

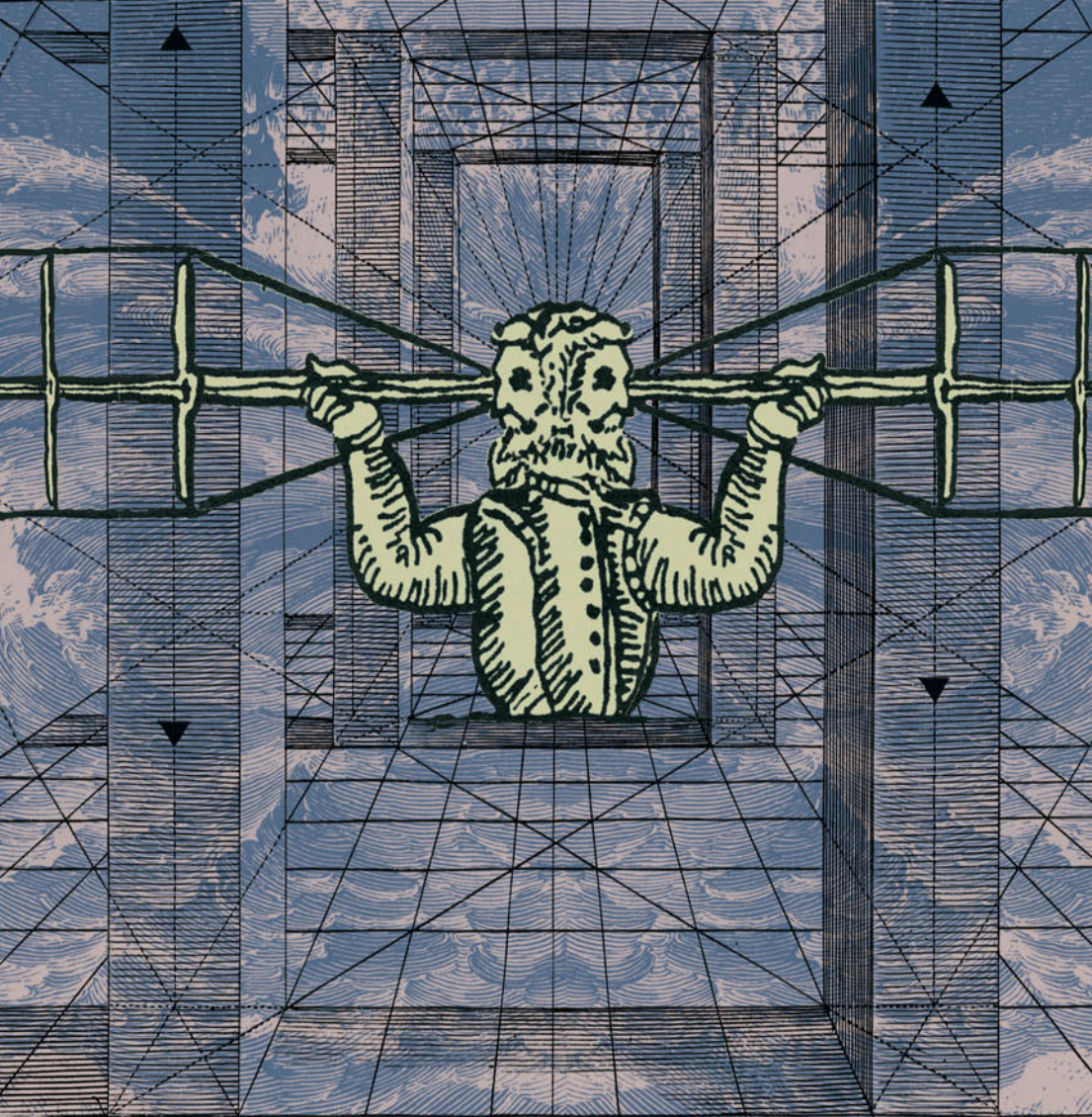
ИЮЛЬ/АВГУСТ

ISSN 0130-2221

2006 №4

# КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



## Дюжина И ОДИН ГВОЗДЬ



ОДИН ГВОЗДЬ



Большинство современных головоломок нелегко изготовить в домашних условиях. Для этого требуются навыки слесарного и столярного мастерства, а порой не обойтись и без токарных или фрезерных работ. Тем больший интерес вызывают игрушки, которые можно делать своими руками или вообще не делать, а использовать готовые детали, например гвозди. Они найдутся в любой квартире, а уж на даче - точно.

Именно такая головоломка предлагается вашему вниманию. Неизвестно, кто ее первый придумал, но в XIX веке она уже встречалась в книгах по занимательной физике и математике. Задача головоломки формулируется очень просто: требуется уместить дюжину гвоздей на шляпке одного гвоздя, укрепленного вертикально. Разумеется, посторонние предметы и клей использовать нельзя.

На первый взгляд, задача кажется неразрешимой. Класть на шляпку сначала один гвоздь, на него другой и так далее - бессмысленно. Уже второй гвоздь немедленно упадет, увлекая за собой и первый. Следовательно, необходимо придумать прочную конструкцию из прямых гвоздей, зацепленных друг за друга. После некоторых размышлений и неудачных попыток, думаю, вы поймете, что центр тяжести конструкции должен быть не выше плоскости опоры. Напомним, что плоскость опоры - это шляпка вертикально стоящего гвоздя. Задача трудная, и поэтому на фотографии приведено ее решение. Видимо, оно единственное, так как более чем за сто лет никто не придумал другого решения. Тот, кто его предложит, наверняка войдет в историю головоломок. А вдруг это будете вы?

Но сначала давайте разберемся с уже известной конструкцией. Она собирается на столе или любой плоской поверхности. На горизонтально лежащий гвоздь укладывают десять других так, как показано на фотографии. Сверху кладут еще один гвоздь, а затем, взявшись за концы и шляпки первого и двенадцатого гвоздей и прижимая их друг к другу, переносят всю конструкцию на шляпку гвоздя, вколоченного в доску вертикально. Задача, казавшаяся неразрешимой, решена.

А.Калинин



В номере:



Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЕ ЗАМЕСТИТЕЛИ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.С.Кротов, С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,  
А.Н.Виленин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин,  
Н.П.Долбилин

(заместитель главного редактора),

В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, А.В.Жуков,  
А.Р.Зильберман, П.А.Кожевников,  
В.В.Козлов, С.П.Коновалов, А.А.Леонович,  
Ю.П.Лысов, В.В.Можаев, В.В.Произволов,  
Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко,  
В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров,  
В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,  
А.И.Черноуцан

(заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,  
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,  
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,  
Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,  
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,  
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,  
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,  
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллиончиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,  
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,  
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,  
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро



Квантум

© 2006, Президиум РАН,  
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 Теорема Минковского о многогранниках. *Н.Долбилин*  
9 Как увидеть невидимку. *В.Белонучкин*

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 15 Деннис Габор. *А.Васильев*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 16 Задачи М2006–М2010, Ф2013–Ф2017  
17 Решения задач М1981–М1990, Ф1998–Ф2002

К М Ш

- 24 Задачи  
25 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»  
25 Легенда о задаче Гаусса. *С.Дворянинов*  
29 Почему Земля вращается против часовой стрелки?  
*С.Семиков*

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 31 Вписанные и описанные многоугольники. *И.Смирнова,*  
*В.Смирнов*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Египетские дроби

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 37 Листья улыбаются. *А.Минеев*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 40 Заряженные частицы в магнитном поле. *В.Можаев*  
43 Метод замены множителей. *В.Голубев*

ОЛИМПИАДЫ

- 47 LXIX Московская математическая олимпиада  
49 Избранные задачи Московской физической олимпиады

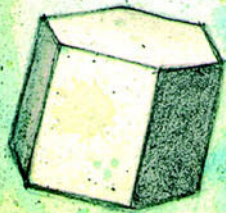
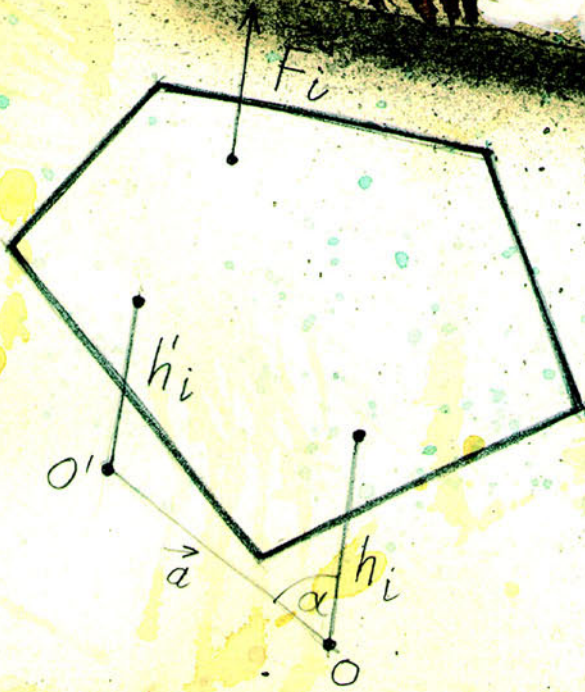
ИНФОРМАЦИЯ

- 53 10000 задач по математике  
54 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье В.Белонучкина*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Физики и математики на монетах и банкнотах*

$$\sum_i s_i h_i - \sum_i s_i h_i = \sum_i s_i (h_i - h_i) = \sum_i (\vec{F}_i \vec{a}) =$$



$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

$$(p) = \frac{1}{3} \sum_i s_i h_i$$

$$\left( \sum_i \vec{F}_i \right)$$

# Теорема Минковского о многогранниках

Н.ДОЛБИЛИН

**Т**ЕОРЕМА, О КОТОРОЙ ПОЙДЕТ РЕЧЬ В ЭТОЙ статье, наряду со знаменитыми теоремами Эйлера, Коши, Александра,<sup>1</sup> принадлежит к числу наиболее удивительных и глубоких результатов о многогранниках. Эта теорема была доказана в 1897 году выдающимся немецким математиком Германом Минковским (1864–1909).

## Выпуклые многогранники и их «ежи»

Недавно на одной международной конференции по многогранникам я стал (не впервые) свидетелем курьезного недоразумения, возникшего между лектором и одним из слушателей лишь из-за того, что один из них под многогранником понимал тело, а другой – границу этого тела. Разумеется, недоразумение исчезло, как только выступавший сделал необходимое уточнение. Поэтому сразу договорился, что в данной статье мы будем понимать под многогранником тело.

Пусть в пространстве даны несколько плоскостей  $H_1, H_2, \dots$ . Каждая из них разбивает пространство на

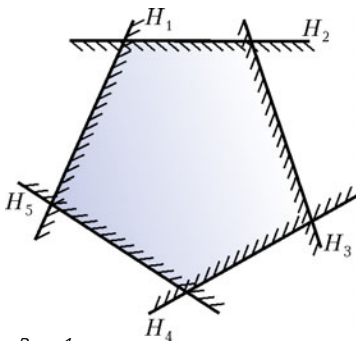


Рис. 1

два полупространства, которые обозначим через  $H_i^+$  и  $H_i^-$ . (При этом мы полагаем, что сама плоскость  $H_i$  входит в оба полупространства  $H_i^+$  и  $H_i^-$ , другими словами, полупространства рассматриваются как *замкнутые*.) Под *выпуклым многогранником* мы будем понимать пространственное тело, являющееся пересечением<sup>2</sup> конечного числа полупространств, например  $\bigcap_i H_i^+$  (рис.1).

Мы будем рассматривать только конечные многогранники. Многогранник *конечный*, если он содер-

жится в каком-нибудь шаре. Например, многогранный угол – это пример бесконечного многогранника. В то же время плоскость, пересекающая все ребра угла, отсекает пирамиду, которая является конечным многогранником.

Введем важное понятие опорной плоскости. Плоскость, имеющая с данным многогранником общие точки, но оставляющая многогранник по одну от себя сторону, называется *опорной*. Так как многогранник выпуклый, каждая опорная плоскость содержит

- либо единственную точку многогранника – *вершину* (на рисунке 2:  $A \in H_1$ ),
- либо целый отрезок многогранника – его *ребро* (на рисунке 2:  $H_2 \supset [AC]$ ),
- либо целый многоугольник, называемый *гранью* (на рисунке 2:  $H_3 \supset \triangle ABC$ ).

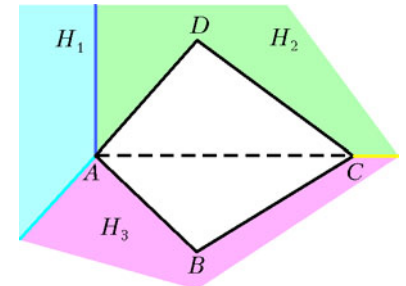


Рис. 2

Опорная плоскость – это аналог касательной плоскости. Хорошо известно, что через каждую точку сферы можно провести касательную плоскость, причем единственную. Интуитивно понятно, что через каждую точку на поверхности многогранника можно провести опорную плоскость, но не всегда единственную. Так, через вершину или через точку ребра многогранника можно провести бесконечно много опорных плоскостей. Но нетрудно видеть, что как бы ни была расположена в пространстве плоскость, для данного выпуклого многогранника имеются две и только две опорные плоскости, параллельные данной. Многогранник лежит в слое между ними.

Рассмотрим грань  $F_i$  многогранника и возьмем вектор  $\vec{F}_i$ , который перпендикулярен плоскости грани и направлен от многогранника во внешнюю часть пространства. Кроме этого потребуем, чтобы длина этого вектора была равна площади грани  $F_i$ . (Режущая слух фраза «длина равна площади» означает, что при выбранной единице измерения длины численное значение длины вектора равно численному значению площади грани.) Назовем совокупность векторов  $\vec{F}_i$ , соответствующих граням многогранника, *ежом* многогранника (рис.3). Свойства ежа многогранника опи-

<sup>1</sup> Теоремам Эйлера, Коши, Александра была посвящена статья «Три теоремы о выпуклых многогранниках» («Квант» № 5, 6 за 2001 г.).

<sup>2</sup> Пересечение нескольких множеств состоит из точек, принадлежащих всем данным множествам. Мы предполагаем, что это пересечение непусто, т.е. содержит хотя бы одну точку. Более того, в указанное пересечение должна входить не только точка, но и хотя бы небольшой шарик вокруг нее. Иначе пересечение было бы не пространственным телом, а многоугольником, отрезком или точкой.

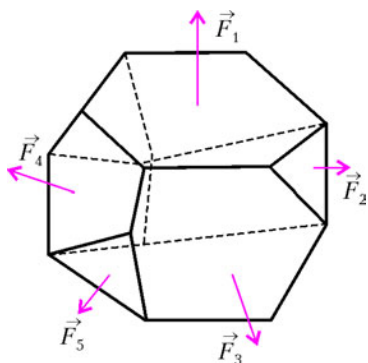


Рис. 3

в одной, скажем горизонтальной, плоскости. Тогда все грани были бы вертикальны и ограничивали бесконечную, не имеющую ни нижнего, ни верхнего оснований

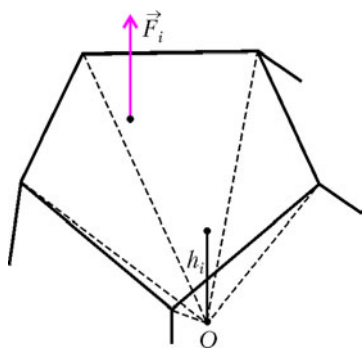


Рис. 4

призму. А это противоречило бы предположению об ограниченности многогранника. Докажем теперь второе, не столь очевидное, свойство. Возьмем внутри многогранника точку  $O$  и разобьем многогранник на пирамиды с общей вершиной  $O$ , основаниями которых являются грани многогранника. Обозначим через  $h_i$  высоту пирамиды, основанием которой является  $i$ -я грань  $F_i$  многогранника площади  $s_i$  (рис.4). Тогда объем многогранника складывается из объемов этих пирамид:

$$V(P) = \frac{1}{3} \sum_i s_i h_i.$$

Выберем наряду с точкой  $O$  внутри многогранника другую точку  $O'$  и разобьем многогранник на пирамиды с новой общей вершиной  $O'$  и высотами, соответственно, равными  $h'_i$ . Выразим объем того же многогранника как сумму объемов новых пирамид со «старыми» основаниями и «новыми» высотами:

$$V(P) = \frac{1}{3} \sum_i s_i h'_i.$$

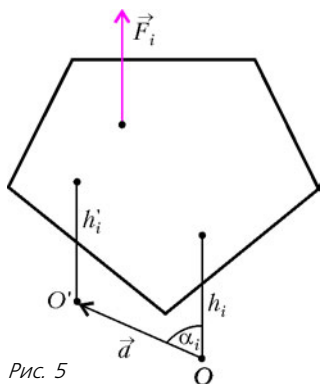


Рис. 5

Обозначим через  $\vec{a}$  вектор  $\vec{O'O}$  и через  $\alpha_i$  – угол между вектором  $\vec{a}$  и вектором  $\vec{F}_i$ , который, напомним, перпендикулярен грани  $F_i$  и направлен «от» многогранника (рис.5). Тогда утроенная разность между объемами новой и старой пирамид с одним и тем же основанием  $F_i$

связываются в следующей теореме.

