

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 апреля 2007 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1-2007» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2026» или «Ф2033». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2027–М2030, М2033 предлагались на XXVIII Турнире городов, задача М2031 предлагалась на II Всероссийской олимпиаде по геометрии имени И.Ф.Шарыгина.

Задачи М2026 – М2035, Ф2033–Ф2042

М2026. На сторонах AB , BC , CD и DA квадрата $ABCD$ выбраны, соответственно, точки P , M , N , Q так, что $\angle MAN = 45^\circ$, $PM \parallel AN$, $AM \parallel NQ$. Отрезок PQ пересекает AM и AN в точках F и G соответственно. Докажите, что площадь треугольника AFG равна сумме площадей треугольников FMP и GNQ .

В.Произволов

М2027. На доске написаны три натуральных числа x , y , z . Петя записывает на листке произведение каких-нибудь двух из этих чисел, а на доске уменьшает третье число на 1. С новыми тремя числами на доске он снова проделывает ту же операцию и т.д. до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет равным нулю. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на листке?

Е.Горский, С.Дориченко

М2028. Известно, что вруны всегда врут, правдивые всегда говорят правду, а хитрецы могут и врать, и говорить правду. Вы можете задавать вопросы, на которые есть ответ «да» или «нет» (например: «верно ли, что этот человек хитрец?»).

а) Перед вами трое – врун, правдивый и хитрец, которые знают, кто из них кто. Как и вам это узнать?

б) Перед вами четверо – врун, правдивый и два хитреца (все четверо знают, кто из них кто). Докажите, что хитрецы могут договориться отвечать так, что вы, спрашивая этих четверых, ни про кого из них не узнаете наверняка, кто он.

Б.Гинзбург, М.Гервер

М2029. Даны две бесконечные прогрессии, состоящие из положительных чисел: арифметическая и геометри-

ческая, причем любое число, встречающееся в геометрической прогрессии, встречается также и в арифметической прогрессии. Докажите, что знаменатель геометрической прогрессии – целое число.

Б.Френкин

М2030. Можно ли вписать правильный октаэдр в куб так, чтобы вершины октаэдра находились на ребрах куба?

Л.Радзивиловский

М2031. Прямые, содержащие медианы треугольника ABC , вторично пересекают его описанную окружность ω в точках A_1, B_1, C_1 . Прямые, проходящие через A, B, C и параллельные противоположным сторонам, пересекают ω второй раз в точках A_2, B_2, C_2 . Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

А.Заславский

М2032. а) Существует ли такое натуральное n , что для любого натурального k хотя бы одно из чисел $n^k - 1$, $n^k + 1$ имеет вид a^b для некоторых натуральных a и $b > 1$?

б*) Назовем натуральное число *антипростым*, если оно делится на квадрат любого своего простого делителя. Два натуральных числа назовем *близнецами*, если они отличаются на 2. Конечно или бесконечно множество пар антипростых чисел-близнецов?

В.Сендеров

М2033. У ведущего имеется колода из 52 карт. Зрители хотят узнать, в каком порядке лежат карты (не уточняя, сверху вниз или снизу вверх). Разрешается задавать ведущему вопросы вида «Сколько карт лежит между такой-то и такой-то картами?» Один из зрите-

лей знает, в каком порядке лежат карты. Какое наименьшее число вопросов он должен задать, чтобы остальные зрители по ответам на эти вопросы могли узнать порядок карт в колоде?

А.Шаповалов

M2034. На сторонах AB , BC , CA треугольника ABC выбраны, соответственно, точки X , Y , Z так, что треугольник XYZ подобен треугольнику ABC ($\angle X = \angle A$, $\angle Y = \angle B$). Докажите, что центр описанной окружности треугольника XYZ равноудален от точек пересечения высот треугольников ABC и XYZ .

Н.Николов (Болгария)

M2035. а) На окружности расставлены несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что числа можно разделить на три группы подряд идущих чисел так, чтобы суммы чисел в любых двух группах отличались не больше чем на 1. (Если в группе нет чисел, то сумма считается равной нулю.) б*) На отрезке расставлены несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что числа можно разделить на n групп подряд идущих чисел так, чтобы суммы чисел в любых двух группах отличались не больше чем на 1. (Если в группе нет чисел, то сумма считается равной нулю.)

М.Малкин, И.Богданов, Г.Челноков

Ф2033. По прямой дороге бежит кролик, его скорость постоянна и равна $v = 2$ м/с. Кролика замечает лиса – она находится в этот момент на расстоянии $L = 40$ м от дороги (кролик в этот момент также находится на расстоянии L от лисы). Лиса бросается в погоню, ее скорость равна по величине скорости кролика. На каком минимальном расстоянии от кролика лиса сможет оказаться через время $t = 40$ с после начала погони? Считать лису и кролика материальными точками.

З.Рафаилов

Ф2034. По гладкой горизонтальной поверхности подставки скользит маленькая гантелька, состоящая из очень тонкого легкого стерженька длиной 5 см и двух маленьких массивных шариков на концах (рис.1). Скорость гантельки направлена вдоль стержня и составляет 2 м/с. Соскользнув с края подставки, гантелька продолжает движение. Оцените число оборотов, которое она совершит, падая с высоты 30 м.

А.Повторов

Ф2035. Проводится расчет броска камня через тонкую вертикальную стенку. Расчет показал, что при бросании под углом 30° к горизонту минимальная скорость составляет 100 м/с, а при броске под углом 60° – достаточно 40 м/с. Какой скорости может хватить, если разрешено подойти к стенке поближе? Бросок производят с поверхности земли.

З.Простов

Ф2036. На гладкой горизонтальной поверхности находится узкая коробка длиной $L = 0,2$ м и массой $M =$

$= 100$ г, посередине коробки покоится маленький шарик массой $m = 10$ г. Коробке ударом придают скорость $v = 10$ см/с параллельно ее длинной стороне. Шарик может двигаться только вдоль коробки, ударяясь абсолютно упруго о ее торцы. Сколько ударов произойдет за первую минуту после начала движения коробки? Найдите смещение коробки за это время.

А.Шарилов

Ф2037. В сосуде постоянного объема находится смесь гелия и кислорода. Смесь нагревают от 300 К до 400 К, при этом половина атомов гелия покидают сосуд через очень мелкие трещины в стенках, а давление газа остается прежним. Во сколько раз изменяется при этом плотность смеси? Молярная масса кислорода имеет массу 32 г, молярная масса гелия – 4 г.

Г.Азов

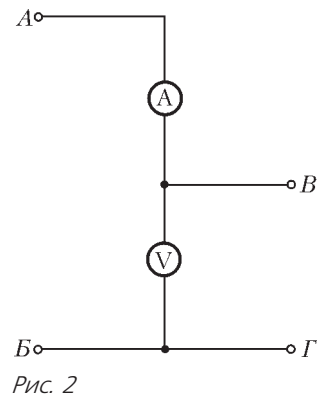
Ф2038. С порцией гелия производят циклический процесс – расширение газа при постоянном давлении, затем охлаждение газа при неизменном его объеме и, наконец, сжатие газа без подвода тепла снаружи до начального давления. Может ли термодинамический КПД такого цикла оказаться больше 50%?

А.Зильберман

Ф2039. Стрелочные вольтметры высокого класса точности имеют, как правило, очень низкое сопротивление, и включать их в цепь для измерения напряжения во многих случаях просто недопустимо – слишком сильно при этом изменится режим схемы (напряжение между исследуемыми точками при подключенном вольтметре станет совсем другим). Для измерения напряжений порядка 5 В предлагается использовать схему, состоящую из точного вольтметра V – предел измерений 10 В, сопротивление прибора 1000 Ом, класс точности 0,2, т.е. погрешность не превышает 0,2% от максимального значения шкалы, и микроамперметра A – ток полного отклонения 100 мкА, сопротивление прибора 1000 Ом, класс точности 2,5, т.е. погрешность не превышает 2,5% от максимального значения его шкалы. К точкам A и B схемы (рис.2) подключают измеряемое напряжение, между точками B и $Г$ включают регулируемый источник напряжения – лабораторный блок питания, напряжение которого можно очень плавно изменять в широких пределах. При измерении напряжение источника плавно изменяют, добиваясь минимального тока через микроамперметр. За результат принимают показание вольтметра при «нулевом» токе через микроамперметр. Будем считать, что минимальный ток, уверенно фиксируемый микроамперметром, составляет 2 мкА. Определите погрешность измерений получившегося «вольтметра» и его сопротивление.

