = mg/k$) получим окончательный ответ:

$$h = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{mg}{2k} = 82 \text{ мм}\,.$$

Задача 2. *Груз подвешен к потолку на упругом резиновом шнуре. На груз дважды подействовали постоянной силой, направленной вертикально вверх и равной в первом случае $F_1 = 3mg/4$, а во втором случае $F_2 = mg/4$. Во сколько раз максимальная высота подъема груза (отсчитанная от начальной точки) в первом случае больше, чем во втором?*

Решим задачу сначала в предположении, что сила упругости действует все время движения, т.е. как бы мысленно заменим шнур пружиной. Запишем закон сохранения (точнее – изменения) энергии, используя сокращенную запись для полной потенциальной энергии системы(см. задачу 1):

$$Fh = \frac{kh^2}{2} - 0\,,$$

откуда найдем искомую высоту:

$$h = \frac{2F}{k}\,.$$

В рамках сделанного предположения отношение высот в обсуждаемых двух случаях равнялось бы отношению внешних сил:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{F_1}{F_2} = 3\,.$$

Однако, наученные горьким опытом, мы должны проверить, остается ли шнур растянутым до достижения грузом максимальной высоты. Для этого должно выполняться условие $h < x_0$, т.е.

$$\frac{2F}{k} < \frac{mg}{k}\,, \quad \text{или} \quad F < \frac{mg}{2}\,.$$

Это условие выполняется для второго случая, поэтому

$$h_2 = \frac{2F_2}{k}\,.$$

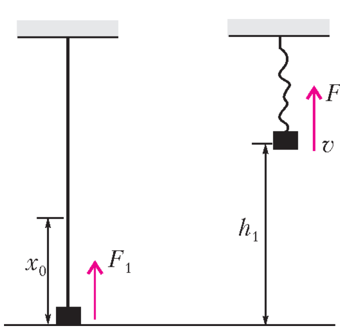


Рис. 2

Для первого же случая (рис.2) закон сохранения энергии надо написать заново (поскольку сила упругости на верхнем участке движения не действует, потенциальные энергии силы тяжести и силы упругости надо писать раздельно):

$$F_1h_1 = mgh_1 - \frac{kx_0^2}{2}\,.$$

Подставляя $x_0 = mg/k$, получим

$$h_1 = \frac{(mg)^2}{2k(mg - F_1)}\,.$$

Тогда окончательно

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{(mg)^2}{4F_2(mg - F_1)} = 4.$$

Задача 3. *Однородный стержень длиной $l = 2$ м, двигаясь вдоль своей длины по гладкой горизонтальной поверхности, начинает пересекать границу, за которой поверхность становится шероховатой с коэффициентом трения $\mu = 0{,}2$. Какое расстояние s проедет стержень с этого момента до остановки, если его начальная скорость $v_0 = 3$ м/с?*

Запишем закон сохранения энергии (теорему о кинетической энергии) в виде

$$A_{\text{тр}} = 0 - \frac{mv_0^2}{2}\,.$$

Вычислим работу силы трения $A_{\text{тр}}$ в предположении, что сила трения в процессе движения все время возрастает, т.е. что стержень остановится до того, как целиком пересечет границу. В тот момент, когда стержень проехал расстояние x (рис.3), сила трения,

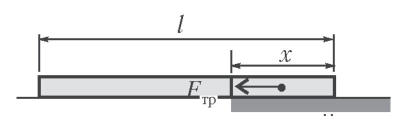


Рис. 3

действующая на кусок стержня длиной $x < l$, равна

$$F_{\text{тр}} = \mu mg\frac{x}{l}\,.$$

Поскольку сила трения представляет собой линейную функцию пройденного расстояния, ее работу можно вычислить по формуле

$$A_{\text{тр}} = -\frac{F_{\text{тр}1} + F_{\text{тр}2}}{2}s = -\frac{0 + \mu mg\frac{s}{l}}{2}s = -\frac{\mu mgs^2}{2l}\,.$$

Подставив в уравнение закона сохранения энергии, получаем

$$-\frac{\mu mgs^2}{2l} = -\frac{mv_0^2}{2}\,,$$

откуда

$$s = v_0\sqrt{\frac{l}{\mu g}} = 3 \text{ м}.$$

К сожалению, многие абитуриенты на этом заканчивают решение задачи, не заметив, что полученный ответ не имеет смысла, поскольку пройденное расстояние получилось больше длины стержня, а работа силы трения вычислялась в противоположном предположении. Правильное выражение для работы силы трения в случае $s > l$ имеет вид

$$A_{\text{тр}} = -\frac{0 + \mu mg}{2}l - \mu mg(s - l)\,.$$

Тогда из закона сохранения энергии получаем

$$s = \frac{l}{2} + \frac{v_0^2}{2\mu g} = 3{,}25 \text{ м}\,.$$

Конечно, можно поступить по-другому. Если сразу увидеть, что возможны разные случаи, то начать решение можно с выяснения того, какой случай реализуется. Например, найти минимальную скорость v_1, при которой стержень полностью заедет на шероховатую поверхность:

$$0 - \frac{mv_1^2}{2} = -\frac{0 + \mu mg}{2}l\,,$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{\mu gl} = 2 \text{ м/с}\,.$$