**Теорема 1.** Для выпуклого конечного многогранника

1) векторы его ежа не лежат в одной плоскости;

2) сумма всех векторов ежа есть нулевой вектор.

Предположим, что все векторы ежа лежат в одной, скажем горизонтальной, плоскости. Тогда все грани были бы вертикальны и ограничивали бесконечную, не имеющую ни нижнего, ни верхнего оснований призму. А это противоречило бы предположению об ограниченности многогранника.

Докажем теперь второе, не столь очевидное, свойство. Возьмем внутри многогранника точку  $O$  и разобьем многогранник на пирамиды с общей вершиной  $O$ , основаниями которых являются грани многогранника. Обозначим через  $h_i$  высоту пирамиды, основанием которой является  $i$ -я грань  $F_i$  многогранника площади  $s_i$  (рис.4). Тогда объем многогранника складывается из объемов этих пирамид:

равна

$$s_i h'_i - s_i h_i = |\vec{F}_i| \cdot (h'_i - h_i) = |\vec{F}_i| \cdot \vec{OO}' \cdot \cos \alpha_i = \vec{F}_i \vec{a}.$$

Здесь через  $\vec{F}_i \vec{a}$  обозначено скалярное произведение векторов. Хорошо известно, что скалярное произведение дистрибутивно:  $(\vec{b} + \vec{c}) \vec{a} = \vec{b} \vec{a} + \vec{c} \vec{a}$ . Это свойство следует из того, что скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат в прямоугольной системе координат. Поэтому из полученных соотношений следует

$$0 = \sum_i s_i h'_i - \sum_i s_i h_i = \sum_i s_i (h'_i - h_i) = \sum_i (\vec{F}_i \vec{a}) = \left( \sum_i \vec{F}_i \right) \vec{a}.$$

Подчеркнем, что соотношение

$$\left( \sum_i \vec{F}_i \right) \vec{a} = 0$$

выполняется для любого ненулевого вектора  $\vec{a}$ , началом  $O$  и концом  $O'$  которого являются произвольные точки внутри многогранника. В частности, в качестве вектора  $\vec{a}$  можно взять три взаимно перпендикулярных вектора  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  и  $\vec{a}_3$ . Тогда для каждого из них  $\left( \sum_i \vec{F}_i \right) \vec{a}_j = 0$ , где  $j = 1, 2, 3$ . Но это возможно в трехмерном пространстве лишь когда  $\sum_i \vec{F}_i = 0$ . Свойство 2 для ежа выпуклого многогранника доказано.

Свойство 2 имеет любопытную физическую интерпретацию. Предположим, что граници многогранника представляет собой жесткий металлический корпус, внутрь которого закачан газ. Сила давления газа на грань  $F_i$  перпендикулярна плоскости грани, направлена во внешнюю сторону и пропорциональна площади грани. Если бы результирующая сила давления была ненулевой, то многогранник, прикрепленный к подвижной тележке, мог бы перемещать тележку только за счет сил внутреннего давления. Однако, увы... результирующая сила равна нулю, и такое перемещение невозможно.

Очевидно, что теорему 1 можно переформулировать и легко доказать для случая многоугольников.

**Задача 1.** Докажите теорему 1 для многоугольников посредством «правила многоугольника» для суммы векторов.

В действительности, свойства 1 и 2 выполняются и для ежей невыпуклых многогранников. Однако для теоремы Минковского, сформулированной в следующем параграфе, условие выпуклости многогранника существенно.

### Теорема Минковского

Предположим, что дана система векторов в трехмерном пространстве с нулевой суммой. Является ли она ежом какого-нибудь многогранника? Удивительная теорема Минковского утверждает, что да, является.

**Теорема 2** (Г.Минковский). Пусть  $\{F_i\}$  – множество векторов в пространстве, отложенных от одной точки, такое, что

- 1) оно не лежит в одной плоскости;
- 2)  $\sum_i \vec{F}_i = 0$ .

Тогда существует выпуклый ограниченный многогранник  $P$ , еж которого есть множество векторов  $\{\vec{F}_i\}$ . Более того, многогранник  $P$  определен однозначно с точностью до параллельного переноса.

Для единственности многогранника условие выпуклости существенно. На рисунке 6 приведены два разных многогранника, один из них невыпуклый, с одинаковыми ежами. Известны два доказательства того,

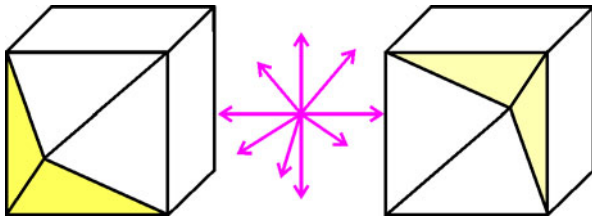


Рис. 6

что существует многогранник  $P$ . Доказательство, данное Минковским, опирается на известный из математического анализа принцип множителей Лагранжа. Другое доказательство было дано выдающимся российским геометром А.Д.Александровым (1912–1999). Им был создан общий метод, при помощи которого можно установить существование многогранников, удовлетворяющих тем или иным условиям. Мы не приводим эти доказательства, так они оба весьма не элементарны.

Теорема Минковского (точнее, ее аналог) верна для многогранников любой размерности. Для случая плоских многоугольников она доказывается не сложно.

Пусть  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_k$  – множество векторов на плоскости, отложенных от одной точки, таких, что они не лежат на одной прямой и их сумма равна нулю. Сейчас мы объясним, почему существует многоугольник, для которого эти векторы перпендикулярны соответствующим сторонам, по длине равны этим сторонам и направлены изнутри многоугольника вовне.

Не уменьшая общности, можно предполагать, что векторы уже занумерованы в порядке их обхода по часовой стрелке так, что между векторами  $\vec{F}_i$  и  $\vec{F}_{i+1}$  нет других векторов. Отложим теперь от конца  $A_1$  вектора  $\vec{F}_1$  вектор, равный вектору  $\vec{F}_2$ . От конца  $A_2$  вектора  $\vec{F}_2$  отложим вектор, равный  $\vec{F}_3$ , и т.д. Согласно правилу многоугольника для суммы нескольких векторов, имеем:  $\vec{OA}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ ,  $\vec{OA}_i = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_i$ ,  $\vec{OA}_k = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_k$ . Так как  $\sum_i \vec{F}_i = 0$ , то  $A_k = O$ , т.е. ломаная  $OA_1 \dots A_k$  замыкается в  $k$ -угольник  $P$  (рис.7). Многоугольник  $P$  выпуклый (мы покажем это чуть позже). Векторы  $A_{i-1}A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , расположенные на сторонах многоугольника  $P$ , равны векторам  $\vec{F}_i$ . Если многоугольник повернуть на  $90^\circ$ , то получим новый

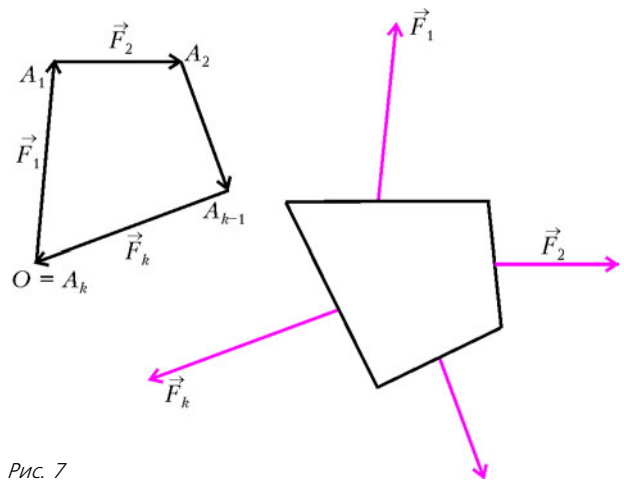


Рис. 7

многоугольник, для которого множество  $\{\vec{F}_i\}$  является ежом.

**Задача 2.** Докажите, что многоугольник  $P$ , получающийся при выборе нумерации векторов  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$  в порядке обхода, является единственным выпуклым многоугольником с данным ежом.

### Центрально-симметричные многогранники

Теорема Минковского чрезвычайно продуктивна. Докажем с ее помощью несколько интересных теорем.

Вспомним, что симметрией  $\tau_O$  пространства относительно точки  $O$  называется преобразование, при котором любая точка  $x$  переходит в точку  $x'$  такую, что  $O$  является серединой отрезка  $[x; x']$ . Общеизвестно, что при симметрии сохраняется расстояние между соответствующими точками, т.е. симметрия является движением. Нам понадобится некоторое предложение, доказать которое предлагается в качестве задачи.

**Задача 3.** Докажите, что последовательное выполнение двух симметрий  $\tau_{O_1}$  и  $\tau_{O_2}$  (или, как говорят, композиция  $\tau_{O_1} \circ \tau_{O_2}$ ) является переносом на вектор  $2 \cdot \vec{O_1O_2}$ .

Множество векторов, отложенных от точки  $O$ , центрально-симметрично, если наряду с вектором  $\vec{OX}$  в него входит противоположный вектор  $\vec{OX'}$ . Ясно, что если многогранник  $P$  центрально-симметричный, т.е. переходит в себя под действием некоторой симметрии, то его еж также центрально-симметричный. Например, у параллелепипеда еж состоит из трех пар взаимно противоположных векторов.

Следующая, очень полезная, теорема вытекает из теоремы Минковского.

**Теорема 3.** Если еж многогранника  $P$  центрально-симметричен, то многогранник  $P$  также центрально-симметричен.

Очевидно, что еж многогранника  $P'$ , симметричного многограннику  $P$  относительно какой-либо точки  $O''$ , также симметричен ежу многогранника  $P$  (рис.8).

Так как еж многогранника  $P$ , в силу предположения теоремы 3, симметричен самому себе, то  $P$  и симметрич-

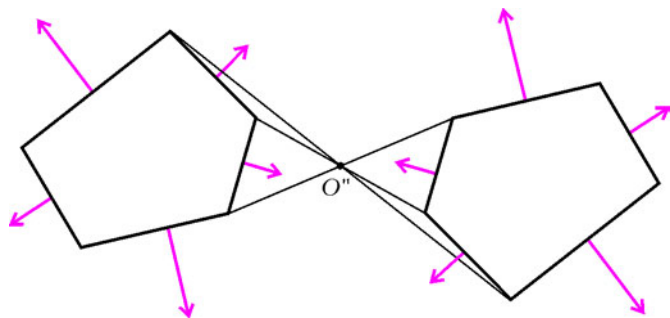


Рис. 8

ний ему многогранник  $P'$  обладают одним и тем же ежом. По теореме Минковского, многогранники  $P$  и  $P'$  равны и параллельны друг другу<sup>3</sup> (рис.9). Пусть  $2\vec{t}$  – вектор переноса, совмещающего  $P'$  с  $P$ . Пока-

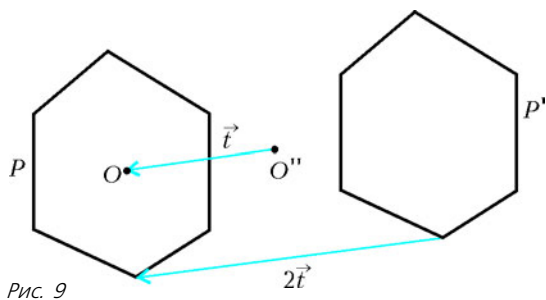


Рис. 9

жем, что многогранник  $P$  имеет центр симметрии  $O$ , где  $O = O'' + \vec{t}$ .

Действительно, многогранник  $P$  при симметрии  $\tau_{O''}$  переходит в  $P'$ , который при переносе на вектор  $2\vec{t}$  переходит обратно в многогранник  $P$ :  $P = (P\tau) + 2\vec{t}$ . С другой стороны, перенос на вектор  $2\vec{t}$  равен композиции  $\tau_{O''} \circ \tau_O$  (см. задачу 3). Поэтому

$$P = (P\tau_{O''})(\tau_{O''} \circ \tau_O) = P(\tau_{O''} \circ (\tau_{O''} \circ \tau_O)) = \\ = P(\tau_{O''} \circ \tau_{O''}) \circ \tau_O = P\tau_O.$$

Здесь мы воспользовались тем, что, во-первых, операция композиции движений обладает, подобно произведению чисел, свойством ассоциативности:  $a(bc) = (ab)c$ . Во-вторых, композиция симметрии с собой  $\tau_{O''} \circ \tau_{O''}$  есть тождественное движение, т.е. такое, при котором все точки остаются на месте.

Таким образом, многогранник с центрально-симметричным ежом сам центрально-симметричен.

Из теоремы 3 очень просто вытекает следующий критерий центрально-симметричного выпуклого многогранника.

**Теорема 4.** Выпуклый многогранник  $P$  тогда и только тогда центрально-симметричен, когда у каждой грани имеется параллельная грань той же площади.

То, что это условие является необходимым, очевидно: каждая грань центрально-симметричного много-

<sup>3</sup> Две фигуры называют параллельными друг другу, если одна получается из другой посредством параллельного переноса.

гранника при симметрии переходит в параллельную и равную грань. Обратно, если это условие выполняется, то в еже многогранника  $P$  наряду с вектором  $\vec{F}$ , отвечающим грани  $F$ , имеется и противоположный вектор  $-\vec{F}$ , отвечающий параллельной грани  $F'$  той же площади. Таким образом, еж обладает симметрией относительно точки, а, по теореме 3, и многогранник  $P$  – центрально-симметричен.

Следующий признак центральной симметричности выпуклого многогранника оказывается весьма полезным при решении ряда задач.

**Теорема 5.** Если выпуклый многогранник  $P$  составлен из конечного числа центрально-симметричных многогранников  $P_1, P_2, \dots, P_k$ , то и сам многогранник  $P$  центрально-симметричен.

Прежде чем изложить идею доказательства (технические детали не слишком интересны, но требуют места), отметим, что здесь неважна выпуклость «маленьких» многогранников  $P_1, P_2$  и т.д., но важна выпуклость «большого»

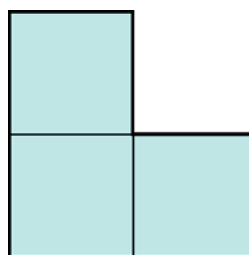


Рис. 10

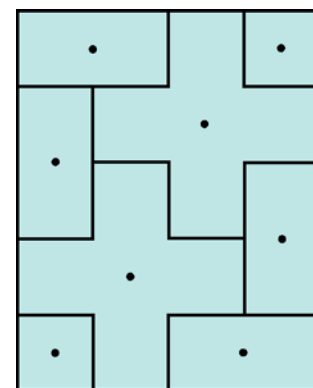


Рис. 11

многогранника  $P$ . На рисунке 10 приведен пример невыпуклого многоугольника, который не симметричен, хотя и разрезается на центрально-симметричные выпуклые части. В то же время выпуклый многоугольник, составленный из центрально-симметричных, вообще говоря, невыпуклых многоугольников, центрально-симметричен (рис.11).