З.Хитров

Рис. 1



Ф2040. Параллельно включены катушки с индуктивностями 1 Гн и 2 Гн, резистор сопротивлением 100 Ом и конденсатор емкостью 100 мкФ. К цепи подключают внешний источник напряжения, и после нескольких переключений элементов в некоторый момент через катушки протекают равные по величине токи 0,2 А, а через резистор в этот момент течет ток 0,1 А. Затем внешний источник отключают, предоставляя параллельную цепь самой себе. Найдите полный заряд, который после этого протечет через резистор, а также полное количество теплоты, которое выделится в резисторе. Элементы цепи считать идеальными.

А. Старов

Ф2041. Источник переменного напряжения включен между точками А и В цепи (рис.3). При какой частоте

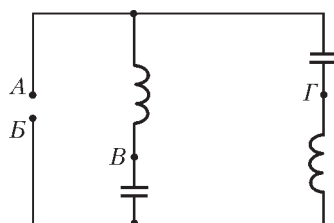


Рис. 3

источника амплитуда напряжения, измеренного между точками В и Г, будет ровно в 10 раз больше амплитуды напряжения источника? Конденсаторы имеют емкости $C = 10$ мкФ, катушки – индуктивности $L = 1$ Гн.

Ф. Азов

Ф2042. На гладкой горизонтальной поверхности находится груз массой $M = 2$ кг, к его боковым стенкам

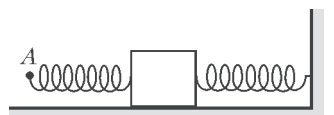


Рис. 4

приклеены две одинаковые пружины жесткостью $k = 100$ Н/м каждая (рис. 4). Одна из пружин прикреплена концом к стене, конец другой пружины мы перемещаем по горизонта-

ли. Координата точки А при этом изменяется по закону $x = 0,02 \cos 20t$ (в этой формуле время t измеряется в секундах, координата x – в метрах). Найдите амплитуду колебаний груза на этой частоте.

М. Учителев

Решения задач М2006–М2010, Ф2018–Ф2027

М2006. График линейной функции касается графика квадратичной функции $y = f(x)$, а график квадрата этой линейной функции получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вниз на величину p . Найдите p .

Ответ: $p = \frac{1}{4}$.

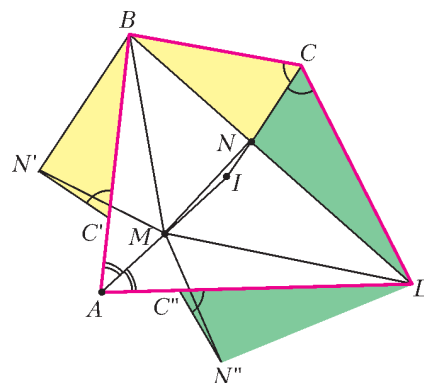
Пусть $y = l(x)$ – данная линейная функция. Тогда, из условия, $f(x) = l^2(x) + p$. Очевидно, $l(x)$ – непостоянная функция. Условие касания означает, что уравнение $l^2(x) + p = l(x)$ имеет единственное решение $x = x_0$. Но линейная функция, отличная от постоянной, каждое свое значение принимает ровно один раз. Значит, уравнение $l^2 + p = l$ должно иметь единствен-

ное решение $l = l_0$. Отсюда следует равенство нулю дискриминанта $D = 1 - 4p$, т.е. $p = \frac{1}{4}$.

Н. Агаханов

М2007. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I . На отрезках AI и IC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MBN = \frac{1}{2} \angle ABC$. Докажите, что $\angle MDN = \frac{1}{2} \angle ADC$.

Очевидно, AI и CI – биссектрисы углов BAD и BCD соответственно. Пусть для определенности $AB \geq BC$.



Рассмотрим поворот треугольника BCN вокруг точки B , переводящий его в треугольник $BC'N'$, где C' лежит на луче BA . Также рассмотрим поворот треугольника DCN вокруг точки D , переводящий его в треугольник $DC''N''$, где C'' лежит на луче DA . Имеем $BN = BN'$, $\angle MBN = \frac{1}{2} \angle ABC = \angle ABM + \angle CBN = \angle ABM + \angle C'BN' = \angle MBN'$. Отсюда следует, что треугольники MBN и MBN' равны, значит, $MN = MN'$.

Поскольку в описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, $AC' = AB - BC = AD - DC = AC''$, поэтому точки C' и C'' симметричны относительно биссектрисы AM угла BAD . Далее, $C'N' = CN = C''N''$, $\angle BC'N' = \angle BCN = \angle DCN = \angle DC''N''$, значит, точки N' и N'' также симметричны относительно AM , откуда $MN' = MN''$. Таким образом, мы получили, что $MN = MN''$, следовательно, треугольники DMN и DMN'' равны по трем сторонам. Отсюда

$$\begin{aligned} \angle MDN &= \angle MDN'' = \angle ADM + \angle C''DN'' = \\ &= \angle ADM + \angle CDN = \angle ADC - \angle MDN, \end{aligned}$$

т.е. $\angle MDN = \frac{1}{2} \angle ADC$, что и требовалось.

Вычислительное решение можно получить, применив многократно теорему синусов к треугольникам ABM , MBI и т.д.

О. Поройкова (ученица 11 кл.)

М2008. Назовем делитель натурального числа n маленьким, если он не превосходит $n/10000$, и большим – в противном случае. Конечно ли множество

чисел, у которых произведение всех больших делителей, отличных от самого числа, равно произведению всех маленьких?

Ответ: да.

В решении будем называть *большим* делителем числа большой делитель, меньший самого числа. Обозначим через $B(n)$ и $M(n)$ произведение всех больших и произведение всех маленьких делителей числа n соответственно. Если $B(n) = M(n)$, то число n назовем *удачным*.

Рассмотрим удачное число n и возьмем его некоторый большой делитель d (если таковых нет, то n – неудачное). Так как $1 < \frac{n}{d} < 10000$, то у числа $\frac{n}{d}$, а значит и у числа n , есть простой делитель $p < 10000$.

Предположим, у числа n имеется простой делитель $q > 10000$. Тогда каждый большой делитель d делится на q (иначе $d \leq \frac{n}{q} < \frac{n}{10000}$), при этом $\frac{d}{q}$ – маленький делитель. Поставим в соответствие большому делителю d маленький делитель $\frac{d}{q}$.

Очевидно, различным большим делителям соответствуют различные маленькие делители. В разложение на простые множители соответствующих делителей d и $\frac{d}{q}$ простое число p входит в равной степени. Кроме того, имеется маленький делитель $\frac{n}{q}$, который делится на p , но не поставлен в соответствие никакому большому делителю. Отсюда вытекает, что в разложение на простые множители числа $B(n)$ число p входит в меньшей степени, чем в разложение на простые множители числа $M(n)$, – противоречие с тем, что n удачное.

Итак, у n нет простых делителей, больших 10000. Тогда $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \dots, p_k$ – все различные простые числа, меньшие 10000, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – некоторые целые неотрицательные числа. Множество удачных чисел, для которых $\alpha_i \leq 20000$ для всех $i = 1, 2, \dots, k$, конечно. Пусть для некоторого i показатель $\alpha_i > 20000$. Так как $p_i^{10000} > 10000$, то

$$\frac{n}{p_i^{10000}}, \frac{n}{p_i^{10001}}, \dots, \frac{n}{p_i^{20000}} \text{ – маленькие делители числа } n.$$

$$\text{Отсюда } M(n) \geq \frac{n}{p_i^{10000}} \cdot \frac{n}{p_i^{10001}} \cdot \dots \cdot \frac{n}{p_i^{20000}} \geq \frac{n^{10001}}{c}, \text{ где}$$

$$c = 10000^{10001} \cdot 10000^{10002} \cdot \dots \cdot 10000^{20000}.$$

С другой стороны, большими делителями числа n могут являться только числа $\frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \dots, \frac{n}{9999}$, поэтому

$$B(n) \leq \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n}{9999} < n^{10000}.$$

Из равенства $B(n) = M(n)$ следует, что $n^{10000} > \frac{n^{10001}}{c}$, откуда $n < c$, и множество таких n конечно.