Поскольку $v_0 > v_1$, то ясно, что задний конец стержня обязательно пересечет границу.

Задача 4. *В шар массой $m_2 = 480$ г попадает пуля массой $m_1 = 20$ г, летящая со скоростью $v_1 = 100$ м/с по линии, проходящей через центр шара. Считая, что сила сопротивления движению пули в материале шара постоянна и равна $F_c = 1650$ Н, найдите конечную скорость шара. Диаметр шара $d = 5$ см.*

Запишем для данного удара законы сохранения импульса и энергии, с учетом перехода механической энергии во внутреннюю за счет работы силы сопротивления:

$$m_1v_1 = m_1u_1 + m_2u_2,$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} + Q,$$

$$Q = F_c d.$$

Исключая из этих уравнений конечную скорость пули

$$u_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1}u_2,$$

получим для конечной скорости шара u_2 квадратное уравнение

$$\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)u_2^2 - 2v_1u_2 + \frac{2F_cd}{m_2} = 0.$$

Решение этого уравнения

$$u_2 = \frac{v_1 \pm \sqrt{v_1^2 - 2F_cd\,(m_1+m_2)/(m_1m_2)}}{1+m_2/m_1}$$

дает два положительных ответа: 2,5 м/с и 5,5 м/с. Какой из них выбрать?

Многие школьники привыкли, что один из ответов обычно получается отрицательным, и заранее отбрасывают решение с минусом перед квадратным корнем. Другие не знают, что делать с двумя положительными корнями, и выбирают наибольший (и получают неверный ответ!). На самом деле, надо вычислить скорость пули в каждом из случаев (используя написанную выше формулу, выражающую u_1 через u_2):

$$u_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1}u_2 = \frac{v_1 \mp (m_2/m_1)\sqrt{v_1^2 - 2F_cd\,(m_1+m_2)/(m_1m_2)}}{1+m_2/m_1}.$$

Видно, что если выбрать верхние знаки в формулах для u_2 и u_1 (плюс для шара и минус для пули), то скорость пули получится *меньше*, чем скорость шара: $u_1 < u_2$ (в данном конкретном случае u_1 отрицательна и равна $u_1 = -32$ м/с). Значит, пуля в этом случае оказывается с той же стороны от шара, с которой она подлетала. Это соответствует отскоку пули при ударе назад с потерей энергии Q (см. далее упражнение 4). Наоборот, если взять нижние знаки (минус для шара и плюс для пули), то скорость пули оказывается *больше*, чем скорость шара (в данном случае $u_1 = 40$ м/с), что соответствует ситуации, когда пуля пробивает шар насквозь и вылетает с другой стороны. Значит, правильный ответ для скорости шара соответствует *меньшему* корню: $u_2 = 2{,}5$ м/с.

В следующей задаче упор делается на выбор правильного условия, определяющего конечное состояние системы.

Задача 5. *На гладкой горизонтальной плоскости лежат два бруска массами $m_1 = 400$ г и $m_2 = 100$ г, соединенные недеформированной пружиной. Первому бруску сообщают скорость $v_1 = 10$ м/с в направлении второго бруска. Найдите минимальную скорость этого бруска в процессе дальнейшего движения.*

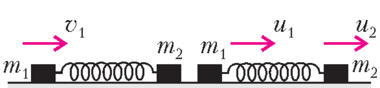


Рис. 4

Запишем законы сохранения импульса и энергии системы (рис.4):

$$m_1v_1 = m_1u_1 + m_2u_2,\quad \frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2} + \frac{kx^2}{2},$$

где x – деформация пружины. Главное для решения задачи – понять, чем интересующий нас момент, когда скорость бруска массой m_1 минимальна, отличается от всех остальных моментов движения. Для этого надо рассмотреть действующие на первый брусок силы.