Основная идея доказательства теоремы 5 элегантна и видна уже на примере многоугольника на плоскости. Прежде всего легко видеть, что у многоугольника, который может быть разрезан на центрально-симметричные многоугольники,

каждая сторона имеет параллельную пару. Далее, сторону  $a$  многоугольника  $P$  можно разрезать на несколько отрезков  $b, c, d, \dots$  так, что каждый такой отрезок посредством цепочки симметрий относительно центров маленьких многоугольников перемещается по многоугольнику  $P$ , пока не достигнет

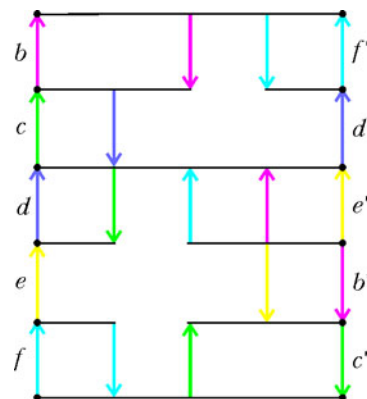


Рис. 12



тигнет параллельной стороны  $a'$  (рис. 12). Важно то, что отрезки выбраны так, что каждому отрезку соответствует своя цепочка симметрий, а разным отрезкам – разные цепочки. Образы  $b', c', d', \dots$  на противоположной стороне не перекрываются и той же длины, что и их прообразы. Поэтому, хотя эти отрезки рассыпаны на стороне  $a'$  в другом порядке, чем это было на исходной стороне  $a$ , сторона  $a'$  «собирается» из непрерывающихся отрезков той же длины, что и сторона  $a$ . Таким образом, в многоугольнике  $P$  наряду с каждой стороной  $a$  имеется параллельная сторона  $a'$  той же длины. Поэтому можно применить плоский аналог теоремы 4: многоугольник  $P$  центрально-симметричен.

В пространственном случае каждая грань  $F$  многогранника, удовлетворяющего условию теоремы 5, также имеет параллельную грань  $F'$ . Грань  $F$  может быть разбита на многоугольники  $M_1, M_2, \dots$  так, что каждый кусок  $M_i$  перемещается при помощи последовательных симметрий в равный кусок  $M'_i$  на параллельной грани  $F'$ . Многоугольники  $M'_i$ , как и  $M_i$ , попарно не перекрываются. Однако расположены они, вообще говоря, в другом порядке, поэтому пока можно говорить не о равенстве граней, а о равенстве их площадей. Итак, каждая грань многогранника  $P$  имеет параллельную грань такой же площади. Тогда по теореме 4 этот многогранник является центрально-симметричным.

**Многогранники с центрально-симметричными гранями**

Ясно, что грани у центрально-симметричного многогранника не обязательно симметричны. Например, у октаэдра, который является центрально-симметричным многогранником, все грани – треугольники. Так что симметричность граней не является необходимым условием центрально-симметричного многогранника. Но является ли она достаточным условием? Оказывается да, является.

**Теорема 6** (А.Д.Александров). *Если все грани выпуклого многогранника  $P$  центрально-симметричны, то и сам многогранник  $P$  центрально-симметричный.*

Любопытно, что для плоских многоугольников аналог теоремы Александрова неверен: стороны любого, в том числе и несимметричного, многоугольника суть отрезки, которые всегда центрально-симметричны. В то же время данное утверждение верно для выпуклых многогранников любой<sup>4</sup> размерности  $d \geq 3$ .

Доказательство теоремы Александрова также опирается на теорему Минковского. Мы покажем, что каждая грань многогранника с симметричными гранями имеет параллельную равную грань. Отсюда будет следовать симметричность многогранника.

Заметим, что в многограннике с центрально-симметричными гранями его ребра и грани образуют так называемые *пояса*. Возьмем произвольное ребро, кото-

рое обозначим через  $E_1$ . Оно разделяет две грани, одну из которых обозначим через  $F_1$ . Так как грань  $F_1$  симметрична, то ребро  $E_1$  имеет в ней симметричное ребро, которое обозначим через  $E_2$ .

Ребро  $E_2$ , в свою очередь, отделяет грань  $F_1$  от следующей грани  $F_2$ , которая содержит ребро  $E_3$ , симметричное ребру  $E_2$ , и т.д. Рано или поздно мы вернемся к ребру  $E_1$  со стороны другой грани  $F_m$  (рис.13). Ребра  $E_1, E_2, \dots, E_m = E_1$  и грани  $F_1, F_2, \dots, F_m$  образуют *пояс*  $B(E_1)$ , порожденный ребром  $E_1$ . Ясно, что все ребра пояса равны и параллельны друг другу.

Возьмем грань  $F$  многогранника  $P$  и содержащую ее опорную плоскость  $H$ . Проведем параллельную ей опорную плоскость  $H'$ , находящуюся по другую сторону от многогранника  $P$ . Спроецируем многогранник  $P$  и опорные плоскости  $H$  и  $H'$  вдоль ребра  $E_1$  на плоскость, перпендикулярную к  $E_1$  (рис.14). Пояс

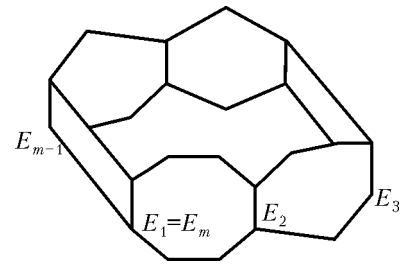


Рис. 13

$B(E_1)$  при этом проецируется в многоугольник  $M$  с  $m$  сторонами (проекциями граней пояса). Ребра пояса проецируются в вершины. Опорная плоскость  $H$  проецируется в прямую  $h$ , содержащую сторону многоугольника  $M$ . Параллельная опорная плоскость  $H'$  проецируется в параллельную опорную к многоугольнику прямую  $h'$ . Прямая  $h$  содержит если не сторону, то по крайней мере вершину многоугольника  $M$ . Поэтому опорная плоскость  $H'$  содержит ребро  $E$  из пояса  $B(E_1)$ , равное и параллельное ребру  $E_1$ .

Возьмем теперь на грани  $F$  другое, не параллельное  $E_1$ , ребро  $E'_1$ . Как и прежде, спроецируем пояс  $B(E'_1)$  вместе с опорными плоскостями  $H$  и  $H'$  вдоль ребра  $E'_1$  на перпендикулярную к  $E'_1$  плоскость. Как и раньше, получаем, что та же самая опорная плоскость  $H$  содержит также ребро из пояса  $B(E'_1)$ . Таким образом, опорная плоскость  $H$  содержит два ребра, а следовательно, и целую грань  $F'$ , параллельную грани  $F$ .

Почему грани  $F$  и  $F'$  равны друг другу? Дело в том, что, применяя только что использованный аргумент к любой паре параллельных ребер грани  $F$ , получаем, что грань  $F'$  также содержит пару ребер, параллельных и равных первой паре. Мы имеем два многоугольника, у которых есть соответственно параллельные и равные стороны. По «плоской» версии теоремы 4, такие многоугольники параллельны и равны. Таким образом, по теореме 4, многогранник  $P$  центрально-симметричный.

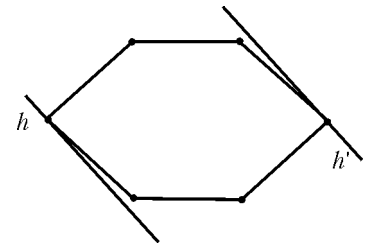


Рис. 14

<sup>4</sup> А.Д.Александров доказал эту теорему для размерности 3. Хотя идея доказательства этой теоремы для произвольной размерности совершенно прозрачна, этот факт для произвольной размерности был установлен позднее Дж.Шепардом и П.Макмалленом.

## Параллелеэдры

К своей теореме о многогранниках с заданными направлениями граней Минковский пришел в ходе изучения важного класса многогранников – *параллелеэдров*. Параллелеэдром называется выпуклый многогранник, параллельными копиями которого можно заполнить все пространство без пропусков и перекрытий. Например, куб является своего рода кирпичом, из которого можно «выстроить» пространство.

Важность параллелеэдров связана с математическим описанием строения кристалла. Согласно этой теории, параллелеэдр является элементарной ячейкой кристалла. Это означает, что структура всего кристалла определяется однозначно тем, как он устроен в пределах одной ячейки – параллелеэдра, – заполненной связанными между собой атомами. Затем эта локальная структура вместе с параллелеэдром переносится по пространству, определяя глобальную структура кристалла. Это напоминает то, как при наклеивании обоев небольшой фрагмент (фундаментальная ячейка) переносится по всей стене.

**Задача 4.** Плоский аналог параллелеэдра называется *параллелограмом*. Покажите, что имеется два и только два типа параллелограмов: параллелограммы и центрально-симметричные шестиугольники (рис. 15).

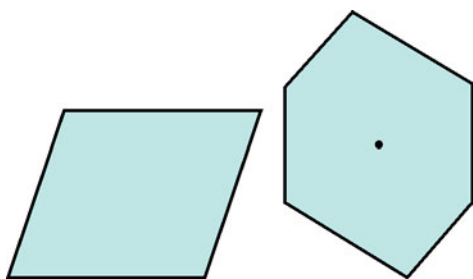


Рис. 15

Какие еще, кроме параллелепипеда, бывают пространственные «кирпичи»?

Все типы трехмерных параллелеэдров были найдены русским кристаллографом Е.С.Федоровым (1853–1919). Из оказалось пять: параллелепипед, центрально-симметричная шестиугольная призма, два двенадцатигранника – ромбический и гексагональный додекаэдр, а также так называемый усеченный кубооктаэдр с 14 гранями (рис. 16). Параллелеэдры сейчас часто называют в честь их открывателя *телами Федорова*. Правда, Федоров нашел эти параллелеэдры в предположении, что параллелеэдры являются центрально-симметричными многогранниками. Минковский, опираясь на доказанную им теорему о выпуклых многогранниках, доказал теорему о свойствах параллелеэдров:

- 1) *параллелеэдр имеет центр симметрии;*
- 2) *каждая грань параллелеэдра имеет центр симметрии;*
- 3) *проекция параллелеэдра вдоль ребра есть либо параллелограмм, либо центрально-симметричный шестиугольник.*

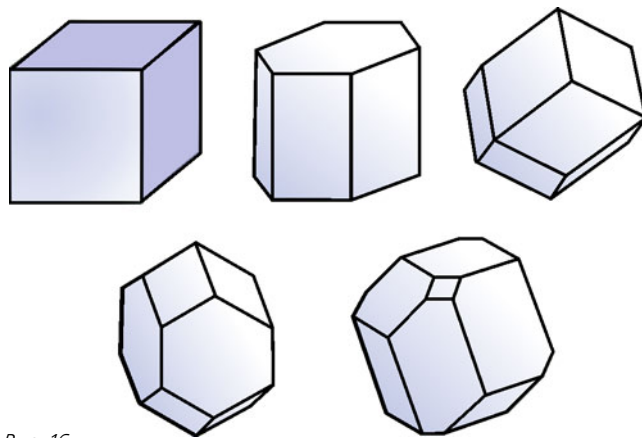


Рис. 16

В силу свойства 1, каждый параллелеэдр является центрально-симметричным, откуда следует полнота списка Федорова из 5 параллелеэдров. Заметим, что в теореме о параллелеэдрах из свойства 2 следует свойство 1. Однако в силу достаточно естественных причин в формулировке теоремы присутствуют оба свойства.

Замечательно, что теорема Минковского переносится на многомерный случай. Задача разбиения многомерного пространства на параллелеэдры сама по себе может быть и не очень интересна в практическом отношении. Но она тесно связана с задачей оптимальных покрытий и упаковок многомерных пространств шарами. А эта задача, в свою очередь, имеет реальные приложения.

В заключение отметим, что вокруг теоремы Минковского имеется ряд интересных, до сих пор не решенных задач. Среди них – изучение свойств операции сложения, вводимой в классе выпуклых многогранников на основании теоремы Минковского. Рассмотрим два выпуклых многогранника  $P$  и  $P'$  с соответствующими ежами векторов. Возьмем их объединение – это будет совокупность векторов с нулевой суммой. По основной теореме Минковского, такой совокупности однозначно соответствует выпуклый многогранник  $Q$ , который называется *суммой Бляшке* складываемых многогранников. Как определить по данным многогранникам, какой многогранник является их суммой Бляшке, – трудная, не решенная пока задача.

Другая интересная и трудная задача: как определить конкретный вид того единственного выпуклого многогранника, который по теореме Минковского соответствует данной системе векторов с нулевой суммой?

# Как увидеть невидимку

В. БЕЛОНУЧКИН

**М**НОГИЕ ЗАДАЧИ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ И ОСОБЕННО ДИФРАКЦИИ СВЕТА РЕШАЮТСЯ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА ГЮЙГЕНСА – ФРЕНЕЛЯ. ПРИ ЭТОМ НЕКОТОРАЯ ПОВЕРХНОСТЬ, ДО КОТОРОЙ ДОШЕЛ СВЕТ, РАССМАТРИВАЕТСЯ КАК СОВОКУПНОСТЬ НОВЫХ ИСТОЧНИКОВ СВЕТОВЫХ ВОЛН. ПОЛЕ В ЛЮБОЙ ТОЧКЕ, БОЛЕЕ УДАЛЕННОЙ ОТ РЕАЛЬНОГО ИСТОЧНИКА СВЕТА, ЕСТЬ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЕ ПОЛЕ ЭТИХ «ВТОРИЧНЫХ» ИСТОЧНИКОВ.

Ту же мысль можно выразить несколько иначе – поле на «опорной» поверхности представляется в виде набора сферических волн. Ведь каждый вторичный источник, т.е. каждый малый участок поверхности, это точечный источник света, от которого исходит сферическая волна. Результат интерференции этих волн определяет поле в точке наблюдения.

Но поле на опорной поверхности можно представить в виде набора и каких-нибудь других простых волн. Самые простые волны – плоские, и именно разложение по плоским волнам порой оказывается весьма продуктивным.

Работу, скажем, зонной пластинки Френеля удобно разбирать с помощью принципа Гюйгенса – Френеля, как это обычно и делается. Действие дифракционной решетки можно понять как на основе принципа Гюйгенса – Френеля, так и на языке плоских волн. А вот возможность саморепродукции (т.е. по-

лучения изображений периодических объектов без использования каких-либо оптических элементов – линз, зеркал) или мультипликации, т.е. возможность «размножения» изображения, предсказать на основе принципа Гюйгенса – Френеля практически невозможно. В то же время, с точки зрения фурье-оптики – так называется методика, использующая разложение по плоским волнам, – эти эффекты, можно сказать, почти очевидны.

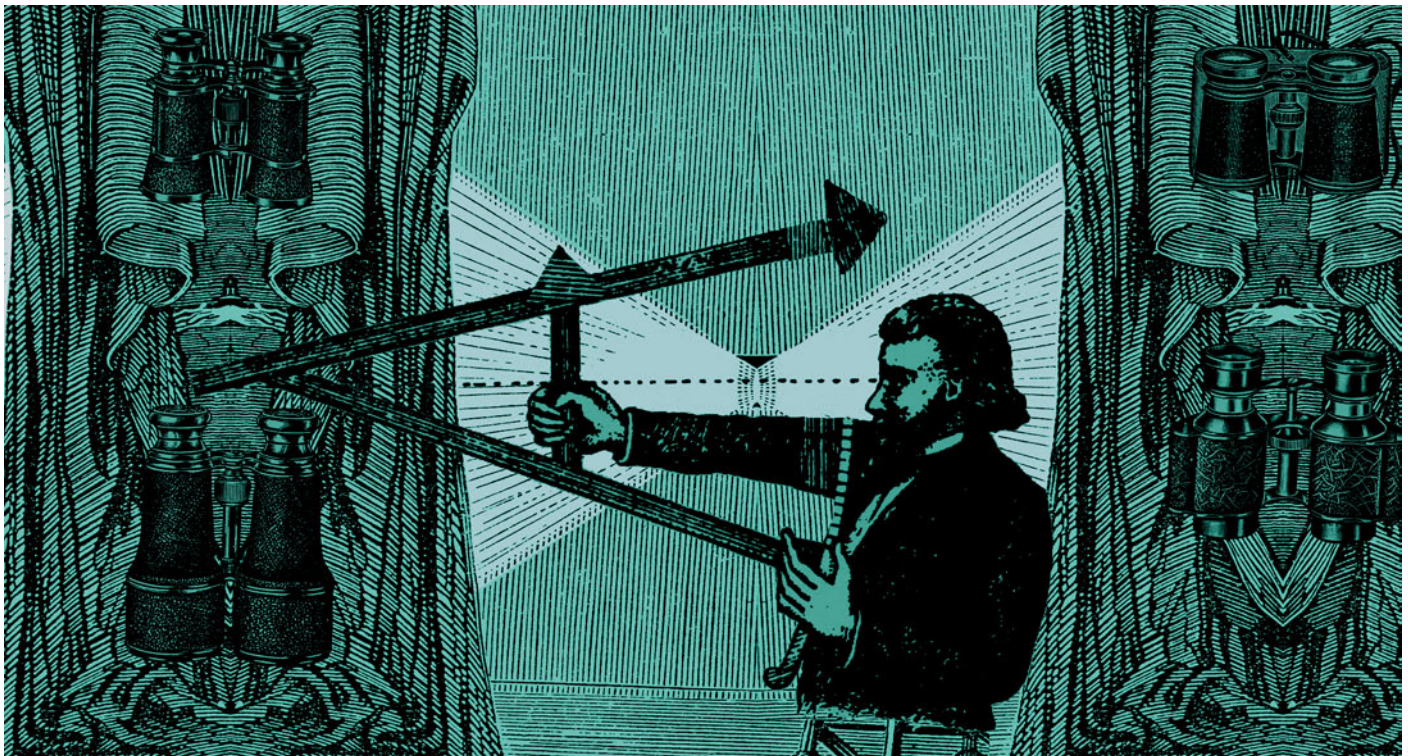
Неслучайно, например, эффект саморепродукции, обнаруженный Ф.Талботом еще в 1834 году, оставался загадочным курьезом более полувека, пока Дж.Рэлей, разработав аппарат фурье-оптики (1897 г.), не переоткрыл этот эффект и не объяснил его именно на языке плоских волн.