П. Кожевников

M2009. Даны $n > 1$ приведенных квадратных трехчленов $x^2 - a_1x + b_1, \dots, x^2 - a_nx + b_n$, причем все $2n$ чисел $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ различны. Может ли случить-

ся, что каждое из чисел $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ является корнем одного из этих трехчленов?

Ответ: не может.

Предположим противное. Поскольку все $2n$ коэффициентов различны, то они и составляют все множество корней наших трехчленов, причем у каждого из них два корня. Пусть α_i, β_i – корни трехчлена $x^2 - a_ix + b_i$. Тогда по теореме Виета $a_i = \alpha_i + \beta_i$, $b_i = \alpha_i\beta_i$. Поскольку множество корней многочленов совпадает с множеством $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$, то

$$a_1 + \dots + a_n = (\alpha_1 + \beta_1) + \dots + (\alpha_n + \beta_n) =$$

$$= (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n) = (a_1 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n).$$

Следовательно, $b_1 + \dots + b_n = 0$.

Далее, $\alpha_i^2 + \beta_i^2 = (\alpha_i + \beta_i)^2 - 2\alpha_i\beta_i = a_i^2 - 2b_i$. Отсюда

$$(a_1^2 + b_1^2) + \dots + (a_n^2 + b_n^2) = (\alpha_1^2 + \beta_1^2) + \dots + (\alpha_n^2 + \beta_n^2) =$$

$$= (a_1^2 + \dots + a_n^2) - 2(b_1 + \dots + b_n) = a_1^2 + \dots + a_n^2.$$

Значит, $b_1^2 + \dots + b_n^2 = 0$, т.е. все коэффициенты b_i равны нулю. Это противоречит тому, что они различны.

А. Бадзян

M2010*. Для натуральных чисел m и n обозначим через $F(m, n)$ количество всех связанных клеточных фигур в прямоугольнике $m \times n$. Докажите, что четность числа $F(m, n)$ совпадает с четностью числа $\frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{m(m+1)}{2}$. (Связная клеточная фигура – это такое непустое множество клеток, что из любой клетки этого множества можно пройти в любую другую клетку этого множества по клеткам этого множества, переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетку.)

Положим $F(m, 0) = 0$. Связные фигуры в прямоугольнике $m \times 1$ – это m фигур из одной клетки и полоски из двух или более клеток. Каждая полоска определяется парой клеток – первой и последней, поэтому

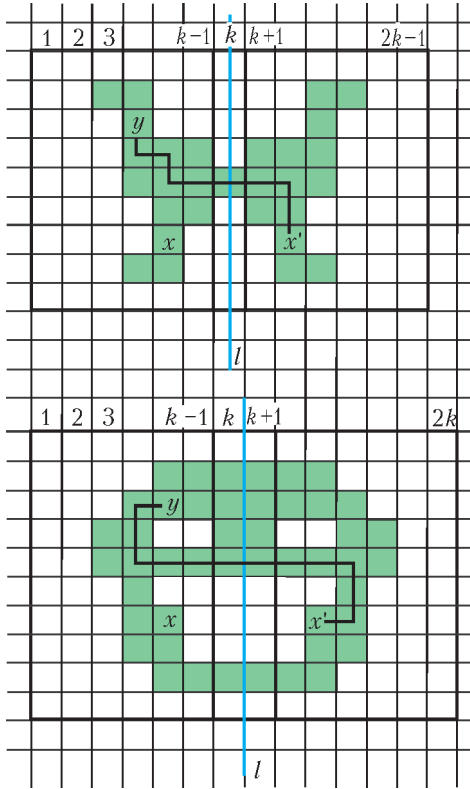
$$F(m, 1) = m + \frac{m(m-1)}{2} = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Пусть в прямоугольнике m строк и $n > 1$ столбцов. Обозначим через l вертикальную ось симметрии. Каждой связанной фигуре соответствует фигура, симметричная относительно l , поэтому несимметричные относительно l фигуры разбиваются на пары, и четность $F(m, n)$ совпадает с четностью количества связанных фигур, симметричных относительно l .

Рассмотрим некоторую фигуру T , симметричную относительно l .

Пусть n нечетно, $n = 2k - 1$, $k \geq 2$. Фигура T содержит хотя бы одну клетку k -го столбца, иначе из клетки фигуры T невозможно пройти по клеткам T в симметричную относительно l клетку, переходя каждый раз в соседнюю клетку. Заметим, что часть T_1 фигуры T , расположенная в k самых левых столбцах, связна. Действительно, рассмотрим две клетки x и y фигуры T_1 . Пусть x' – клетка, симметричная x относительно

l , а $x', z_1, z_2, \dots, z_t, y$ – последовательность клеток, образующая путь из x' в y по соседним клеткам фигуры T . Тогда, заменяя в этом пути клетки, лежащие правее k -го столбца, на симметричные относительно l , мы получим путь из x в y по соседним клеткам фигуры T_1 (см. рисунок). Наоборот, если фигура T_1 расположена в прямоугольнике $m \times k$, состоящем из k самых



левых столбцов, связна и содержит хотя бы одну клетку k -го столбца, то можно однозначно продолжить фигуру T_1 до связной фигуры T , симметричной относительно l . Количество связных фигур в прямоугольнике $m \times k$ равно $F(m, k)$, среди них $F(m, k-1)$ фигур лежат в первых $k-1$ столбцах (т.е. не содержат клеток k -го столбца). Следовательно, количество связных симметричных относительно l фигур в прямоугольнике $m \times (2k-1)$ равно $F(m, k) - F(m, k-1)$. Для четного $n = 2k$ ($k \geq 1$), рассуждая аналогично, установим взаимно однозначное соответствие между связными симметричными относительно l фигурами и связными фигурами, расположенными в первых k столбцах и содержащими хотя бы одну клетку k -го столбца. Отсюда вытекает, что количество связных симметричных относительно l фигур в прямоугольнике $m \times 2k$ равно $F(m, k) - F(m, k-1)$. Итак, для $n = 2k-1$ и $n = 2k$ четность $F(m, n)$ совпадает с четностью числа $F(m, k) - F(m, k-1)$.

Докажем индукцией по n , что $F(m, n)$ нечетно тогда и только тогда, когда m и n дают остаток 1 или 2 при делении на 4; отсюда сразу последует утверждение задачи. Утверждение верно при $n = 0$ и $n = 1$. Пусть m дает остаток 0 или 3 при делении на 4. Предположим, что утверждение верно для $F(m, 0)$,

$F(m, 1), \dots, F(m, n-1)$, т.е. эти числа четные. Если $n = 2k-1$, $k \geq 2$, или $n = 2k$, $k \geq 1$, то $n > k$, поэтому $F(m, n)$ четно, так как $F(m, k) - F(m, k-1)$ четно. Пусть m дает остаток 1 или 2 при делении на 4. Предположим, что утверждение верно для чисел $F(m, 0), F(m, 1), \dots, F(m, n-1)$, т.е. $F(m, s)$ нечетно тогда и только тогда, когда s дает остаток 1 или 2 при делении на 4. Тогда $F(m, s) - F(m, s-1)$ нечетно тогда и только тогда, когда s нечетно. Отсюда следует, что $F(m, n)$ нечетно тогда и только тогда, когда $n = 2(2l+1)-1 = 4l+1$ или $n = 2(2l+1) = 4l+2$.

А.Бадзян

Ф2018. Точка движется вдоль оси x , скорость точки пропорциональна квадрату ее координаты. Средняя скорость точки на участке (1 м; 2 м) составила 1 м/с. Найдите среднюю скорость на участках (2 м; 4 м) и (1 м; 4 м).