Как только брусок массой m_1 придет в движение, пружина начнет сжиматься, и на него будет действовать сила упругости, направленная навстречу движению. Предположим, что скорость этого бруска не меняет направления, т.е. что u_1 все время положительна (позже нам придется проверить это предположение). Тогда скорость u_1 будет уменьшаться по модулю до тех пор, пока на брусок действует сжатая пружина. Когда пружина перейдет в растянутое состояние, сила упругости будет направлена по движению, и скорость бруска начнет возрастать. Минимальная скорость соответствует тому моменту, когда пружина снова (как до начала движения) придет в недеформированное состояние, т.е. когда $x = 0$. В этот же момент скорость второго бруска будет максимальной.

Система уравнений в этот момент

$$m_1v_1 = m_1u_1 + m_2u_2,\quad \frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}$$

совпадает с системой уравнений для центрального упругого удара (т.е. пружина как бы осуществляет растянутый по времени упругий удар). Решение этой задачи хорошо известно, мы приведем его без вывода:

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 = 6 \text{ м/с},\quad u_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1 = 16 \text{ м/с}.$$

Если скорость u_2 всегда положительна, т.е. получен правильный ответ для максимальной скорости второго бруска при любом соотношении масс, то скорость u_1 остается положительной только при условии $m_1 \ge m_2$. Если $m_1 < m_2$, то в процессе движения скорость первого бруска меняет знак, и ответ для минимальной скорости такой: $u_1 = 0$.

Отметим интересное отличие этой задачи от центрального упругого удара, например, двух шаров. Шары после удара перестают взаимодействовать и разлетаются. В нашем же случае пружина, соединяющая бруски, после рассмотренного момента растягивается, первый брусок начинает тормозиться, второй – разгоняться. Через некоторое время скорость первого бруска достигнет максимального значения u_1', а скорость второго – минимального u_2'. Пружина в этот момент опять не деформирована, т.е. эти скорости подчиняются той же самой системе уравнений. Поскольку скорости должны отличаться от найденных, они представляют собой второе решение этой системы, которое в задаче о центральном упругом ударе отбрасывают: $u_1' = v_1$, $u_2' = 0$.

Последние две задачи связаны с движением по окружности. Первая из них иллюстрирует, как можно описать движение модельного твердого тела, состоящего из точечных масс, закрепленных на невесомом стержне. Вторая показывает, как использовать движущиеся системы отсчета в задачах на законы сохранения при движении по окружности.

Задача 6. *Невесомый стержень, на концах которого закреплены два груза массой $m = 0{,}5$ кг каждый, может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. Ось делит* *стержень в отношении 1:3. Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают. С какой силой он действует на ось в вертикальном положении?*

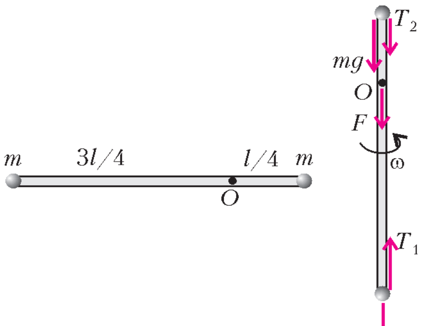


Рис. 5

Если в вертикальном положении сила натяжения нижней части стержня T_1, а верхней T_2, то действующая на ось сила равна (рис.5)

$$F = T_1 - T_2 .$$

Силы натяжения стержней найдем из выражений второго закона Ньютона для грузов:

$$T_1 - mg = m\omega^2 \cdot 0,75l,$$

$$T_2 + mg = m\omega^2 \cdot 0,25l,$$

где l – длина стержня. Отметим, что написанные формулы годятся и в том случае, когда верхняя часть стержня находится в сжатом состоянии ($T_2 < 0$). Угловую скорость вращения ω найдем из закона сохранения энергии системы (уровень отсчета потенциальной энергии примем в точке подвеса):

$$0 = mg \cdot 0,25l - mg \cdot 0,75l + \frac{m(0,25l\omega)^2}{2} + \frac{m(0,75l\omega)^2}{2},$$

откуда

$$\omega^2 = 1,6\frac{g}{l} .$$

Окончательно получаем

$$F = T_1 - T_2 = 2mg + 0,5m\omega^2 l = 2,8mg = 14 \text{ Н} .$$

Задача 7. *Демонстрационная установка состоит из наклонной плоскости, плавно переходящей в «мертвую петлю» радиусом R (рис.6). Установка закреплена на тележке, стоящей на горизонтальной плоскости. Груз массой $m_1 = 0,2$ кг съезжает с высоты $h = 3R$, отсчитанной от нижней точки петли. Чему равна сила давления груза на поверхность в верхней точке петли? Трением пренебречь. Масса установки вместе с тележкой m_2 в 4 раза больше массы груза.*