## Плоские волны и преобразование Фурье

Почему метод Рэля – метод разложения поля на плоские волны – называется еще и фурье-оптикой? Постараемся ответить на этот вопрос.

Рассмотрим поле, создаваемое в некоторой плоскости падающей на нее плоской волной. Пусть эта волна падает на плоскость  $z = 0$  и угол падения равен  $\alpha$  (рис.1). Той же величине равен угол между фронтом волны  $AA'$  и плоскостью  $z = 0$ .

Примем, что в начале координат ( $x = 0$ ) колебания



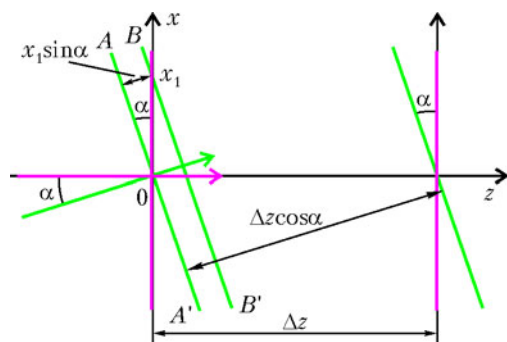


Рис.1. Падение плоской волны на плоскость

имеют вид

$$f(0, t) = a \cos \omega t .$$

Через точку  $x_1$  плоскости  $z = 0$  проходит фронт  $BB'$ , отстоящий от фронта  $AA'$  на  $x_1 \sin \alpha$ . Колебания в точке  $x_1$  отстают по фазе от колебаний в начале координат на величину  $k_x x_1$ , где  $k_x = k \sin \alpha$  – проекция волнового вектора  $\vec{k}$  на ось  $x$  (напомним, что волновой вектор направлен по нормали к волновому фронту, а его модуль равен  $2\pi/\lambda$ , где  $\lambda$  – длина волны). Тогда в произвольной точке  $x$  получаем

$$f(x, t) = a \cos(\omega t - k_x x) .$$

В частности,

$$f(x, 0) = a \cos k_x x .$$

Мы видим, что наклонной волне отвечает косинусоидальная функция от  $x$  с пространственным периодом

$$\Lambda = \frac{2\pi}{k_x} = \frac{2\pi}{k \sin \alpha} = \frac{\lambda}{\sin \alpha} .$$

Вот тут самое время вспомнить Фурье. Им доказана теорема, согласно которой практически любую функцию можно представить в виде суммы синусоид (или косинусоид, поскольку косинус это тот же синус, только сдвинутый по фазе). Но это означает, что любое поле в некоторой плоскости  $z$  можно представить в виде суперпозиции плоских волн. Так, периодическая функция периода  $\Lambda$  компонуется из синусоид с частотами  $\Omega_n = n\Omega$ , где  $\Omega = 2\pi/\Lambda$ , а  $n$  принимает значения  $0, 1, 2, 3, \dots$  (функция с  $n = 0$ , очевидно, представляет собой константу).

Ряд Фурье – набор гармоник – называют *разложением в спектр* соответствующей функции, а операцию по вычислению амплитуд и, если надо, фаз синусоид называют *преобразованием Фурье*.

Но в физике преобразование Фурье можно выполнить не только на бумаге. Например, камертон отзывается на сложный звуковой сигнал только тогда, когда в нем содержится спектральная компонента с частотой 440 Гц – нота ля первой октавы. Резонансный контур выделяет электрические колебания своей собственной частоты. Радиотехнический анализатор спектра показывает, какие в сигнале содержатся частоты и с каким «весом».

В оптике, в отличие от электрических цепей, сигнал является функцией не только времени, но и пространственных координат. *Временной спектр* оптического

сигнала – это и есть то, что обычно называется просто спектром или спектральным составом света. Его изучают с помощью призмы или дифракционной решетки. Нас сейчас интересует пространственный спектр. Для того чтобы было легче разобраться с ним, будем считать излучение монохроматическим.

Существует ли прибор, который может преобразовать по Фурье функцию, описывающую зависимость монохроматического сигнала от пространственных координат, иными словами, разложить такой сигнал в пространственный спектр?

Вспомним, что линза собирает параллельный пучок света в точку в своей фокальной плоскости. Но «параллельный пучок» и есть пучок с плоским волновым фронтом. Реально в фокальной плоскости линзы получается не одна освещенная точка, а небольшое пятно – из-за дифракции происходит размытие изображения. Можно сказать иначе: пространственный спектр ограниченного пучка уже содержит не одну плоскую волну, соответствующую основному направлению светового потока, а в нем присутствуют и другие гармоники.

Итак, распределение волнового поля по оси  $x$  в фокальной плоскости линзы представляет собой пространственный спектр поля перед линзой. Строго говоря, поле в задней фокальной плоскости является преобразованием Фурье поля передней фокальной плоскости: фазовые соотношения для различных волн в некоторой точке задней фокальной плоскости такие же, какие они в точке, находящейся на оптической оси линзы в передней фокальной плоскости. Поэтому *входным сигналом* мы будем считать именно поле в передней фокальной плоскости.

Теперь поставим вторую линзу. Рассмотрим схему Катрона: две линзы  $L_1$  и  $L_2$  с одинаковыми фокусными расстояниями  $F$  расположены на расстоянии  $2F$  друг от друга (рис.2). Первая линза преобразует плоскую волну, падающую под углом  $\alpha$ , в точечный источник света в своей задней фокальной плоскости. Для второй линзы – это передняя фокальная плоскость. Поэтому на выходе системы мы получаем плоскую волну с углом наклона, также равным  $\alpha$ . Правда, этот угол должен иметь другой знак, но для удобства мы договоримся на выходе отсчитывать углы «в другую сторону», и тогда можно сказать, что схема Катрона преобразует плоскую волну саму в себя.

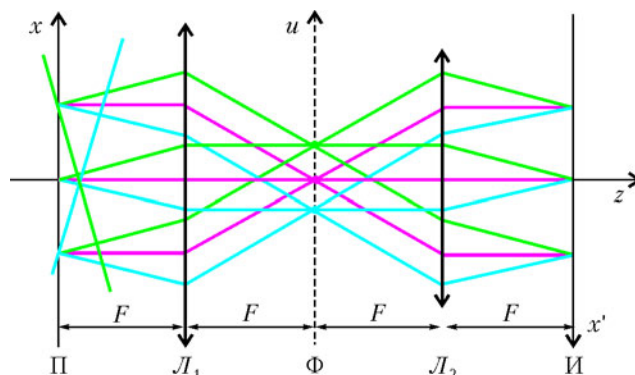


Рис.2 Схема Катрона

На спектральном языке это звучит так: вторая линза, как ей и полагается, преобразует по Фурье поле своей передней фокальной плоскости. По отношению к входному сигналу – это повторное преобразование Фурье, и оно должно дать функцию  $f(-x)$ .

Так или иначе, и лучевая оптика и фурье-оптика дают один результат: в плоскости *изображений* И мы получим изображение входной, *предметной* плоскости П, т.е. такое же поле, какое создано во входной плоскости:  $f(x') = f(x)$ , если только направление  $x'$  мы выбрали противоположным направлению  $x$ . А вот поле в общей *фокальной* плоскости двух линз  $\Phi$  – обозначим его через  $g(u)$  – представляет собой пространственный спектр входного и выходного сигналов. Причем плоской волне в плоскости П (или в плоскости И), волновой вектор которой составляет с осью системы угол  $\alpha$ , соответствует пространственная частота  $u$ , т.е. поле в точке с координатой  $u = F \sin \alpha$ .

Анализ поля  $g(u)$  позволяет предсказать, каким будет поле на выходе системы, т.е. поле  $f(x')$ . Первым это понял Э.Аббе (1872 г.). Именно изучение работы оптических приборов на основе анализа поля  $g(u)$  (Аббе называл его «первичным изображением») помогло ему превратить рядовую фабрику в прославленную фирму «Карл Цейсс Йена», по сию пору являющуюся законодателем мод в производстве самой разнообразной оптики.

Прежде чем перейти к конкретным задачам, оговорим некоторые ограничения и упрощения, которые далее будут подразумеваться. Во-первых, не будем учитывать конечность размеров линз, т.е. пучки с плоским фронтом будем считать плоскими волнами. Во-вторых, углы  $\alpha$  будем считать малыми, тогда, в частности, можно полагать  $\sin \alpha \approx \alpha$ . И в-третьих, при теоретическом анализе ограничимся одной поперечной (перпендикулярной оси системы – оси  $z$ ) координатой  $x$ , считая, что обобщение на полностью трехмерную ситуацию не должно вызвать особых затруднений.

### Простейшие спектры

Если на линзу падает плоская волна, в фурье-плоскости  $\Phi$  появляется одна светящаяся точка. Положение точки определяется соотношением  $u = F \sin \alpha \approx F\alpha$ . Что мы при этом видим в плоскости  $x$  (или в плоскости  $x'$ )?

Человеческий глаз, фотопластинка, фотоэлемент – все эти чувствительные к свету приборы являются *квадратичными детекторами*: их отклик определяется интенсивностью света, т.е. величиной, пропорциональной квадрату амплитуды, и совсем не зависит от фазы. При освещении некоторой плоскости плоской волной (неважно, какого направления) любой из этих приемников покажет равномерную освещенность этой плоскости, даст одинаковый сигнал в любой точке поверхности.

Теперь рассмотрим чуть более «богатый» спектр: две плоские волны, две точки в фурье-плоскости. Пусть координата одной из точек  $u = u_0 = 0$ , а другой  $u = u_1$ . Тогда фаза гармоники  $u_0$  в плоскости И постоянна, а

фаза гармоники  $u_1$  представляет собой периодическую функцию координаты  $x'$  с периодом  $\Lambda = \lambda / \sin \alpha \approx \lambda / \alpha$ . Но это означает, что и суммарное поле есть периодическая функция  $x'$  с тем же самым периодом  $\Lambda$ .

В общем, конечно, нам известно, что в плоскости изображений И мы увидим картину интерференционных полос шириной  $\Lambda$ . Однако задержимся еще немного на этом примере, чтобы вспомнить так называемый метод векторных диаграмм.

Вкратце этот метод можно описать следующим образом. Изобразим составляющие колебания одинаковой частоты (в данном случае, конечно, имеется в виду временная частота) векторами, длина каждого из которых пропорциональна амплитуде соответствующего колебания, а угол, составляемый этим вектором с некоторым выбранным нами направлением, равен начальной фазе колебания. Тогда сумма векторов изобразит результирующее колебание: его длина в том же масштабе даст нам амплитуду суммарного колебания, а угол, который этот вектор составит с тем же исходным направлением, – фазу этого колебания.

Эволюция фазовой диаграммы при смещении точки наблюдения вдоль оси  $x$  для случая двух волн изображена на рисунке 3, а.

Фазу колебания пространственной частоты  $u_0$  принимаем равной нулю, и она остается таковой во всей плоскости И. Фаза колебания  $u_1$  меняется в зависимости от  $x$ , и это означает, что соответствующий вектор вращается, причем при смещении на расстояние  $\Lambda$  он делает полный оборот. Длина  $A$  вектора  $\vec{A} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1$ , где  $a_0$  и  $a_1$  – амплитуды гармоник  $u_0$  и  $u_1$  соответственно, определяет амплитуду колебаний в точке  $x$ . Интенсивность колебаний, т.е. освещенность  $I$  в этой точке, пропорциональна квадрату амплитуды:

$$I(x) \sim A^2(x).$$

По теореме косинусов получаем

$$I(x) \sim A^2(x) = a_0^2 + a_1^2 + 2a_0a_1 \cos \Omega x. \quad (1)$$

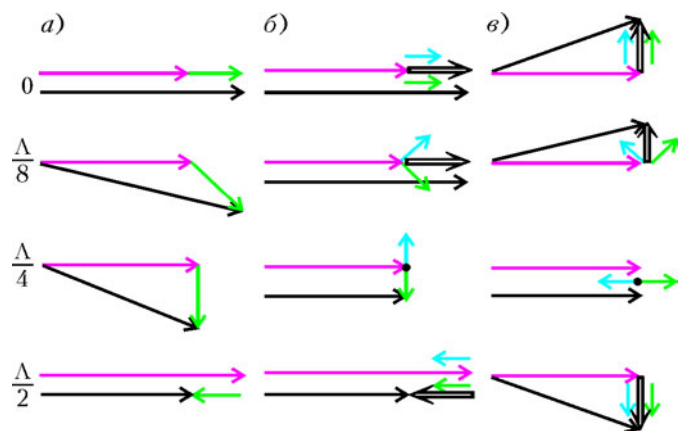


Рис.3. Векторные диаграммы: а) интерференция двух волн; б) амплитудная решетка; в) фазовая решетка. Здесь красная линия соответствует нормальной волне, синяя и зеленая – наклонным волнам, двойная линия – сумме наклонных волн, черная – полному суммарному вектору

Обычно зависимости такого рода записывают в виде

$$I(x) = I_0 (1 + m \cos \Omega x). \quad (2)$$

Величина  $m$  называется *коэффициентом* или *глубиной модуляции* величины  $I$ . В нашем случае

$$I_0 \sim a_0^2 + a_1^2, \quad m = \frac{2a_0 a_1}{a_0^2 + a_1^2}.$$

### Синусоидальные решетки

Получить из плоской волны волну со сложным (богатым) спектром нетрудно – надо на пути плоской волны поставить преграду, создать в пространстве любую неоднородность.

Если преграда поглощает свет (возможно, частично), то в разных местах будут разные амплитуды колебаний, а это уже не совсем плоская волна.

Если препятствие прозрачно, то оно в разных местах может, например, иметь разные показатели преломления или (при постоянном показателе преломления) разную толщину. В любом из этих случаев фазы колебаний за препятствием станут различными, т.е. фронт волны исказится, она перестанет быть плоской, хотя амплитуда колебаний может остаться всюду одной и той же.

Возможна, конечно, и комбинация искажений амплитуды и фазы – комбинация *амплитудной и фазовой модуляции* волны.

Мы рассмотрим специфический, но широко распространенный вид препятствий – *плоские транспаранты*. Плоская пластинка, толщиной которой можно пренебречь, в разных местах имеет различные коэффициенты пропускания, поэтому при падении на пластинку, например, плоской волны, волна на выходе в разных точках будет иметь различные характеристики – амплитуду, фазу.

**Амплитудная синусоидальная решетка.** Сфотографируем картину интерференции двух волн, для чего просто поместим фотопластинку в плоскость И или в плоскость П. Затем проявим негатив в таком режиме, чтобы амплитудный коэффициент пропускания был пропорционален освещенности данной точки пластинки при экспозиции. Заметим кстати, что именно так обычно проявляют голограммы. Мы получим *синусоидальную амплитудную решетку* – коэффициент пропускания зависит от координаты по синусоидальному закону.