Разобьем (мысленно!) каждый участок на N равных кусочков. Кусочки на отрезке (2 м; 4 м) вдвое длиннее, чем на отрезке (1 м; 2 м), зато скорости на кусочках с одинаковыми номерами отличаются в 4 раза. Итак, отрезок (2 м; 4 м) точка проедет в 2 раза быстрее, а длина его вдвое больше длины отрезка (1 м; 2 м) – средняя скорость на втором участке будет 4 м/с. Если теперь посмотреть на участок (1 м; 4 м), то со скоростью 1 м/с точка движется 1 с, участок (2 м; 4 м) отнимает 0,5 с – всего точка проходит 3 м за 1,5 с. Значит, средняя скорость на этом участке равна 2 м/с.

З.Рафаилов

Ф2019. На тонком и легком жестком стержне длиной L закреплены два тела – массой M посредине стержня и массой $2M$ на одном из его концов. Другой конец стержня закреплен шарнирно. Получившийся маятник раскачивается в вертикальной плоскости, максимальный угол отклонения от вертикали составляет 1° . Найдите период колебаний этого маятника и максимальную разность натяжений половин стержня при движении.

Для нахождения периода колебаний значение максимального угла отклонения нас интересовало не должно – лишь бы этот угол был малым. Найдем связь между максимальным значением угла отклонения α_m и максимальным значением угловой скорости стержня $\frac{v_m}{L}$ (тут v_m – максимальная скорость нижнего груза массой $2M$) из закона сохранения энергии:

$$2Mg(L - L \cos \alpha_m) + Mg(0,5L - 0,5L \cos \alpha_m) = \frac{2Mv_m^2}{2} + \frac{M(0,5v_m)^2}{2}, \text{ откуда } v_m = \alpha_m \sqrt{\frac{10}{9}gL}.$$

Для гармонических колебаний с периодом T эта связь записывается так:

$$\frac{v_m}{L} = \alpha_m \frac{2\pi}{T}, \text{ откуда } T = \sqrt{\frac{18\pi^2 L}{5g}}.$$

Максимальная разность силы натяжения верхней по-

ловины стержня T_1 и силы натяжения нижней половины T_2 легко находится из уравнения движения тела массой M в тот момент, когда стержень проходит вертикальное положение:

$$T_1 - T_2 = Mg + \frac{M(0,5v_m)^2}{0,5L} = Mg \left(1 + \frac{5}{9} \alpha_m^2 \right) = \\ = Mg \left(1 + \frac{5}{9} \left(\frac{\pi}{180} \right)^2 \right) \approx Mg (1 + 1,7 \cdot 10^{-4}).$$

Р.Простов

Ф2020. Крыло аиста имеет поперечную площадь 2 м^2 , оно движется вниз с постоянной скоростью 2 м/с в течение интервала времени $0,2 \text{ с}$ и столько же времени – вверх. Может ли аист при собственной массе 2 кг лететь на постоянной высоте с грузом массой 3 кг ? Для тех, кто не видел аиста: у него ровно два крыла.

Если считать, что при движении крыла со скоростью v аист «отбрасывает» вниз порцию воздуха со скоростью v , то нужно разумно оценить объем (массу) этой порции. Максимальная величина – порция воздуха в объеме $V = 2Sv\tau \approx 2 \cdot 2 \text{ м}^2 \cdot 2 \text{ м/с} \cdot 0,2 \text{ с} = 1,6 \text{ м}^3$ (замечаемый крылом объем), ее масса составляет $m = \rho V \approx 1,2 \text{ кг/м}^3 \cdot 1,6 \text{ м}^3 \approx 2 \text{ кг}$. За время $\tau = 0,2 \text{ с}$ передается импульс $mv \approx 4 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$, т.е. действует сила

$$F = \frac{mv}{\tau} \approx \frac{4 \text{ кг} \cdot \text{м/с}}{0,2 \text{ с}} = 20 \text{ Н}.$$

Такой силы достаточно только для того, чтобы самого аиста поддерживать в воздухе.

При расчете мы учитывали только отброшенный вниз воздух, считая, что при движении крыла вверх воздух его плавно обтекает. Для того чтобы нести груз, например качан капусты массой 3 кг , аист должен захватывать и отбрасывать вниз почти вдвое большую порцию воздуха!

А.Птицын

Ф2021. В глубинах космоса, вдали от всех других тел, летает жидкая планета из ртути – огромный однородный шар. Ускорение свободного падения на поверхности планеты составляет 1000 м/с^2 . Стальной шарик объемом 1 см^3 находится на расстоянии трети радиуса планеты от ее центра. Найдите полную силу, которая действует на шарик. Плотность ртути $13,6 \text{ г/см}^3$, плотность стали $7,8 \text{ г/см}^3$.

Если бы вместо стального шарика был такой же по размерам «ртутный шарик», то действующие на него силы были бы уравновешены (ну, это очевидно!). При этом сила притяжения к центру планеты была бы уравновешена разностью сил давления жидкости.

Если снова посмотреть на стальной шарик, то станет ясно, что разность сил давления останется той же, а гравитационная сила уменьшится, значит, результирующая сила будет направлена от центра. Гравитационная сила создается только «внутренней» частью шарообразной планеты, сила притяжения там в 3 раза меньше, чем у поверхности.

Окончательно, сила, действующая на шарик, равна

$$F = \frac{1}{3} \rho_{\text{рт}} V g - \frac{1}{3} \rho_{\text{с}} V g = \frac{1}{3} V g (\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{с}}) = \\ = \frac{1}{3} \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 \cdot 10^3 \text{ м/с}^2 \cdot (13,6 \cdot 10^3 - 7,8 \cdot 10^3) \text{ кг/м}^3 \approx \\ \approx 2 \text{ Н}.$$

Железный шарик в жидкой ртути всплывет на поверхность.

З.Шариков

Ф2022. Порция разреженного гелия находится в сосуде с поршнем. С гелием проводят замкнутый тепловой цикл, который состоит из четырех стадий. На первой стадии газ расширяется вдвое, при этом давление газа все время пропорционально его объему. На второй стадии газ продолжает расширяться – но уже при неизменном давлении, объем газа на этой стадии увеличивается еще в 4 раза. Следующая стадия – давление газа снова пропорционально его объему, газ охлаждается, пока его давление не упадет вдвое. И, наконец, четвертая стадия – охлаждение при неизменном давлении до начального состояния. Найдите термодинамический КПД этого цикла.

Газ получает тепло на участках AB и BC (см. рисунок). Общее полученное количество теплоты равно:

$$Q_{AB} = \frac{3}{2} pV + \nu C_V (4T - T), \quad Q_{BC} = \nu C_p (16T - 4T), \\ Q = Q_{AB} + Q_{BC} = \frac{3}{2} pV + \frac{3}{2} \nu R \cdot 3T + \frac{5}{2} \nu R \cdot 12T = 36pV.$$

Работу найдем как площадь, ограниченную графиком цикла:

$$A = \frac{1}{2} pV + 2pV + 2pV = 4,5pV.$$

Термодинамический коэффициент полезного действия этого цикла будет равен

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{4,5pV}{36pV} = \frac{1}{8} = 12,5\%.$$

Р.Циклов

Ф2023. На горизонтально расположенном непроводящем стержне закреплены два маленьких тела, заряженных положительно (заряды нам неизвестны). Еще одно положительно заряженное тело – маленькая бусинка – может двигаться без трения вдоль стержня. Бусинка совершает малые колебания около положения равновесия. Во сколько раз изменится период таких колебаний, если расстояние между неподвижными зарядами уменьшится вдвое (разумеется, их для этого придется сделать на некоторое время подвижными)?