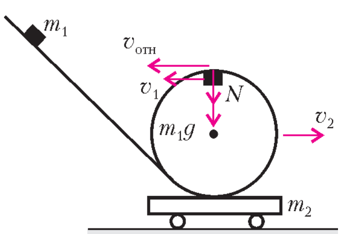


Рис. 6

Чтобы найти силу давления (точнее, нормальную силу реакции N), надо записать второй закон Ньютона для верхней точки петли. Но тут возникает проблема: в системе отсчета, связанной с землей, траектория движения груза отлична от окружности, поскольку тележка с установкой движутся с переменной скоростью. Это значит, что радиус кривизны траектории груза может отличаться от R. Выход состоит в том, чтобы записать второй закон Ньютона в системе отсчета, связанной с тележкой, где движение происходит по окружности радиусом R. Однако есть возражение: тележка под действием силы давления груза движется с ускорением, а значит, связанная с ней система отсчета не является инерциальной. Это возражение справедливо для всех моментов движения, кроме тех, когда груз проходит нижнюю и верхнюю точки петли. В эти моменты сила давления направлена вертикально и ускорение тележки равно нулю, следовательно, силы инерции, которые действуют все остальное время, обращаются в ноль.

Запишем второй закон Ньютона для верхней точки петли:

$$m_1 g + N = \frac{m_1 v_{отн}^2}{R} .$$

Здесь $v_{отн}$ – скорость груза относительно тележки, равная

$$v_{отн} = v_1 - v_2 ,$$

где v_1 и v_2 – проекции скоростей груза и тележки на горизонтальную ось. Эти скорости мы найдем из законов сохранения импульса и энергии:

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad m_1 gh = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + m_1 g \cdot 2R,$$

откуда

$$v_1^2 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} g(h - 2R) = \frac{8}{5} gR ,$$

и

$$v_{отн} = v_1 - v_2 = v_1 + \frac{m_1}{m_2} v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} v_1 = \frac{5}{4} v_1 .$$

Подставляя $v_{отн}$ во второй закон Ньютона, получим

$$N = \frac{m_1 v_{отн}^2}{R} - m_1 g = \frac{25}{16}\frac{m_1 v_1^2}{2} - m_1 g = \frac{3}{2} m_1 g = 3 \text{ Н} .$$

Упражнения

1. Груз массой 5 кг подвешен к потолку на упругом резиновом шнуре жесткостью 500 Н/м. Грузу дважды сообщают начальную скорость, направленную вертикально вверх. В первом случае эта скорость равна 0,5 м/с, во втором – 2 м/с. Во сколько раз максимальная высота подъема груза (отсчитанная от начальной точки) во втором случае больше, чем в первом?

2. Груз массой 2 кг подвешен к потолку на упругом резиновом шнуре. На груз дважды подействовали постоянной силой 15 Н, направленной в первом случае вертикально вверх, а во втором случае – вертикально вниз. На сколько процентов расстояние, пройденное грузом до остановки, во втором случае меньше, чем в первом?

3. Однородный стержень длиной 2 м, двигаясь вдоль своей длины по шероховатой горизонтальной поверхности, начинает пересекать границу, за которой поверхность становится гладкой. Скорость стержня в этот момент равна 1,6 м/с. Какое расстояние (в см) проедет стержень от этого момента до остановки, если коэффициент трения о шероховатую поверхность равен 0,2?

4. В шар массой 480 г попадает пуля массой 20 г, летящая со скоростью 100 м/с по линии, проходящей через центр шара. После удара пуля отскакивает назад, при этом при ударе выделяется 90 Дж тепла. Найдите конечную скорость шара.

5. Невесомый стержень, на конце которого закреплен груз массой 3 кг, а в середине – груз массой 4 кг, может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его свободный конец. Стержень приводят в верхнее положение и отпускают. С какой силой он будет действовать на ось в момент прохождения нижнего положения?

6. Два бруска массами 0,5 кг и 1 кг, лежащие на гладком полу, соединены пружиной жесткостью 900 Н/м. Вначале первый брусок упирается в стену, пружина не деформирована и расположена перпендикулярно стене. Второй брусок перемещают на 10 см в сторону первого и отпускают. Найдите максимальную скорость первого бруска в процессе дальнейшего движения.

7. Брусок стоит на гладкой горизонтальной плоскости. На бруске закреплен штатив, к которому на легкой нити подвешен груз массой 0,1 кг. Масса бруска вместе со штативом равна массе груза. Вначале нить с грузом удерживают в горизонтальном положении, затем отпускают. Найдите силу натяжения нити в момент, когда груз находится в нижней точке.