Теперь поместим пластинку в плоскость П и осветим плоской волной. По определению коэффициента пропускания амплитуда световой волны на выходе из пластинки равна амплитуде на входе, умноженной на коэффициент пропускания. Для плоской волны амплитуда – константа, и на выходе мы получим

$$A(x) = A_0 (1 + m \cos \Omega x). \quad (3)$$

Это – волна, амплитуда которой промодулирована по синусоидальному закону. Пространственный спектр такой волны можно вычислить, но мы попробуем просто угадать ответ.

Представим, что на некоторую плоскость падают три плоские волны: одна – с амплитудой  $a$  – падает на

плоскость по нормали, а две другие – каждая с амплитудой  $ma/2$  – падают под углами  $+\alpha$  и  $-\alpha$ . Пусть в точке  $x = 0$  фазы трех волн совпадают, примем их равными нулю.

Фаза первой волны будет равна нулю во всей плоскости. А вот фазы двух наклонных волн будут при изменении координаты  $x$  равномерно меняться с одинаковыми скоростями, но в противоположных направлениях. Это означает, что на векторной диаграмме стрелочка, изображающая волну  $a$ , будет неподвижной, а две остальные стрелочки, изображающие волны  $ma/2$ , по мере смещения точки наблюдения вдоль оси  $x$  будут симметрично вращаться в противоположные стороны (рис.3,б). Суммарный вектор будет иметь все время одну и ту же, по нашему соглашению – нулевую, фазу, а длина его будет меняться по закону

$$A(x) = a(1 + m \cos \Omega x).$$

Итак, на выходе синусоидальной амплитудной решетки мы имеем три волны: одна распространяется вдоль оси и две под углами  $\pm\alpha$  ( $\alpha \approx \sin \alpha = \lambda/\Lambda = \Omega/k$ ) к оси. И действительно, если мы посмотрим на фурье-плоскость, когда в плоскости П размещена освещенная плоской волной синусоидальная амплитудная решетка, мы увидим три светлых пятна. Почему получаются пятна, а не точки, мы уже знаем.

Не странно ли, что, изготовив решетку с использованием двух волн, мы с помощью этой решетки получаем три волны? Да нет. Фотопластинка, как квадратичный детектор, реагировала на интенсивность, можно сказать на амплитуду суммарной волны, а фаза не играла никакой роли. Но распределение (1) или (2), а значит, и пропускание (3) будут получены и тогда, когда угол падения наклонной волны равен  $+\alpha$ , и тогда, когда мы заменим эту волну на волну с углом падения  $-\alpha$ . Пластинка «забыла», какая волна падала на нее при экспозиции!

Между прочим, точно по этой же причине обычная голограмма дает два изображения: мнимое – там, где был расположен при экспозиции реальный предмет, и действительное – симметрично относительно плоскости голограммы. Впрочем, мы как раз и получили *голограмму плоской волны*.

**Фазовая синусоидальная решетка.** Мы считали, что в начале координат, т.е. в точке  $x = 0$  (или  $x' = 0$ ) фазы трех волн совпадают. А если это не так? Предположим, что в этой точке фазы наклонных волн отличаются от фазы нормальной волны на одну и ту же величину, выберем ее равной  $\pi/2$ . Оговоримся, что рассмотрим случай, когда амплитуды наклонных волн малы, т.е.  $m \ll 1$ .

Точно так же, как и в предыдущем примере, при смещении по оси  $x$  на векторной диаграмме стрелочка  $a$  неподвижна, а две стрелочки  $ma/2$  вращаются в противоположные стороны. Результат можно понять из рисунка 3,в: практически не изменяя своей длины, результирующий вектор «качается», меняет фазу. Если, как мы договорились,  $m \ll 1$ , то фаза меняется мало и ее изменение происходит по синусоидальному закону:  $\varphi \approx m \cos \Omega x$ .

Какой транспарант может дать такое поле?

Это может быть прозрачная пластинка, толщина которой, оставаясь все время малой, меняется вдоль оси  $x$  по синусоидальному закону. Или это может быть пластинка постоянной толщины с коэффициентом преломления, синусоидально изменяющимся вдоль оси  $x$ . Такую пластинку можно изготовить следующим образом. «Отбелить» фотопластинку, на которой мы получили амплитудную решетку. При отбеливании из эмульсии вымывается то самое высвободившееся из химического соединения серебро, которое и создает изображение. Связанное серебро вымывается еще в процессе фиксирования изображения. После отбеливания пластинка становится прозрачной, но показатель преломления оказывается в разных точках разным. Значит, от точки к точке меняется набег фазы, получаемый волной при прохождении пластинки.

Что же мы при этом увидим? А ничего не увидим. Глядя на такую пластинку или на ее изображение, мы увидим равномерно освещенную поверхность: ведь глаз не реагирует на фазу. А вот в спектральной плоскости мы, так же, как и в случае амплитудной синусоидальной пластинки, увидим три пятнышка.

Обсудим еще немного спектр фазовой решетки. Строго говоря, если интерферируют три волны, модуль суммарного вектора даже при  $m \ll 1$  все же чуть-чуть меняется. Когда фазовый угол достигает максимума  $\varphi_0$ , относительное изменение модуля вектора равно примерно  $m^2/2$ . Чтобы постараться сделать длину постоянной, мы должны добавить еще пару векторов длиной  $m^2 a/8$ , которые бы чуть увеличивали длину суммарного вектора, когда  $\varphi \rightarrow 0$ , и уменьшали, когда  $\varphi \rightarrow \pm\varphi_0$ . Можно догадаться, что эти векторы должны вращаться вдвое быстрее, чем «основные» модулирующие фазу векторы.

Подробный анализ показывает, что для получения в точности неизменной длины суммарного вектора, т.е. для получения чисто фазовой структуры, надо взять бесконечное число добавочных векторов. Соответственно, в спектре строго фазовой решетки будет содержаться бесконечное число пространственных гармоник. Однако, если мы приняли условие  $m \ll 1$ , каждый следующий вектор будет все меньше и меньше. Мы просто не заметим в фурье-плоскости более высоких гармоник.

Наоборот, если волн действительно три, мы не заметим изменений освещенности. Так, например, если  $\varphi_0 \approx m = 0,1$ , то глубина модуляции амплитуды будет около 0,005 и освещенности – примерно 0,01. Такие вариации освещенности глаз просто не замечает.

### Невидимка виден!

Итак, мы знаем, как получить фазовую решетку, какой у нее спектр: мы познакомились с простейшим *фазовым объектом*. История, правда, развивалась в обратном порядке. Сначала пришло осознание того, что существуют достаточно сложные прозрачные объекты, например клетки живого организма. Затем поняли, что такой объект может изменять структуру падающего на него света. И наконец, когда Аббе и Рэлей заложили

основы фурье-оптики, прояснились пути визуализации фазовых объектов – как увидеть картинку, вариации интенсивности в которой отражали бы вариации фазы световой волны.

Вот, скажем, человек-невидимка из романа Герберта Уэллса. Поверим на минуту, что он стал прозрачным. Но все же он из чего-то состоит, показатель преломления тканей его организма не такой, как у воздуха. Он изменяет хотя бы фазовую структуру падающего на него света. Нельзя ли это увидеть?

Осветим то место, где предполагается наличие невидимки, плоской волной, а потом посмотрим, что получится в фокальной плоскости линзы, собирающей этот свет. Если между осветителем и линзой ничего нет, то появится одно пятно, а если что-то есть, пусть даже прозрачное, то пространственный спектр будет более сложным, более богатым.

Таким образом, что-то мы заметили. Но нельзя ли разглядеть, что именно? Придумано немало способов, как это сделать. Некоторые из них были открыты эмпирически даже до работ Аббе. Вот несколько примеров.

**Метод темного поля** (Теплер, 1867 г.). Загородим маленьким непрозрачным экранчиком в фурье-плоскости нулевой максимум – красное пятнышко на рисунке 2. Тем самым из векторной диаграммы рисунка 3, в мы изымаем вектор  $\vec{a}$ , соответствующий волне, падающей на плоскость изображений И по нормали. Эта волна, в особенности при малой модуляции фазы, заметно мощнее даже суммы остальных, поэтому средняя освещенность резко падает – отсюда и название метода.

Но важнее другое. Теперь на плоскость изображений падают только две волны, а это значит, что вдоль координаты  $x$  будет меняться освещенность – мы увидели невидимку.

Но особенно радоваться не приходится. Эти волны составляют друг с другом угол  $2\alpha$ , период изменения интенсивности вдвое меньше, чем период изменения

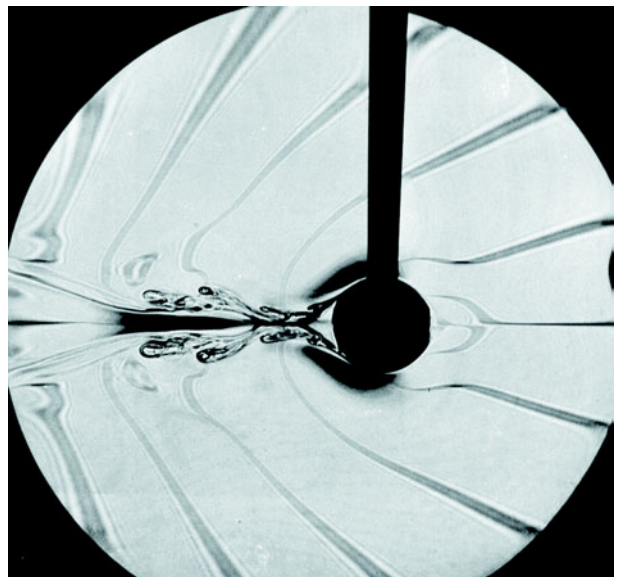


Рис.4. Волны в жидкости за движущимся цилиндром (метод темного поля). Автор благодарит за снимок В.Можяева и А.Шеронова

фазы. Если мы знаем, что речь идет о синусоидальной решетке, это совсем несложно учесть. Но если структура объекта сложная, спектр богатый, то вариации интенсивности будут не очень-то похожи на картину вариаций фазы. Мы заметим что-то, наверное, увидим контуры объекта, разглядеть же его подробно нам вряд ли удастся.

Впрочем, не только самые простые объекты послышны методу темного поля. Широкое применение он находит до сих пор, например, в гидроаэромеханике. При обтекании преграды или при наличии тепловой конвекции в жидкостях и газах возникают вариации плотности, вариации коэффициента преломления.

На рисунке 4 представлена фотография, полученная методом темного поля. Она позволяет выявить многие детали строения потоков, не видимые на обычном снимке.

**Нож Фуко.** Это исторически первый (1859 г.) метод наблюдения фазовых объектов. Давайте загородим не центральный максимум, а один из боковых. Тогда на рисунке 3,в остается неподвижный вектор и только один вращающийся. Опять две волны, опять вариации амплитуды, вариации освещенности, но теперь они происходят именно с тем периодом, с каким меняется фаза.

Можно заодно «отрезать» и часть главного максимума: при малой величине  $m$  это подравняет интенсивности двух оставшихся волн и тем самым повысит контрастность картины. В ситуациях с более богатым спектром подобное происходит, можно сказать, автоматически – загораживают половину спектра.

Два рассмотренных метода поясняют происхождение термина «оптическая фильтрация», который используется для обозначения операций, производимых в фурье-плоскости: мы действительно фильтровали спектр – что-то убирали, что-то пропускали. Но тем же термином обозначаются и другие операции, каким-то образом преобразующие отдельные компоненты спектра.

**Метод фазового контраста.** Картины, полученные при использовании ножа Фуко или метода темного поля, неадекватно передают картину вариаций фазы. Кроме того, теряется много света. Возможно, в каких-то случаях последнее даже полезно. Но вот в микроскопии, где освещенность часто и без того мала, хотелось бы использовать весь свет.

Этого добился Ф.Цернике. Разработав метод фазового контраста (1934 г.), он на его основе создал так называемый фазоконтрастный микроскоп (1935 г.), за что в 1953 году был удостоен Нобелевской премии.

Цернике предложил «повернуть» вектор  $\vec{a}$  на  $\pi/2$ . Тогда мы от диаграммы рисунка 3,в должны возвратиться к рисунку 3,б. Для этого надо загородить нулевой максимум в фурье-плоскости прозрачной пластинкой, а толщину пластинки выбрать такой, чтобы она вносила дополнительную разность хода  $\lambda/4$ , т.е. давала сдвиг фаз  $\pi/2$ . Можно, конечно, чтобы разность хода составляла  $(n + 1/2)\lambda/2$ , а, значит, разность фаз  $(n + 1/2)\pi$ . Во всех этих случаях вектор  $\vec{a}$  повер-

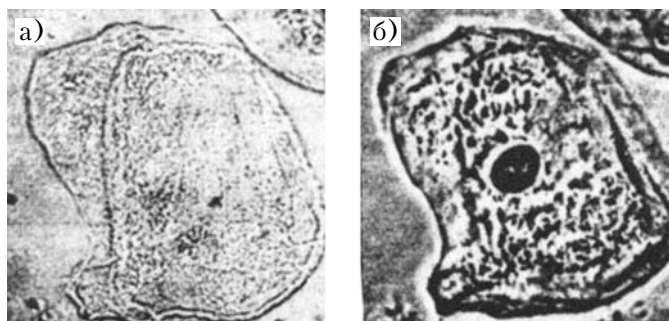


Рис.5. Микрофотографии клетки живого организма: а) обычная; б) фазоконтрастная

нется на  $90^\circ$ . Фазовая модуляция превращается в амплитудную без искажений и без потерь света.

Наконец-то мы по-настоящему увидели невидимку!

На рисунке 5 приведены две микрофотографии клетки. Конечно, кое-что видно и при обычном фотографировании. Но фазоконтрастный снимок позволяет увидеть намного больше деталей клетки.

**Метод расфокусировки.** В заключение рассмотрим метод, в котором вообще не используются операции со спектром, но который тоже основан на идеях фурье-оптики.

Отойдём немного от плоскости изображений. Распространяющиеся дальше плоские волны получают дополнительный сдвиг фаз, и, что для нас самое важное, этот сдвиг фаз различен для волн разных направлений.

Действительно, рассмотрим фазовые соотношения в точках на оси, отстоящих на  $\Delta z$  (см. рис.1). Именно на это расстояние удалены друг от друга соответствующие волновые фронты для нормально падающей волны. А для наклонной волны (как видно из того же рисунка) расстояние между фронтами равно только  $\Delta z \cos \alpha$ .

Если в плоскости И наклонные волны, например, отстают от нормальной волны по фазе на  $\pi/2$  и мы имеем картину фазовой модуляции, то на некотором расстоянии  $\Delta z$  от этой плоскости, таком, что  $\Delta z(1 - \cos \alpha) = \lambda/4$ , все волны (на оси) окажутся в одной фазе, и получится картина амплитудной модуляции. Конечно, можно в качестве исходной плоскости взять не И, а саму плоскость П, т.е. просто глядеть не на пластинку, а на несколько удаленную от нее плоскость.

Если же  $\Delta z(1 - \cos \alpha)$  равно  $\lambda$  или любому целому числу длин волн  $n\lambda$ , то фазовые соотношения будут точно такими же, какими они были в плоскости изображений. А это значит, что мы увидим точно такую же картину: если в плоскости изображений была фазовая картинка, то и в этих плоскостях она будет фазовой, если была амплитудной – и будет амплитудной. Получается, что на некоторых расстояниях от такого предмета (или его изображения) «само собой», без каких-либо оптических инструментов, вновь получается изображение.

Но это, как говорится, уже другая история.



# Деннис Габор

А. ВАСИЛЬЕВ

**И**ЗОБРЕТАТЕЛЬ ГОЛОГРАФИИ, АНГЛИЙСКИЙ физик венгерского происхождения Деннис (Денеш) Габор (1900–1979) родился в Будапеште и увлекся оптическими исследованиями еще в школе. Из прочитанного им самостоятельно по физике его особенно заинтересовала теория микроскопа Аббе и метод цветной фотографии Липмана. Вместе со своим братом Деннис построил дома небольшую физическую лабораторию и проводил опыты по актуальным в начале XX века направлениям.