Пусть один из неподвижных зарядов равен Q и расстояние от него до равновесного положения бусинки с зарядом q составляет l . Тогда для второго заряда, равного nQ , это расстояние составит $l\sqrt{n}$. Сместим теперь заряд q вдоль прямой на очень малое расстояние x в сторону заряда nQ . Тогда сила, действующая на бусинку, будет равна

$$F = k \frac{Qq}{(l+x)^2} - k \frac{nQq}{(\sqrt{n}l-x)^2} =$$

$$= \frac{kQq}{l^2} \left(\frac{1}{\left(1+\frac{x}{l}\right)^2} - \frac{n}{\left(\sqrt{n}-\frac{x}{l}\right)^2} \right) =$$

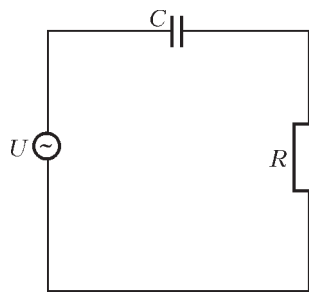
$$= \frac{kQq}{l^2} \frac{n - 2\sqrt{n}\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2} - n - 2n\frac{x}{l} - n\frac{x^2}{l^2}}{\left(1+\frac{x}{l}\right)^2 \left(\sqrt{n}-\frac{x}{l}\right)^2} =$$

$$= \frac{kQq}{nl^2} \frac{2x}{l} (-\sqrt{n} - n)$$

(мы пренебрегаем слагаемыми вида x^2/l^2 по сравнению с величинами x/l). Видно, что

$$F \sim \frac{1}{l^3}, \text{ т.е. } \omega^2 \sim \frac{1}{l^3}, \text{ или } T = \frac{2\pi}{\omega} \sim l^{3/2}.$$

Значит, период колебаний станет меньше в $2\sqrt{2}$ раз.
А.Простов



Ф2024. К обычной сети 220 В, 50 Гц подключены последовательно соединенные конденсатор емкостью 1 мкФ и нагреватель – резистор. Найдите максимальную мощность такого нагревателя. Кстати – зачем там понадобился конденсатор?

Ток в цепи (его действующее значение) равен (см. рисунок)

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}.$$

Тепловая мощность нагревателя равна

$$P = I^2 R = \frac{U^2 R}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}.$$

Проще найти минимум обратной величины, т.е.

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{U^2} \left(R + \frac{1}{\omega^2 C^2 R} \right).$$

Видно, что минимум соответствует сопротивлению

$$R = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} \text{ Ом} \approx 3,2 \cdot 10^3 \text{ Ом}.$$

При этом максимальная мощность нагревателя будет равна

$$P_{\max} = \frac{U^2}{2R} \approx \frac{220^2}{2 \cdot 3,2 \cdot 10^3} \text{ Вт} \approx 7,6 \text{ Вт}.$$

Конденсатор нужен потому, что он «гасит» часть сетевого напряжения, а тепло на нем не выделяется. Это удобно, если прибор (например, паяльник) рассчитан на низкое напряжение питания (часто можно встретить приборы на 36 В), а трансформатор дорог и не очень удобен.

А.Зильберман

Ф2025. К «мосту» из конденсаторов (рис.1) подключили батарейку напряжением U_0 , затем ее отключили, а между точками А и В включили катушку индуктивностью L . Найдите максимальный ток через катушку. Найдите также полный заряд, протекавший через катушку, и выделившееся в ней количество теплоты. Сопротивление соединительных проводов очень мало, сопротивление провода, которым намотана катушка, считать небольшим.

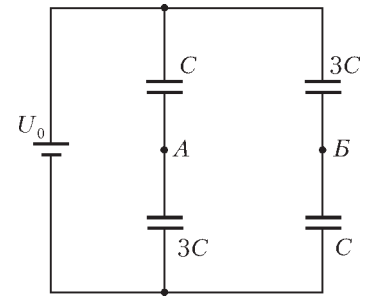


Рис. 1

После отключения батарейки каждый конденсатор имеет заряд $q = \frac{3}{4}CU_0$, и полная энергия системы равна

$$W_1 = \frac{3}{4}CU_0^2.$$

Пусть в момент, когда $\varphi_A = \varphi_B$ (при максимальном токе катушки индуктивности) заряды конденсаторов слева Q_1 и Q_2 (рис.2), тогда справа заряды будут Q_2 и Q_1 (симметрия тут очевидна). Для равенства потенциалов φ_A и φ_B нужно, чтобы выполнялось такое соотношение между зарядами: $Q_2 = 3Q_1$. Из закона сохранения заряда (верхние пластины конденсаторов емкостями C и $3C$) получим

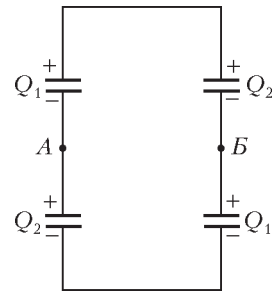


Рис. 2

$$Q_1 + Q_2 = \frac{3}{2}CU_0.$$

Отсюда находим

$$Q_1 = \frac{3}{8}CU_0 \text{ и } Q_2 = \frac{9}{8}CU_0.$$

Теперь общая энергия конденсаторов равна

$$W_2 = 2 \left(\frac{Q_1^2}{2C} + \frac{Q_2^2}{6C} \right) = \frac{9}{16}CU_0^2.$$

В соответствии с законом сохранения энергии,

$$W_1 = W_2 + \frac{LI_m^2}{2},$$

откуда

$$I_m = \sqrt{\frac{2(W_1 - W_2)}{L}} = \sqrt{\frac{3CU_0^2}{8L}}.$$

Перетекающий через катушку заряд посчитать легко: вначале суммарный заряд пластин, подключенных к точке А, был нулевым, теперь он равен

$$Q = -Q_1 + Q_2 = \frac{3}{4}CU_0.$$

Значит, столько и перетекло через катушку.

В тепло уйдет «бывшая» энергия катушки, подсчитанная для случая $\Phi_A = \Phi_B$:

$$W_{\text{тепл}} = W_1 - W_2 = \frac{3}{16}CU_0^2.$$

При решении мы считали, что за часть периода колебаний до достижения максимального тока через катушку только малая часть энергии системы перейдет в тепло.

Р. Старов

Ф2026. Для задержки во времени звуковых сигналов в прежние годы часто использовали массивную пружину, вдоль которой распространялась упругая волна. Итак, длинная однородная пружина лежит на гладком горизонтальном столе. За один конец пружину начинают растягивать, при этом ее длина увеличивается за 1 с на 5 см. Через какое время упругая волна добежит до второго конца пружины? Длина всей пружины 5 м, полная ее масса 2 кг, а жесткость 100 Н/м.

Для того чтобы конец пружины двигался с постоянной скоростью $v = 5$ см/с, нужно прикладывать неизменную силу F – во всяком случае, до того момента, когда упругая волна добежит до второго конца пружины и он придет в движение. Обозначим скорость упругой волны в пружине буквой c , тогда искомый интервал

времени будет равен $T = \frac{L}{c}$, где L – длина пружины.

Пусть от начала движения прошло время $\tau < T$. Тогда длина «работающей» части пружины равна $c\tau$ и растянута на $x = v\tau$. Для этой части жесткость равна

$k^* = k \frac{L}{c\tau}$, и сила упругости составляет

$$F = k^*x = k \frac{L}{c\tau} v\tau = kL \frac{v}{c}.$$

С другой стороны, со временем меняется импульс пружины – за счет вовлечения все новых ее частей в движение со скоростью v :

$$F\tau = m^*v = m \frac{c\tau}{L} v, \text{ откуда } F = \frac{mcv}{L}.$$

Сравнивая два выражения для силы F , получаем

$$kL \frac{v}{c} = \frac{mcv}{L}, \text{ или } c^2 = \frac{kL^2}{m}.$$

Отсюда находим искомое время:

$$T = \frac{L}{c} = \sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{2 \text{ кг}}{100 \text{ Н/м}}} = 0,14 \text{ с}.$$

Интересно, что ответ не зависит от длины пружины. На самом деле, зависит – длина «спрятана» в значения массы и жесткости. Если увеличить длину пружины, не меняя свойств отдельных витков, то изменятся и масса m , и жесткость k . В результате, если увеличить число витков, например, вдвое (длина при этом будет $2L$), то масса увеличится вдвое, жесткость уменьшится вдвое и время запаздывания также увеличится вдвое. А вот от скорости движения конца пружины ответ и в самом деле не зависит – лишь бы она была мала по сравнению со скоростью распространения упругой волны.