В 1924 году Габор получил диплом инженера в Высшей технической школе Берлина, а еще через три года там же защитил диссертацию. В эти годы физика в Германии и, в частности, в Берлинском университете достигла своего апогея. Здесь одновременно работали Эйнштейн, Планк, Нернст и Лауэ. В 1927 году Габор поступил на фирму «Сименс» и сделал свое первое крупное изобретение – созданная им кварцевая ртутная лампа широко использовалась для уличного освещения.

В 1933 году, с приходом Гитлера к власти, Габор уехал сначала в Венгрию, а затем в Англию. Здесь он также работал в промышленной компании и продолжал свои научные изыскания. В 1947 году Габор придумал, а еще через год провел первые эксперименты по голографии, называвшейся тогда «реконструкцией волнового фронта». Однако эти работы из-за отсутствия источников монохроматического излучения на двадцать лет опередили свое время и не привели к созданию голограмм. Это стало возможным лишь с изобретением и внедрением лазера.

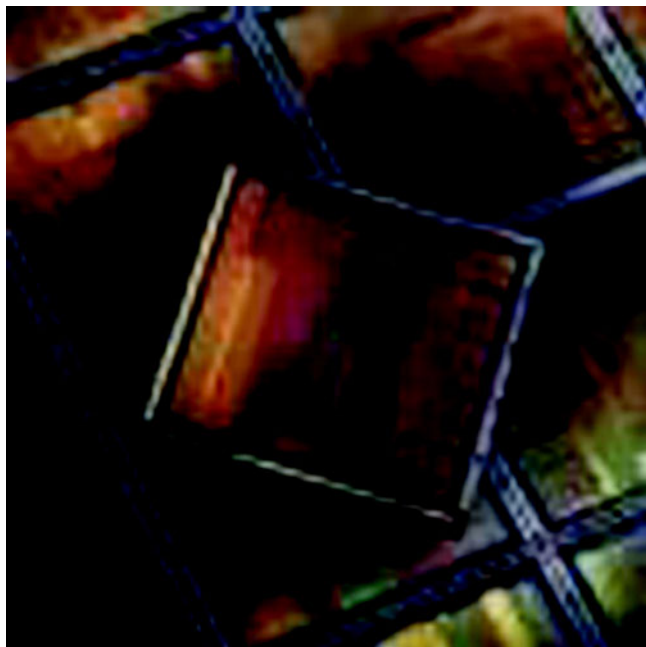
В 1949 году Габор перешел в Имперский колледж науки и технологии в Лондоне, где проработал до своего ухода на пенсию в 1967 году. Здесь он разработал голографический микроскоп, плоскую цветную телевизионную трубку и изобрел термоионный конвертер. Теоретические работы Габора этого периода включали расчеты по теории коммуникации, теории плазмы и теории термоядерного синтеза. Последняя из них предполагала схему, в которой высокотемпературная плазма создавалась 1000-амперным разрядом в потоке, скорость которого превосходила скорость формирования многочисленных нестабильностей. К счастью, одна нестабильная мода всегда оставалась, так что не пришлось тратить деньги на проверку этой гипотезы.

К концу жизни Габор увлекся футуристическими изысканиями и много занимался преодолением разрыва между высокими технологиями и социальными институтами. Свои идеи в этой области Габор изложил в монографиях «Изобретая будущее», «Инновации» и «Зрелое общество».

В 1971 году Деннис Габор был удостоен Нобелевской премии по физике за открытие голографии.

Собственно голограмма, как система трехмерной лишенной линз фотографии, может быть получена, например, следующим образом. Объект фотографируется в абсолютно темной комнате на столе, защищенном от вибрации (смещение даже на половину длины волны видимого света приведет к размытости изображения на пленке). При снятии голограммы поток лазерного излучения расщепляется на два луча. Один из них – опорный – направляется через диффузор на голографическую пленку, так что она оказывается освещенной равномерно и полностью. Второй луч, также через диффузор, направляется на объект съемки и после отражения попадает на пленку. Отраженный луч несет информацию о положении, размерах, форме и текстуре объекта. Накладываясь на опорный луч на пленке, он образует интерференционную картину, которая записывается светочувствительной эмульсией.

В качестве пленок и реактивов для голограмм, в принципе, используются те же материалы, что и в обычной фотографии. После проявления пленки голограмма освещается под тем же углом, под которым был направлен опорный луч во время съемки. Для освещения и получения трехмерного изображения теперь



*(Продолжение см. на с. 23)*

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 октября 2006 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4–2006» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2006» или «Ф2013». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2006 и М2009 предлагались на XXXII Всероссийской олимпиаде школьников по математике. Задача М2008 предлагалась на математической олимпиаде ФМЛ 239 Санкт-Петербурга.

Задачи Ф2013–Ф2017 предлагались на Московской физической олимпиаде этого года.

## Задачи М2006–М2010, Ф2013–Ф2017

**М2006.** График линейной функции касается графика квадратичной функции  $y = f(x)$ , а график квадрата этой линейной функции получается из графика функции  $y = f(x)$  сдвигом вниз на величину  $p$ . Найдите  $p$ .  
*Н. Агаханов*

**М2007.** Четырехугольник  $ABCD$  описан около окружности с центром  $I$ . На отрезках  $AI$  и  $IC$  выбраны точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $\angle MBN = \frac{1}{2} \angle ABC$ . Докажите, что  $\angle MDN = \frac{1}{2} \angle ADC$ .  
*Л. Емельянов*

**М2008.** Назовем делитель числа  $n$  маленьким, если он не превосходит  $n/10000$ , и большим – в противном случае. Конечно ли множество чисел, у которых произведение всех больших делителей, отличных от самого числа, равно произведению всех маленьких?  
*А. Голованов*

**М2009.** Даны  $n > 1$  приведенных квадратных трехчленов  $x^2 - a_1x + b_1, \dots, x^2 - a_nx + b_n$ , причем все  $2n$  чисел  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  различны. Может ли случиться, что каждое из чисел  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  является корнем одного из этих трехчленов?  
*А. Бадзян*

**М2010\*.** Для натуральных чисел  $m$  и  $n$  обозначим через  $F(m, n)$  количество всех связанных клеточных фигур в прямоугольнике  $m \times n$ . Докажите, что четность числа  $F(m, n)$  совпадает с четностью числа

$\frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{m(m+1)}{2}$ . (Связная клеточная фигура – это такое непустое множество клеток, что из любой клетки этого множества можно пройти в любую другую клетку этого множества по клеткам этого множества, переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетку.)  
*А. Бадзян*

**Ф2013.** На горизонтальной плоскости сидит лягушка. Навстречу ей издали катится барабан радиусом  $R$ . Центр барабана движется со скоростью  $v$ . С какой наименьшей скоростью должна подпрыгнуть лягушка, чтобы перепрыгнуть барабан, слегка коснувшись его только в верхней точке? Размерами лягушки можно пренебречь.  
*М. Ромашка*

**Ф2014.** В системе, изображенной на рисунке 1, массы всех трех грузов одинаковы и равны  $m$ . Нить, соединяющая грузы 1 и 2, невесома и нерастяжима; ее участки, не лежащие на блоках, вертикальны или горизонтальны; блоки невесома; трения нет. Груз 3 движется по горизонтальной плоскости не опрокидываясь. Найдите ускорения всех трех грузов. Ускорение свободного падения равно  $g$ .  
*М. Семенов*

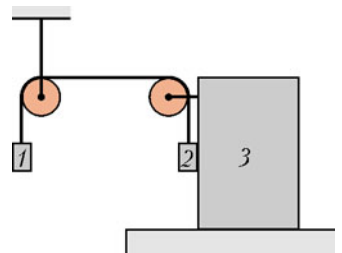


Рис. 1

**Ф2015.** Найдите сопротивление между клеммами  $A$  и  $B$  цепи, изображенной на рисунке 2 и состоящей из

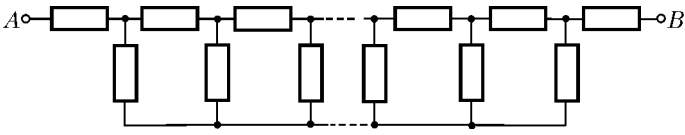


Рис. 2

бесконечного числа одинаковых резисторов с сопротивлением  $R$  каждый.

Д.Харабадзе

**Ф2016.** Во всех точках кривой  $A$ , изображенной на рисунке 3, потенциал электрического поля, созданного

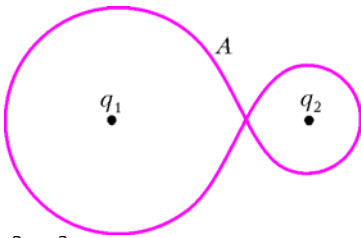


Рис. 3

неподвижными точечными зарядами  $q_1 = 4$  нКл и  $q_2 = 1$  нКл, равен  $\phi = 900$  В. Определите расстояние  $l$  между зарядами. Постоянная в законе Кулона  $k = 9 \cdot 10^9$  Н·м<sup>2</sup>/Кл<sup>2</sup>.

И.Горбатый

**Ф2017.** В воду с показателем преломления  $n_v$  частично погружена тонкая стеклянная плосковыпуклая линза, причем ее плоская сторона горизонтальна и находится под водой, а толщина линзы  $H$  (рис.4). На эту систему вертикально падает параллельный пучок света. На глубинах  $l$  и  $L > l$  в воде возникают два одинаково ярких изображения. Каковы радиус  $R$  выпуклой поверхности линзы, показатель преломления  $n$  материала линзы и глубина  $h$  ее погружения в воду? Отражением света от воды и от линзы, а также поглощением света пренебречь.

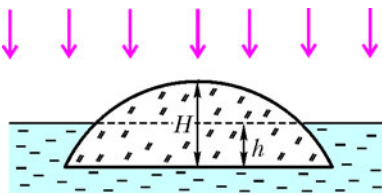


Рис. 4

С.Варламов, М.Семенов

**Решения задач М1981–М1990, Ф1998–Ф2002**

**М1981.** В клетках таблицы  $11 \times 11$  расставлены все натуральные числа от 1 до 121. Дима посчитал произведение чисел в каждой строке, а Саша – произведение чисел в каждом столбце. Могли ли они получить одинаковые наборы из 11 чисел?

**Ответ:** не могли.

Из 13 чисел 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113 (это простые числа из промежутка [61;121]) найдутся два числа  $p$  и  $q$ , расположенные в одной строке. Значит, в наборе чисел Димы есть число  $A$  (произведение чисел этой строки), которое делится на  $pq$ . С другой стороны, существует единственный столбец (а именно, столбец, содержащий число  $p$ ), произведение чисел которого делится на  $p$ . Но в этом столбце нет числа  $q$ , поэтому в наборе чисел Саши отсутствует число  $A$ .

С.Берлов

**М1982.** На экране написано натуральное число. Каждую секунду к написанному в данный момент числу

прибавляется произведение цифр его десятичной записи. Докажите, что начиная с некоторого момента число на экране не будет изменяться.

Сначала докажем следующую **лемму**: найдется такое натуральное  $k_0$ , что при  $k > k_0$  любое  $k$ -значное число более чем в 10 раз превосходит произведение своих цифр.

**Доказательство.** Любое  $k$ -значное число не меньше  $10^{k-1}$ , а произведение его цифр не больше  $9^k$ ; поэтому достаточно, чтобы для  $k$  выполнялось неравенство

$$10^{k-1} > 10 \cdot 9^k, \text{ или } \left(\frac{10}{9}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{9}\right)^k > 100.$$

Пользуясь **неравенством Бернулли**  $(1+x)^n \geq 1+nx$  при  $x \geq -1$  и любом натуральном  $n$  (это неравенство нетрудно доказать индукцией по  $n$ ), получаем, что при  $k > k_0 = 900$  неравенство  $\left(1 + \frac{1}{9}\right)^k > 100$  верно. Лемма доказана.

Перейдем к решению задачи. Если на экране возникло число, у которого в десятичной записи есть ноль, то с этого момента число не будет изменяться. Предположим противное – пусть в десятичной записи чисел  $a_1, a_2, \dots$ , последовательно появляющихся на экране, нет нулей. Тогда последовательность  $a_1, a_2, \dots$  строго возрастает. Зафиксируем некоторое натуральное  $k > k_0$  такое, что  $10^k > a_1$ , и найдем в последовательности  $a_1, a_2, \dots$  последнее число  $a_m$ , которое меньше  $10^k$ , т.е.  $a_m < 10^k \leq a_{m+1}$ . Согласно лемме, произведение цифр числа  $a_m$  меньше  $\frac{a_m}{10} < 10^{k-1}$ , поэтому

$$a_{m+1} < a_m + 10^{k-1} < 10^k + 10^{k-1}.$$

Неравенства

$$10^k \leq a_{m+1} < 10^k + 10^{k-1}$$

показывают, что  $a_{m+1}$  – это  $(k+1)$ -значное число, причем его первая цифра единица, а вторая ноль. Противоречие.

А.Белов

**М1983.** Сколько существует разных способов разбить число 2006 на натуральные слагаемые, которые приблизительно равны? Слагаемых может быть одно или несколько. Числа называются приблизительно равными, если их разность не больше 1. Способы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

**Ответ:** 2006.

Докажем, что для каждого целого  $k$  от 1 до 2006 число 2006 можно разбить ровно на  $k$  приблизительно равных слагаемых, причем единственным способом. Отсюда будет следовать решение.

Заметим, что в каждом разбиении натурального числа на  $k$  приблизительно равных слагаемых найдется не более двух разных слагаемых, т.е. несколько ( $x > 0$  штук) слагаемых равны  $m$ , а остальные ( $y \geq 0$  штук) равны  $m+1$ . Имеем:  $x+y=k, 2006 = m \cdot x + (m+1) \cdot y = m \cdot k + y$ .

Так как  $0 \leq y < k$ , то  $y$  и  $m$  определяются по  $k$  однозначно – это, соответственно, остаток и неполное частное при делении 2006 на  $k$ ;  $x$  также определяется однозначно:  $x = k - y$ . Отсюда вытекает, что при фиксированном  $k$  имеется не более одного требуемого разбиения.

С другой стороны, для каждого  $k$  от 1 до 2006 разбиение возможно: разделив 2006 на  $k$  с остатком ( $2006 = k \cdot m + y$ ,  $0 \leq y < k$ ), получаем представление числа 2006 в виде суммы  $x = k - y$  слагаемых, равных  $m$ , и  $y$  слагаемых, равных  $m + 1$ .

С.Дориченко, П.Кожевников

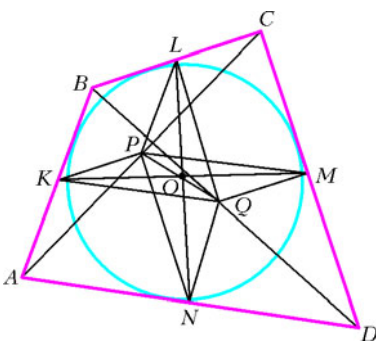
**M1984.** На плоскости отмечены 1000 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что найдется не более 1000000 равнобедренных треугольников с вершинами в этих точках.

Рассмотрим один из  $N = \frac{1000 \cdot 999}{2}$  отрезков, соединяющих пару отмеченных точек. Этот отрезок является основанием для двух или менее равнобедренных треугольников с вершинами в отмеченных точках, так как иначе на серединном перпендикуляре к этому отрезку находятся хотя бы 3 отмеченные точки, что невозможно по условию. Таким образом, количество равнобедренных треугольников с вершинами в отмеченных точках не превосходит  $2N < 1000000$ .

С.Берлов, И.Богданов

**M1985.** Четырехугольник  $ABCD$ , у которого нет параллельных сторон, описан около окружности с центром  $O$ . Середины сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  обозначены  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  соответственно. Докажите, что если точки  $O$ ,  $K$ ,  $M$  лежат на одной прямой, то точки  $O$ ,  $L$ ,  $N$  также лежат на одной прямой.

Известно (но не просто доказывается – см., например, задачу M448 «Задачника «Кванта»»), что для описанного четырехугольника прямая, проходящая через



середины его диагоналей (называемая прямой Гаусса четырехугольника), проходит через центр вписанной окружности. Пусть  $P$  и  $Q$  – середины диагоналей  $AC$  и  $BD$  четырехугольника  $ABCD$  (см. рисунок). Тогда  $PQ$  проходит через  $O$ . Заметим, что  $KQ$  и  $PM$  – средние линии

треугольников  $ABD$  и  $ACD$ ,  $KQ \parallel AD \parallel PM$ . Аналогично,  $KP \parallel BC \parallel QM$ . Поскольку  $AD$  и  $BC$  непараллельны, то  $KQMP$  – параллелограмм. Так как  $O$  лежит на  $PQ$  и, по условию задачи, на  $KM$ , то  $O$  – точка пересечения диагоналей параллелограмма  $KQMP$ , т.е. середина отрезка  $PQ$ .

Аналогично предыдущему,  $LPNQ$  – параллелограмм, поэтому его диагональ  $LN$  проходит через середину  $O$  другой диагонали  $PQ$ , что и требовалось доказать.

Укажем еще несколько эквивалентных условий, задающих класс описанных четырехугольников  $ABCD$  без параллельных сторон, о котором идет речь в задаче.

Условие 0:  $KM$  проходит через точку  $O$ .

Условие 1: точка  $O$  является центром четырех равных масс, размещенных в вершинах  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ .

Условие 2: выполняется равенство  $OA \cdot OC = OB \cdot OD$ .

Для формулировки следующих условий введем дополнительные обозначения: пусть  $K'$  и  $M'$  – точки касания окружности со сторонами  $AB$  и  $CD$ ,  $K''$  и  $M''$  – точки, симметричные точкам  $K'$  и  $M'$  относительно  $K$  и  $M$  соответственно.

Условие 3:  $KM \parallel K'M'$ .

Условие 4: прямые  $K''M''$ ,  $BC$ ,  $AD$  пересекаются в одной точке.

Условие 5: центр тяжести вершин четырехугольника, центр тяжести его периметра и центр тяжести сплошной четырехугольника лежат на одной прямой.

Эквивалентность условий 0 и 1 является фактически переформулировкой данной задачи. Об условии 2 см. задачу 7 для 11 класса заключительного этапа XXXI Всероссийской олимпиады школьников («Квант» №5 за 2005 г.). Об условиях 3 и 4 см. задачу 7 для 11 класса заключительного этапа XXVI Всероссийской олимпиады школьников («Квант» №5 за 2000 г.).

А.Заславский, П.Кожевников

**M1986.** Докажите, что для  $2n$  действительных чисел  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$  выполняется неравенство

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n + y_1 + y_2 + \dots + y_n)^2 \geq 4n(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n).$$

Рассмотрим  $n$  квадратных трехчленов  $P_i(t) = t^2 - (x_i + y_i)t + x_iy_i = (t - x_i)(t - y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Если  $t \in [x_i; y_i]$ , то  $P_i(t) \leq 0$ , поэтому в точке  $t_0 = \frac{x_n + y_1}{2}$  (находящейся на отрезке  $[x_n; y_1]$ ) каждый из трехчленов принимает неположительное значение. Следовательно, квадратичная функция

$$F(t) = P_1(t) + P_2(t) + \dots + P_n(t) = nt^2 - (x_1 + x_2 + \dots + x_n + y_1 + y_2 + \dots + y_n)t + (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)$$

в точке  $t_0$  также принимает неположительное значение, т.е. график функции  $F(t)$  пересекает ось  $Ox$  (или касается ее). Значит, трехчлен  $F(t)$  имеет вещественный корень, и его дискриминант  $(x_1 + x_2 + \dots + x_n + y_1 + y_2 + \dots + y_n)^2 - 4n(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)$  неотрицателен.

Получено неравенство, которое и нужно было доказать.

П.Самовол, М.Аппельбаум

**M1987.** Даны икосаэдр и додекаэдр с равными расстояниями от центра до ребра. У какого из многогранников больше объем?

**Ответ:** у икосаэдра.

Рассмотрим додекаэдр  $D$  с центром  $O$ , расстоянием  $d$  от центра до ребра и расстоянием  $h$  от центра до грани. Центры граней додекаэдра – вершины икосаэдра  $I$  с центром  $O$ . При гомотетии с центром  $O$  и коэффициентом  $\frac{d^2}{h^2}$  икосаэдр  $I$  перейдет в такой икосаэдр  $I'$ , что

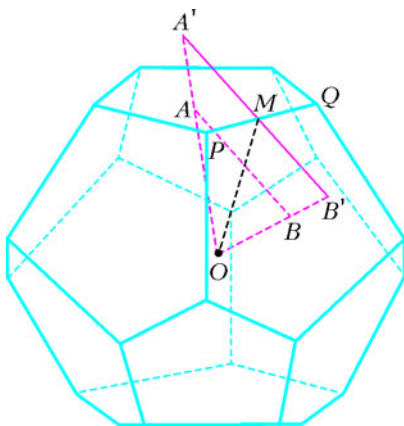


Рис. 1

середины ребер многогранников  $D$  и  $I'$  будут совпадать, причем ребра с совпадающими серединами будут перпендикулярны. В икосаэдре  $I'$  расстояние от центра до ребра будет равно  $d$ . На рисунке 1 показано, как центры  $A$  и  $B$  соседних граней перейдут при гомотетии в  $A'$  и  $B'$ . На рисунке 2

мы видим сечение  $OAMB$ , перпендикулярное ребру  $PQ$  и проходящее через его середину  $M$ . Так как  $\frac{OA'}{OA} = \frac{d^2}{h^2}$ , то треугольники  $MOA'$  и  $AOM$  подобны, и угол  $OMA'$  прямой. Аналогично, угол  $OMB'$  прямой, поэтому  $A', M, B'$  лежат на одной прямой. Удалим общую часть

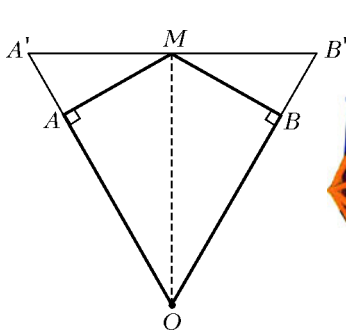


Рис. 2

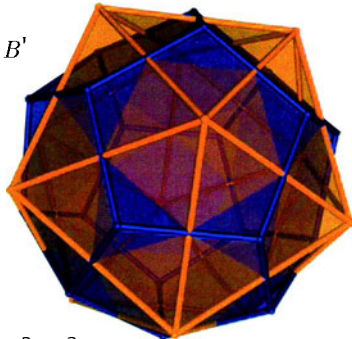


Рис. 3

многогранников  $D$  и  $I'$ . После этого от додекаэдра останется 20 синих правильных треугольных пирамид, а от икосаэдра – 12 желтых правильных пятиугольных пирамид (рис.3), причем ребра основания и двугранные углы при этих ребрах у всех пирамид одинаковы. Плоскостями, проходящими через высоту и каждое из боковых ребер, разрежем каждую пятиугольную пирамиду на пять треугольных пирамид, равных  $S_1A_1B_1H_1$ , а каждую треугольную пирамиду – на три треугольных

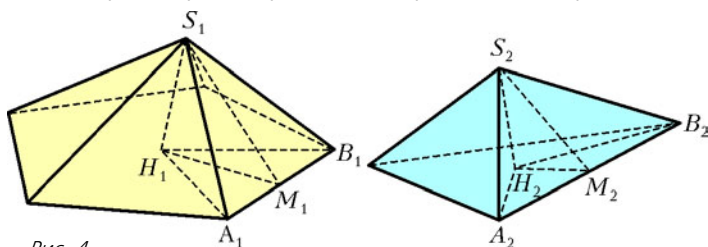


Рис. 4

пирамиды, равных  $S_2A_2B_2H_2$  (рис.4). Итого, желтые пирамиды разбиты на 60 пирамид, равных  $S_1A_1B_1H_1$ , а синие – на 60 пирамид, равных  $S_2A_2B_2H_2$ . Остается показать, что объем  $S_1A_1B_1H_1$  больше объема  $S_2A_2B_2H_2$ . Пусть  $A_1B_1 = A_2B_2 = 2a$ ,  $\angle(S_1A_1B_1, H_1A_1B_1) = \angle(S_2A_2B_2, H_2A_2B_2) = \alpha$ . Проведем высоты  $H_1M_1$  и  $H_2M_2$  в треугольниках  $H_1A_1B_1$  и  $H_2A_2B_2$ . Тогда

$$H_1M_1 = A_1M_1 \operatorname{tg} \angle H_1A_1M_1 = a \operatorname{tg} \frac{3\pi}{10} > a \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = A_2M_2 \operatorname{tg} \angle H_2A_2M_2 = H_2M_2,$$

$$S_1H_1 = H_1M_1 \operatorname{tg} \angle S_1M_1H_1 = H_1M_1 \operatorname{tg} \alpha > H_2M_2 \operatorname{tg} \alpha = H_2M_2 \operatorname{tg} \angle S_2M_2H_2 = H_2M_2.$$

Значит, в пирамиде  $S_1A_1B_1H_1$  больше и площадь основания и высота, откуда следует требуемое.

Отметим, что если у икосаэдра и додекаэдра равны радиусы описанной (или, что то же самое, вписанной) сферы, то больший объем, наоборот, имеет додекаэдр.

*А.Заславский*

**M1988.** Для каких натуральных чисел  $a$  найдутся такие целые неотрицательные числа  $k, m, n$ , что если выписать друг за другом числа  $a^n$  и  $a^m$  в десятичной записи, то получится десятичная запись числа  $a^k$ ?

**Ответ:**  $a = 5$  ( $125 = 5^05^2 = 5^3$ ) и  $a = 11$  ( $11 = 11^011^0 = 11^1$ ).

Запишем условие в виде  $a^n \cdot 10^x + a^m = a^k$ , где  $x$  – количество цифр в десятичной записи числа  $a^m$ , т.е.  $10^{x-1} \leq a^m < 10^x$ . Ясно, что  $a \geq 2$ ,  $k > m$  и  $k > n$ .

Пусть  $n > m$ . Тогда, сократив на  $a^m$ , получим  $a^{n-m} \cdot 10^x + 1 = a^{k-m}$ , или  $a^{n-m} \cdot 10^x - a^{k-m} = -1$ . Но левая часть последнего равенства делится на  $a$ , а правая – нет. Противоречие.

Если  $n = m$ , то  $10^x + 1 = a^{k-m}$ . Заметим, что  $a^{k-m} > 10^x > a^m \geq 10^{x-1}$ , откуда  $a \leq \frac{a^{k-m}}{a^m} \leq \frac{10^x + 1}{10^{x-1}} = 10 + \frac{1}{10^{x-1}} \leq 11$ . При  $a = 11$ , т.е. когда последняя

цепочка – цепочка равенств, имеем  $m = n = 0, k = 1$ . При четном  $a$  или  $a$ , кратном 5, равенство  $10^x + 1 = a^{k-m}$  невозможно. Левая часть дает остаток 2 при делении на 3, поэтому равенство невозможно, если  $a$  дает остаток 0 или 1 при делении на 3. Таким образом, ни одно из значений  $a = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$  не подходит.

Пусть  $n < m$ . Обозначив  $z = m - n > 0, t = k - m > 0$ , приходим к равенству  $a^z (a^t - 1) = 10^x = 2^x \cdot 5^x$ , где  $x > 0$ . Если  $a = 2$  и  $t = 1$ , то левая часть не делится на 5. Пусть хотя бы одно из этих равенств не выполняется. Тогда каждый из взаимно простых множителей  $a^z$  и  $a^t - 1$  больше 1, поэтому один из них является натуральной степенью двойки, а другой – натуральной степенью пятёрки.

Пусть  $a^z = 2^x$  и  $a^t - 1 = 5^x$ . Из первого равенства

вытекает, что  $a$  является степенью двойки. В равенстве  $a^t = 5^x + 1 = (4+1)^x + 1$  правая часть дает остаток 2 при делении на 4, значит, не делится на  $2^2$ . Отсюда  $a = 2$  и  $t = 1$ . Противоречие.

Пусть теперь  $a^z = 5^x$  и  $a^t - 1 = 2^x$ . Тогда  $a$  является степенью пятерки,  $a = 5^s$ . Имеем:  $5^r - 1 = 2^x$ , где  $r = ts$ . Если  $r$  четно, то левая часть делится на  $5^2 - 1 = 24$ , что невозможно. Если  $r$  нечетно, то  $5^r - 1 = (5-1)(1+5+5^2+\dots+5^{r-1})$ , где число  $1+5+5^2+\dots+5^{r-1}$  нечетно, так как является суммой нечетного количества нечетных слагаемых. Поэтому возможно только  $r = 1$ . Отсюда  $s = t = 1$ ,  $a = 5$ . Далее,  $x = 2$ , откуда  $m = 2$ ,  $z = 2$ . Из равенств  $z = m - n$  и  $t = k - m$  получаем  $n = 0$  и  $k = 3$ .

*В. Сендеров*

**М1989.** В королевстве  $N$  городов и  $r$  дорог, каждая дорога соединяет два города, и из любого города можно добраться до любого по дорогам. В городах живут гонцы. В начале каждого года один из городов отправляет во все соседние (т.е. соединенные с ним дорогами) города по гонцу (в таком городе должно быть достаточное для этого количество гонцов). Если в каждом городе гонцов недостаточно, то движения гонцов прекращаются.

а) Пусть через несколько лет движение гонцов прекратилось. Докажите, что если города, отправляющие гонцов, выбирать по-другому, то движение гонцов все равно прекратится; при этом конечное количество гонцов в каждом городе не зависит от выбора городов.

б\*) Пусть через несколько лет в каждом городе оказалось столько же гонцов, сколько было изначально. Какое наименьшее количество гонцов может быть в королевстве?

Пусть из некоторой ситуации (т.е. некоторого распределения гонцов по городам)  $X$ , последовательно отправляя гонцов из городов  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , мы получим ситуацию  $Y$ . Условимся обозначать это следующим образом:  $Y = A_m A_{m-1} \dots A_1(X)$ .

а) Обозначим через  $X$  начальную конфигурацию гонцов. Назовем ситуацию *финальной*, если в ней нельзя отправить гонцов ни из одного города.

Пусть из  $X$  можно за  $n$  лет достичь финальной ситуации  $Y$  ( $Y = A_n A_{n-1} \dots A_1(X)$ ). Мы можем считать, что число  $n$  минимальное возможное, т.е. за меньшее количество лет никакой финальной ситуации достичь невозможно. Предположим, что за  $n$  лет из  $X$  можно было также получить ситуацию  $Z$ :  $Z = B_n B_{n-1} \dots B_1(X)$ . Если мы покажем, что  $Z = Y$ , то задача будет решена. Действительно, в ситуации  $X$  в любом случае произойдет хотя бы  $n$  отправок гонцов; мы же докажем, что после этих  $n$  отправок обязательно получится одна и та же финальная ситуация  $Y$ .

Предположим, что в последовательности городов  $A_1, \dots, A_n$  нет города  $B_1$ . Тогда в ситуации  $Y$  в городе  $B_1$  не меньше гонцов, чем в ситуации  $X$ , и из этого города можно отправить гонцов. Это противоречит

финальности  $Y$ . Поэтому  $A_k = B_1$  для некоторого  $k$ , причем мы можем считать, что число  $k$  выбрано минимальным.

Рассмотрим ситуацию  $X$  и отправим в ней гонцов из  $B_1$ , получив ситуацию  $X_1 = B_1(X)$ . Поскольку количество гонцов в городах  $A_1, \dots, A_{k-1}$  не уменьшилось, то затем можно отправить гонцов последовательно из этих городов, получив ситуацию  $A_{k-1} \dots A_1 B_1(X)$ . Заметим, что количество гонцов в городе зависит только от того, сколько раз из него отправляли гонцов, но не от порядка отправки. Поэтому  $A_{k-1} \dots A_1 B_1(X) = B_1 A_{k-1} \dots A_1(X) = A_k A_{k-1} \dots A_1(X)$ .

Итак, мы получили, что  $Y = A_n \dots A_{k+1} A_{k-1} \dots A_1 B_1(X)$ . В таком случае  $Y = A_n \dots A_{k+1} A_{k-1} \dots A_1(X_1)$ ,  $Z = B_n \dots B_2(X_1)$ . Аналогично доказываем, что среди городов, участвующих в получении  $Y$  из  $X_1$ , есть  $B_2$ , и поэтому  $Y = A'_n \dots A'_1(X_2)$ ,  $Z = B_n \dots B_3(X_2)$ , где  $X_2 = B_2(X_1)$ . Будем продолжать такой процесс перестановки городов дальше. После  $n$ -й перестановки мы получим, что  $Y = X_n = B_n \dots B_1(X) = Z$ , что и требовалось.