Р. Александров

Ф2027. Дно очень узкого и глубокого колодца квадратного сечения освещают подвешенной на уровне земли маленькой лампочкой, равноудаленной от его стенок. Стенки колодца зеркальные, но покрыты тонким ровным слоем пыли, так что отражается только 98% энергии падающего света. Во сколько раз темнее станет в центре дна колодца, когда пыли со временем станет в 2 раза больше?

Заметим, что когда пыли станет в 2 раза больше, коэффициент отражения уменьшится от 0,98 до 0,96 (поглощается вдвое больше).

Стоя на дне колодца, мы видим над головой настоящий источник света, т.е. лампочку, и множество мнимых источников, расположенных по центрам смежных друг с другом квадратов. Яркость мнимого источника зависит от соответствующего числа отражений от стенок. Например, если мнимый источник находится на m «клеточек» правее и на n «клеточек» выше, то число отражений, которое испытает луч, идущий к нам от этого источника, будет $m + n$. Примем освещенность от истинной лампочки за единицу. Тогда освещенность от указанного мнимого источника будет $E = k^{m+n}$, где k – коэффициент отражения. Здесь мы пренебрегаем изменением расстояния до источника, так как основной вклад в освещенность будут давать близкие к истинному источники. Как легко заметить, существуют такие мнимые источники, что отрезок, соединяющий их с центром дна (где мы стоим), содержит вершину квадрата. Очевидно, что в очень близкой к нам точке дна освещенность от такого источника будет описываться приведенной выше формулой, поскольку отрезок уже не будет содержать вершин.

Итак, осталось сложить освещенности от всех источников. Сначала сложим все источники с определенным m :

$$k^{m+0} + 2k^{m+1} + 2k^{m+2} + \dots = \frac{1+k}{1-k} k^m.$$

А теперь сложим все m :

$$E_{\text{полная}} = \frac{1+k}{1-k} (k^0 + 2k^1 + 2k^2 + \dots) = \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^2.$$

Подставим значения $k = 0,98$ в первом случае и $k = 0,96$ во втором: $E_{\text{полная } 1} = 0,9801$, $E_{\text{полная } 2} = 0,2401$. Видно, что темнее станет приблизительно в 4 раза.

Е. Антышев

ИНФОРМАЦИЯ

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Более 25 лет при механико-математическом факультете Московского государственного университета (МГУ) имени М.В.Ломоносова работает Малый механико-математический факультет (МММФ), состоящий из заочного и вечернего отделений. За годы своего существования заочное отделение Малого мехмата выпустило свыше 10000 учащихся, многие из которых стали студентами мехмата и других факультетов МГУ.

Основные задачи Малого мехмата – расширение математического кругозора школьников и углубление их знаний как по темам школьной программы, так и по разделам математики, не входящим в программу средней школы.

В 2007 году *заочное отделение* Малого мехмата объявляет прием учащихся на 2007/08 учебный год в 8 и 9 классы. На заочное отделение принимаются учащиеся из России (в том числе и проживающие в Москве), стран СНГ и Прибалтики.

Существует возможность обучения нескольких учеников из одной школы по форме «Коллективный ученик». Группа работает под руководством преподавателя и может включать в себя не более 15 учащихся из одной параллели. Как правило, материалы методических разработок изучаются такими группами во время факультативных (кружковых) занятий. Группа «Коллективный ученик» обучается как один учащийся, т.е. оформляет по каждому заданию *одну* работу и оплачивает обучение всей группы как обучение *одного* учащегося.

Обучение на заочном отделении платное. Информация об условиях оплаты будет выслана учащимся, зачисленным на заочное отделение, осенью 2007 года, после проверки вступительных работ. В 2006/07 учебном году стоимость проверки одного задания составляет 120 руб. (для коллективных учеников – 160 руб.), однако в 2007/08 учебном году она может быть повышена. За год учащийся выполняет 6–9 заданий. Школьники, успешно (с оценкой «хорошо» или «отлично») закончившие обучение на заочном отделении, получают свидетельства об окончании Малого мехмата (прошедшим курс обучения по форме «Коллективный ученик» вместо свидетельств выдаются справки об окончании Малого мехмата).

Зачисление на заочное отделение Малого мехмата (как в 8, так и в 9 класс) для индивидуальных учеников производится *на конкурсной основе* по результатам выполнения приведенной ниже вступительной работы. Желающие поступить должны *не позднее 30 апреля 2007 года* выслать в наш адрес решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). Вступительную работу необходимо выполнить *в школьной тетради в клетку*. Записывать решения в тетрадь следует в том порядке, в котором задачи идут во вступительной работе. На обложку тетради наклейте лист бумаги со следующими данными:

- 1) Фамилия, имя, отчество учащегося
- 2) Класс (*в 2007/08 учебном году*)
- 3) Полный домашний адрес *с указанием индекса почтового отделения*
- 4) Электронный адрес, по которому с вами можно связаться (если он есть)

5) Откуда вы узнали о наборе на заочное отделение
Вступительные работы обратно не высылаются.

Группам «Коллективный ученик» *не нужно* выполнять вступительную работу, необходимо лишь *не позднее 20 сентября 2007 года* выслать письмом или по электронной почте следующие данные:

- 1) Фамилия, имя, отчество руководителя группы
- 2) Фамилии, имена и отчества учащихся (не более 15 человек) в алфавитном порядке
- 3) Класс (*в 2007/08 учебном году*)
- 4) Полный адрес руководителя группы (по которому следует высылать задания) *с указанием индекса почтового отделения*
- 5) Электронный адрес, по которому с вами можно связаться (если он есть)
- 6) Откуда вы узнали о наборе на заочное отделение
Наш почтовый адрес: 119992 Москва, ГСП-2, Ленинские горы, МГУ, мехмат, МММФ
Электронная почта: mmmf_z@mech.math.msu.su

Вечернее отделение Малого мехмата приглашает на занятия по субботам всех желающих школьников 6–11 классов из Москвы и ближнего Подмосковья.

Справки по телефону: 939-39-43 или по электронной почте: mmmf_v@mech.math.msu.su

Более подробную информацию о Малом мехмате можно найти на нашем сайте в Интернете по адресу:

<http://mmmf.math.msu.su>

Вступительная работа

1. Один землекоп может вырыть яму за два часа, другой – вырыть такую же яму за три часа, третий – за шесть часов. За какое время три землекопа выкопают яму, работая вместе?
2. Известно, что $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Докажите, что

$$1 - (1 - a)(1 - b)(1 - c) \geq c.$$

3. Существует ли выпуклый четырехугольник, в котором каждая из сторон больше каждой из диагоналей?
4. В строку выписаны подряд все целые числа от 1 до 10000. Сколько из них содержат в своей записи цифру «3»?
5. Решите систему

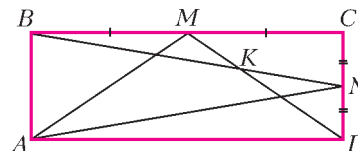
$$\begin{cases} xy = 9z, \\ yz = 100x, \\ xz = 4y \end{cases}$$

(не забудьте указать все решения).

6. Сумма нескольких чисел равна 10. Может ли сумма их квадратов быть меньше $\frac{1}{1000}$?

7. Доля шахматистов среди математиков больше, чем доля математиков среди всех людей. Что больше: доля математиков среди шахматистов или доля математиков среди всех людей?

8. В прямоугольнике $ABCD$ отмечены точка M – середина стороны BC , точка N – середина стороны CD , точка K – точка пересечения отрезков BN и MD (см. рисунок). Докажите, что $\angle MKB = \angle MAN$.



9. Докажите равенство

$$\underbrace{22\dots2}_n + \underbrace{33\dots3}_n = \underbrace{11\dots1}_{2n}.$$

10. Двадцать футбольных команд провели первенство по круговой системе в один круг (это значит, что каждая команда сыграла с каждой по одному разу). Могло ли случиться так, что каждая команда выиграла столько же матчей, сколько и свела вничью?

Задачи

1. Корабль считается попавшим в окружение, если он находится внутри выпуклого многоугольника, в вершинах которого располагаются корабли противника. Вы находитесь на капитанском мостике и в бинокль можете наблюдать все корабли противника. Как определить, попали вы в окружение или нет?

Г.Гальперин



2. Существуют ли попарно неравные целые числа a , b , c , d такие, что

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{ac+1}{bd+1} ?$$

В.Сендеров



3. Гирьки массой 1, 2, 3, ..., n граммов ($n > 6$) разложили на две чашки весов так, что весы оказались



Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

в равновесии. Можно ли убрать с чашек три гирьки так, чтобы равновесие не нарушилось?

А.Шаповалов

4. Почти прямоугольным будем называть треугольник, у которого есть угол, отличающийся от прямого не более чем на 15° . Почти равнобедренным будем называть треугольник, у которого есть два угла, отличающиеся не более чем на 15° . Верно ли, что любой остроугольный треугольник почти прямоугольный или почти равнобедренный?

В.Гуровиц



5. По правилам регби, если игроку удастся прижать мяч к земле в специальной зачетной зоне (это называется попыткой), его команда получает 5 очков и, кроме того, игроку дается право пробить мячом по воротам, т.е. выполнить реализацию. При попадании команда дополнительно зарабатывает 2 очка.

Во время игры между командами «Рубильник» и «Дробильник» у команды «Рубильник» удачная реализация имела место в половине случаев, а у команды «Дробильник» — лишь в четверти всех случаев. Кто победил и с каким счетом, если обе команды в сумме набрали ровно 100 очков?

И.Акулич



Иллюстрация Д.Гришуковой

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

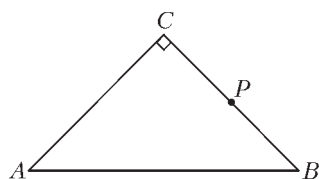
Мы завершаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

16. Из 80 первых натуральных чисел выбрали 20 нечетных и 20 четных чисел с равными суммами. Докажите, что среди выбранных найдутся два числа, сумма которых равна 81.

В.Произволов

17. В прямоугольном равнобедренном треугольнике отмечена точка P пересечения его катета с биссектрисой противолежащего угла.



Используя только циркуль произвольного, но фиксированного раствора, постройте центр вписанной окружности данного треугольника.

Р.Сарбаш

18. а) Придумайте натуральные числа $a > b > c > 10^{10}$ такие, что тройка (a, b, c) не имеет отличного от 1 общего делителя и

$$a^8 + b^8 + c^8 \text{ делится на } a^4 + b^4 + c^4,$$

$$a^4 + b^4 + c^4 \text{ делится на } a^2 + b^2 + c^2,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \text{ делится на } a + b + c.$$

б) Придумайте числа $A > B > C > a > b > c > 10^{10}$ такие, что в каждой тройке (A, B, C) , (a, b, c) числа не имеют отличного от 1 общего делителя и

$$A^2 + B^2 + C^2 \text{ делится на } a + b + c,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \text{ делится на } A + B + C.$$

В.Произволов, В.Сендеров

19. Рациональное число $\frac{p}{q}$ назовем хорошим, если можно найти $p + q$ последовательных натуральных чисел, сумма первых p из которых равна сумме остальных q . Укажите множество всех хороших рациональных чисел.

А.Малеев

20. Каждая клетка шахматной доски разрезана по одной из ее диагоналей. На какое

а) наименьшее;

б) наибольшее

количество частей может оказаться разделенной доска этими разрезами?

И.Акулич

В 1987 году в издательстве «Мир» вышла книга «Алиса в Стране Смекалки» блестящего популяризатора науки Рэймонда М. Смаллиана — такого же остроумного выдумщика, как и автор знаменитых сказок «Алиса в Стране Чудес» и «Алиса в Зазеркалье» Льюис Кэрролл. Читая «Алису в Стране Смекалки», трудно понять, где Смаллиан, а где Кэрролл:

« — Считает ли тот, кто не в своем уме, человек или какое-нибудь существо, что дважды два — пять? — спросила Алиса.

— Конечно, дитя мое! — ответила Герцогиня. — Поскольку дважды два не пять, то тот, кто не в своем уме, считает, что дважды два — пять.

— А считает ли тот, кто не в своем уме, что дважды два — шесть? — задала новый вопрос Алиса.

— Конечно, дитя мое. Поскольку дважды два не шесть, то тот, кто не в своем уме, считает, что дважды два — шесть.

— Но дважды два не может быть одновременно равно и пяти и шести! — воскликнула Алиса.

— Разумеется, не может, — согласилась Герцогиня. — И ты и я об этом знаем, но тот, кто не в своем уме, об этом не ведает. А какая мораль из всего этого?...

Основное содержание книги Смаллиана — логическая игра, загадки и головоломки.

Предлагаем вашему вниманию развитие темы «Самое запутанное дело» из главы «Что не мог точно вспомнить Белый Рыцарь».

САМОЕ ЗАПУТАННОЕ ДЕЛО-2

В.КИТАЙСКИЙ

АЛИСА, ВЫЙДЯ НА ОПУШКУ ЛЕСА, УВИДЕЛА НЕВДАЛЕКЕ своего давнего знакомого, Белого Рыцаря, стоявшего рядом со своим верным конем. Их встреча была радостной, и Белый Рыцарь засыпал Алису вопросами о ее приключениях в Стране Чудес. Девочка охотно рассказала ему о своих похождениях и о суде, на котором она побывала в конце своего пребывания там.

— Я тоже недавно побывал на одном процессе в Королевском Суде, — заметил Белый Рыцарь. — Но судили, кажется, не меня.

— Как интересно! Расскажите! — попросила Алиса.

— А, вспомнил! На судебном процессе, о котором я хочу тебе рассказать, — начал Белый Рыцарь, — подсудимых было четверо, и только один из них был виновен. Да ты их всех, кстати, знаешь! — обрадованно воскликнул он. — Это твои старые знакомые из Страны Чудес: Мартовский Заяц, Чеширский Кот, Болванщик и Лакей-Лещ.

Когда Мартовского Зайца спросили, виновен ли Болванщик, то он ответил либо «да», либо «нет», но что именно он ответил, я не помню. Чеширскому Коту строгий судья, Червонный Король, задал один-единственный вопрос: «Виновен ли Лакей-Лещ?» Что он ответил — сейчас я уже позабыл, но точно помню, что он сказал либо «да», либо «нет».

У Болванщика помощник судьи, Пиковый Валет, поинтересовался о правдивости показания Чеширского Кота, но я совершенно запамятовал его ответ. После короткого перерыва суд возобновил работу, и был допрошен последний подозреваемый, Лакей-Лещ. Второй помощник судьи, Трефовый Валет, задал ему довольно-таки замысловатый вопрос: «Верно ли, что Чеширский Кот виновен, а Мартовский Заяц сказал правду?» То ли Лакей-Лещ сказал «да», то ли ответил «нет», сейчас уже вылетело у меня из головы. Зато я помню, как сейчас, что из всех показаний только два были ложными.

В прошлом месяце, — продолжал Белый Рыцарь, — я встретил Бармаглота и рассказал ему все, о чем ты уже знаешь. В то время я еще помнил, что именно говорил каждый из четырех подсудимых (т.е. «да» или «нет»), и когда сообщил Бармаглоту их показания, он без труда сумел определить виновного.

— Знаю, знаю! — перебила его Алиса. — Дальше вы скажете, что, будь у меня дополнительные сведения о Бармаглоте, я непременно должна была бы решить эту задачу. Ведь правильно?

— Нет, — задумчиво произнес Белый Рыцарь. — Для того чтобы ты смогла решить задачу, этих данных недостаточно.

— А что мне еще необходимо знать? — спросила Алиса.

— А вот что, — продолжал Белый Рыцарь. — Через неделю после моего разговора с Бармаглотом я встретил Плотника, большого знатока и любителя такого рода вопросов, и рассказал ему все, о чем ты уже знаешь. Разумеется, Плотник смог продвинуться в решении задачи ничуть не дальше, чем ты. Однако, подумав, он спросил:

«Все ли подозреваемые ответили «да»?». Ответ тогда еще был мне известен, и я откровенно сообщил его Плотнику. Поразмышляв немного, он сказал: «А не могли бы вы вспомнить, говорил ли суду Мартовский Заяц правду или же он лгал?» И на этот вопрос я дал ему ответ, но это не помогло: Плотник так и не смог решить задачу.

— Интересно получается! — воскликнула Алиса. — Плотник, зная все то же самое, что и я, не смог решить задачу, а я — должна ее решить?

— Разумеется, нет, — успокоил ее Белый Рыцарь, — мой рассказ еще далеко не окончен.

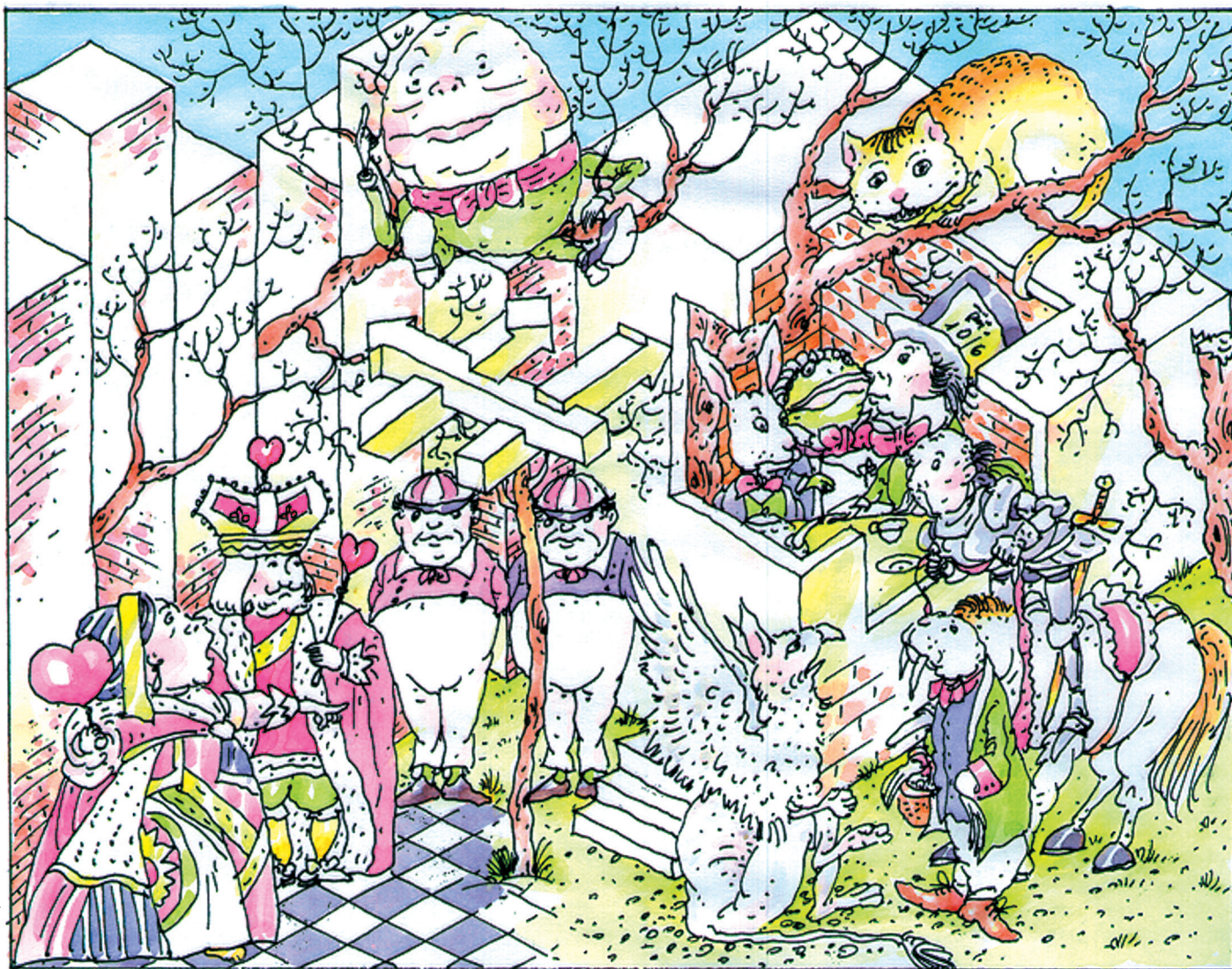
— Еще через неделю, — продолжал Белый Рыцарь, — я повстречал Моржа и рассказал ему все то, о чем только что рассказал тебе. Морж после долгого раздумья задал мне вопрос о правдивости показаний Чеширского Кота. Правда, сейчас я уже позабыл, что ответил ему, а тогда я дал исчерпывающий ответ. Но, несмотря на столь обширные сведения, Морж так и не смог определить, кого же суд признал виновным.

— Неужели вы думаете, что если Морж и Плотник не смогли решить, кто же виновный, — спросила Алиса, — то это смогу сделать я? Или вы еще, может быть, что-нибудь вспомните или расскажете?

— Ну, конечно же, расскажу, — ответил радостно Белый Рыцарь. — Я еще очень многое помню и ничего не скрою от тебя. Вскоре после встречи с Моржом я зашел на чаепитие к Соне-Мыши и во время беседы с ней упомянул об этом процессе, рассказав ей все, что только что рассказал тебе, и, кроме того, сообщил ей о том, что Чеширский Кот и Болванщик то ли оба солгали, то ли оба сказали правду, то ли один из них сказал правду. Но, к сожалению, эта информация ей не помогла: Соня не смогла решить эту непростую задачу.

— Вот еще что, — продолжал он свой рассказ. — Полмесяца назад, прогуливаясь по берегу моря, я встретил своего друга, Грифона, и во время нашего разговора вспомнил об этом непростом деле. Грифон очень им заинтересовался, и я все без утайки рассказал ему. Он внимательно выслушал меня, а затем надолго задумался. Потом он спросил, не помню ли я, что ответил на суде Мартовский Заяц: «да» или «нет». Получив от меня ответ и подумав еще немного, он так и не сумел решить, кто же был виноват.

На другой день после встречи с Грифоном, гуляя по лесу, я встретил Траляля. Рассказав ему о своих встре-



чах с Бармаглотом, Плотником, Моржом, Соней и Грифоном, я надеялся, что уж он-то назовет мне имя виновного, тем более что я сообщил ему еще кое-что об истинности показаний виновного: то ли что виновный солгал, то ли что виновный сказал правду. Но, к большому моему разочарованию, и он тоже не смог назвать имя того, кого суд признал виновным.

Спустя некоторое время я встретил второго из братцев, Труляля. Вспоминая разные интересные истории, я рассказал ему о ходе недавно закончившегося процесса все то же самое, что только что услышала от меня ты, только не сказал ему о встречах с Грифоном и Траляля, но зато вспомнил показание на суде одного из подозреваемых, о чем и сообщил ему. Что это было за показание, «да» или «нет», и чье оно, сейчас я уже не могу точно вспомнить, но что-то я ему все же сообщил. Тем не менее, Труляля так и не смог назвать мне имя виновного.

— Ваш рассказ становится все более интересным, — в задумчивости произнесла Алиса. — Впрочем, извините, что перебила! Продолжайте, прошу вас!

— Вчера во время прогулки я встретил нашего общего знакомого Шалтая-Болтая и рассказал ему все,

о чем ты уже знаешь. И о встрече с Бармаглотом, который успешно решил задачу, и о том, как бились над ней Морж, Плотник, Соня, Грифон, Траляля и Труляля, но вынуждены были отступить, несмотря на то что располагали дополнительными сведениями. Шалтай-Болтай тотчас же извлек карандаш и блокнот и принялся что-то писать. Наконец, он покачал головой и произнес:

— Данных недостаточно! Вот если бы вы, уважаемый Рыцарь, смогли припомнить, о ком из подсудимых вы сказали Труляля, то тогда, возможно, и я назвал бы вам имя виновного.

— К счастью, — закончил Белый Рыцарь, — именно об этой встрече и о подробностях разговора с Труляля я помнил, о чем и сообщил Шалтаю-Болтаю, после чего тот назвал мне имя виновного.

— Так кто же он? — чуть не закричала от восторга Алиса.

— А вот этого я уже и не помню, — ответил Белый Рыцарь.

Но Алиса все же решила эту задачу. А вы?