б) **Ответ:**  $r$  гонцов.

Предположим, что  $X = A_n A_{n-1} \dots A_1(X)$ , т.е. ситуация повторилась.

Заметим для начала, что из каждого города был отправлен хотя бы один гонец. Действительно, если из города  $A$  гонцов не отправлялось, то количество гонцов в нем не уменьшалось. Значит, оно и не увеличивалось, и гонцы не отправлялись также из всех соседей города  $A$ . Аналогично, соседи соседей  $A$  также не отправляли гонцов и т.д. Поскольку из города  $A$  можно добраться до любого, то мы в результате докажем, что никакой город гонцов не отправлял. Противоречие.

Будем последовательно рассматривать ситуации  $X, A_1(X), \dots, A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1(X)$  и сопоставлять некоторым гонцам некоторые дороги. При этом будут выполнены следующие условия:

- 1) если гонцу в некоторый момент сопоставили дорогу  $AB$  (т.е. дорогу между городами  $A$  и  $B$ ), то *после* этого он может двигаться только по дороге  $AB$ ;
- 2) никаким двум гонцам не будет сопоставлена одна и та же дорога.

В начальной ситуации  $X$  сопоставим каждому выезжающему из  $A_1$  гонцу ту дорогу, по которой он выезжает. Тогда оба условия, очевидно, выполнены.

Рассмотрим ситуацию  $A_{k-1} A_{k-2} \dots A_1(X)$  и отправление гонцов из  $A_k$ . Если в  $A_k$  находятся гонцы, уже сопоставленные каким-то дорогам, то по условию 1 эти дороги выходят из  $A_k$ . Пустим каждого такого гонца по сопоставленной ему дороге (по условию 2 это возможно). Ясно, что то, какой именно гонец пойдет по какой дороге, не повлияет на ситуацию. Далее, пустим по всем остальным дорогам из  $A_k$  некоторых из оставшихся гонцов (тех, которым еще не сопоставлены дороги). При этом, если какой-то гонец едет по еще «не сопоставленной никому» дороге, то сопоставим ему эту дорогу. Ясно, что после этого условия 1, 2 остаются выполненными. Кроме того, если до этого действия

какой-то дороге, ведущей из  $A_k$ , не был сопоставлен никакой гонец, то после него такой гонец появится. Поэтому каждой дороге, выходящей из  $A_k$ , будет сопоставлен гонец.

В конце концов после рассмотрения ситуации  $A_{n-1}A_{n-2} \dots A_1(X)$  каждой дороге будет сопоставлен гонец (так как из каждого города гонцы отправлялись), значит, гонцов не меньше, чем дорог.

Осталось показать, что  $r$  гонцов достаточно. Обозначим города  $A_1, A_2, \dots, A_N$ . Расставим вначале на каждой дороге по гонцу, а затем переместим гонца, находящегося на дороге  $A_iA_j$  ( $i < j$ ), в город  $A_i$ . В результате в каждом городе  $A_i$  будет столько гонцов, сколько из него ведет дорог в города с номерами, большими  $i$ .

Из  $A_1$  можно отправить гонцов – в нем столько же гонцов, сколько из него выходит дорог. Отправим гонцов и перенумеруем города по циклу:  $A_1$  станет  $A_N$ , а  $A_i$  станет  $A_{i-1}$  при  $i \geq 2$ . Тогда по-прежнему из каждого города будет идти столько дорог в города с большими номерами, сколько в нем гонцов. Продолжив этот процесс, после  $N$ -й перенумерации мы получим, что в каждом городе будет столько же гонцов, сколько было вначале, что и требовалось.

И. Богданов, П. Кожевников

**M1990\***. Дан треугольник  $ABC$ . На продолжении стороны  $BC$  за точку  $C$  выбирается точка  $X$ . Окружности, вписанные в треугольники  $ABX$  и  $ACX$ , пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что все прямые  $PQ$  проходят через некоторую точку, не зависящую от положения точки  $X$ .

Прежде докажем вспомогательное **утверждение** (это утверждение содержится, например, в задачнике Шарыгина «Геометрия 9–11», задача 255):

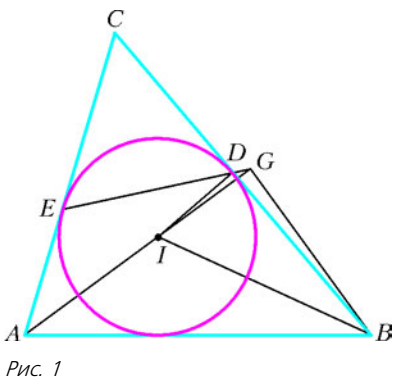


Рис. 1

пусть в треугольнике  $ABC$  вписанная окружность имеет центр  $I$  и касается сторон  $BC, CA$  в точках  $D, E$  соответственно. Тогда прямые  $AI$  и  $DE$  пересекаются в такой точке  $G$ , что  $\angle AGB = 90^\circ$  (рис. 1).

**Доказательство.** Из равнобедренного треугольника  $CDE$  находим  $\angle CDE = \angle CED = 90^\circ - \frac{\angle C}{2}$ , поэтому  $\angle AGE = \angle CED - \angle GAE = 90^\circ - \frac{\angle C}{2} - \frac{\angle A}{2} = \frac{\angle B}{2} = \angle IBD$ .

Отсюда следует, что точки  $B, D, I, G$  лежат на одной окружности. Поскольку  $\angle IDB = 90^\circ$ , это окружность с диаметром  $BI$ , следовательно,  $\angle IGB = 90^\circ$ .

Утверждение доказано.

Перейдем к решению задачи. Пусть окружности, вписанные в треугольники  $ABX$  и  $ACX$ , касаются прямых

$AX$  и  $BC$  в точках  $K, L, M, N$  (рис. 2).

Пусть биссектриса угла  $ABC$  пересекает прямую  $KM$  в точке  $U$ . Согласно доказанному утверждению,  $U$  является проекцией точки  $A$  на эту биссектрису, и поэтому  $U$  не зависит от выбора точки  $X$ . Аналогично, прямая  $LN$

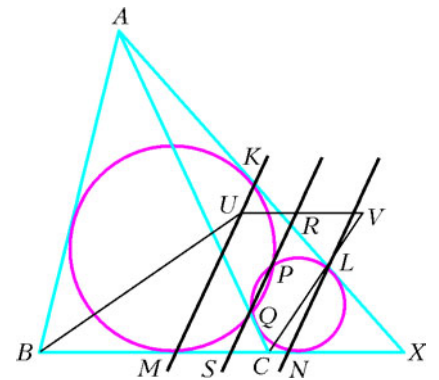


Рис. 2

проходит через фиксированную точку  $V$  – проекцию точки  $A$  на биссектрису угла  $ACX$ .

Прямые  $KM$  и  $LN$  параллельны, так как они перпендикулярны биссектрисе угла  $AXB$ . Пусть прямая  $PQ$  пересекает прямые  $AX$  и  $BC$  в точках  $R$  и  $S$  соответственно. По теореме о касательной и секущей,  $RK^2 = RP \cdot RQ = RL^2$ , т.е.  $RK = RL$ . Аналогично,  $SM = SN$ . Таким образом, прямая  $PQ$  является средней линией трапеции  $KLNM$ . Значит, прямая  $PQ$  делит пополам любой отрезок, соединяющий точки на прямых  $KM$  и  $LN$ , в частности, проходит через фиксированную точку – середину отрезка  $UV$ .

Л. Емельянов

**Ф1998.** Автомобиль едет по прямой дороге. За первый час пути его средняя скорость составила 50 км/ч, еще час он ехал со средней скоростью 70 км/ч, затем ровно час простоял в пробке. Остаток пути он ехал с постоянной скоростью 40 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем пути.

За первые три часа автомобиль проехал 120 км, значит, его средняя скорость была 40 км/ч. И остальную часть пути он проехал со скоростью 40 км/ч. Ясно, что средняя скорость на всем пути также равна 40 км/ч. Такое простое решение получилось только потому, что числа в условии были специально подобраны. Если бы автомобиль проехал, например, 60 км за первый час, то для получения ответа данных оказалось бы просто недостаточно.

О. Простов

**Ф1999.** Спутник вращается вокруг Земли по круговой орбите, все время находясь над одной и той же точкой экватора («суточный» спутник). По совершенно непонятной причине спутник вдруг остановился (его скорость относительно центра Земли стала нулевой). Оцените время падения спутника на Землю с точностью не хуже 1%.

Вначале разберемся с радиусом орбиты «суточного» спутника. Пусть радиус Земли  $R$ , а радиус орбиты спутника  $nR$ . Тогда ускорение спутника на орбите в  $n^2$  раз меньше, чем у поверхности Земли, и для скорости спутника можно записать

$$\frac{v^2}{nR} = \frac{g}{n^2}.$$

Время полного оборота спутника составляет

$$T = \frac{2\pi nR}{v},$$

откуда

$$n^{3/2} = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{R}}, \quad n = 6,63.$$

Получается очень большое расстояние до центра Земли – радиус орбиты больше 42 тысяч километров. Если бы спутник начал с этой высоты падать на Землю без начальной скорости и если бы размер Земли был очень малым (при той же массе Земли, например, несколько метров), то движение это напоминало бы движение по ОЧЕНЬ узкому эллипсу с длиной большой оси  $nR$ . Время такого движения равно половине периода обращения по круговой орбите с той же большой осью – радиус такой орбиты  $0,5nR$ . При уменьшении радиуса орбиты вдвое время оборота уменьшается в  $2^{3/2} \approx 2,828$  раз. Тогда время полуоборота составляет

$$\frac{24 \cdot 3600 \text{ с}}{2 \cdot 2,828} \approx 15300 \text{ с}.$$

Но радиус Земли не так мал, мы посчитали время падения «с избытком» – долетев до поверхности, спутник дальше уже не летит. Скорость при подлете к поверхности Земли приближенно равна второй космической скорости, т.е. примерно 11 км/с. С этой скоростью расстояние 6400 км (до центра Земли) еще лететь примерно 600 с, можно просто вычесть их из найденного результата и получить ответ:  $\approx 14700$  секунд.

Однако скорость спутника должна была бы еще возрасти при приближении к центру «маленькой Земли», время полета при этом получается меньше 600 с. Это время  $\tau$  можно посчитать поточнее. Пусть до центра Земли осталось лететь  $x$  метров, тогда скорость можно найти из соотношения

$$\frac{GMm}{x} - \frac{GMm}{nR} = \frac{mv^2(x)}{2}.$$

Если пренебречь в левой части уравнения вторым слагаемым (погрешность невелика, а интеграл получится совсем простым!), то

$$v(x) = \sqrt{\frac{2GM}{x}} = v_2 \sqrt{\frac{R}{x}}.$$

Тогда

$$\tau = \int \frac{dx}{v(x)} = \frac{2R}{3v_2} \approx 400 \text{ с}.$$

Окончательно, время падения составляет приблизительно 15000 с.

*Р.Александров*

**Ф2000.** В горизонтальном цилиндрическом сосуде находится порция гелия. Сосуд закрыт массивным поршнем, который может двигаться по горизонтали без трения. С газом в сосуде проводят два опыта: наружное давление увеличивают в три раза – один раз очень быстро, другой раз очень медленно. В каком

из опытов конечный объем газа окажется меньше? Во сколько раз?

При очень медленном повышении давления получится обычное адиабатическое сжатие газа. Для одноатомного газа связь давления и объема при адиабатическом процессе такова:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{3/5} = 3^{3/5} \approx 1,93.$$

Если давление повышается скачкообразно, то поршень не остановится, когда давления внутри и снаружи в первый раз сравняются, – в этот момент он обладает значительной кинетической энергией и будет довольно долго колебаться, понемногу уменьшая амплитуду. После окончательной остановки его кинетическая энергия «достанется» газу. Считая, что эта энергия перейдет газу, находящемуся внутри сосуда (конечно, это неверно, но мы получим «крайнюю» оценку), можно записать закон сохранения энергии с учетом работы внешних сил. Давление снаружи можно считать постоянным и равным  $3p$  (где  $p$  – первоначальное давление), объем меняется от  $V_1$  до  $V_2$ , тогда работа внешних сил равна

$$A_{\text{вн}} = 3p(V_1 - V_2).$$

Внутренняя энергия газа увеличилась на эту величину, поэтому

$$\frac{3}{2} \nu RT_2 - \frac{3}{2} \nu RT_1 = 3p(V_1 - V_2).$$

Запишем теперь уравнения для начального и конечного состояний газа в сосуде:

$$pV_1 = \nu RT_1 \quad \text{и} \quad 3pV_2 = \nu RT_2.$$

Окончательно получим

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{3} \approx 1,67.$$

Если учесть, что нагревается и «внешний» газ, то повышение температуры окажется не таким большим, а следовательно, и отношение объемов будет ближе к ранее полученному значению. Аккуратный расчет довольно сложен – он должен учитывать и неодинаковость концентраций газа по обе стороны поршня, и различие скоростей движения частиц из-за разницы температур снаружи и внутри.

*А.Газов*

**Ф2001.** Очень тонкий непроводящий стержень длиной  $L$  равномерно заряжен по длине полным зарядом  $Q$ . Маленькое проводящее кольцо радиусом  $R$  сделано из очень тонкой проволоки, его центр совпадает с одним из концов стержня, а плоскость кольца перпендикулярна стержню. Заряд кольца  $q$ . С какой силой стержень действует на кольцо?

Посчитаем силу, действующую на стержень со стороны кольца, – она по величине такая же, как и искомая сила. Проблема в том, что в разных местах стержня напряженность поля кольца различна, можно посчи-



тать интеграл, но он получается довольно громоздким. Попробуем по-другому.

Пусть в некотором месте стержня напряженность поля от зарядов кольца равна  $E$ , тогда на очень маленький кусочек стержня длиной  $\Delta x$  действует сила

$$\Delta F = E\Delta Q = \frac{EQ\Delta x}{L}.$$

Теперь нужно просуммировать силы, действующие на все кусочки стержня. Но такая же сумма (только без множителя  $Q/L$ ) получается при вычислении разности потенциалов поля зарядов кольца между концами стержня, а ее можно найти совсем просто:

$$\Delta\varphi = \frac{kq}{R} - \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + L^2}}.$$

Осталось умножить это выражение на  $Q/L$ . Итак,

$$F = \frac{kQq}{L} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + L^2}} \right).$$

З.Рафаилов

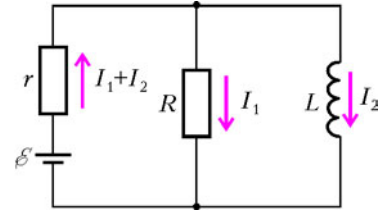
**Ф2002.** К батарее с ЭДС  $\varepsilon$  и внутренним сопротивлением  $r$  подключают параллельно соединенные резистор сопротивлением  $R$  и катушку индуктивностью  $L$ . Какое количество теплоты выделится в резисторе за большое время?

Для резистора и катушки можно записать (см. рисунок):

$$RI_1 = +LI_2'.$$

Для контура, содержащего батарейку и резистор, запишем:

$$r(I_1 + I_2) + RI_1 = \varepsilon.$$



Возьмем производную по времени от левой и правой частей последнего уравнения:

$$(r + R)I_1' + rI_2' = 0, \text{ или } I_2' = -\frac{r + R}{r}I_1'.$$

За малый интервал времени  $\Delta t$  в резисторе выделится количество теплоты

$$\begin{aligned} \Delta W &= I_1^2 R \Delta t = I_1 R \cdot I_1 \Delta t = \\ &= +LI_2' \cdot I_1 \Delta t = -\frac{L(r + R)}{r} I_1' \cdot I_1 \Delta t = -\frac{L(r + R)}{r} \cdot \Delta \left( \frac{I_1^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Ток через резистор меняется от начального значения  $\varepsilon/(r + R)$  до нуля, поэтому суммарное количество теплоты будет равно

$$W = -\frac{L(r + R)}{r} \left( 0 - \frac{\varepsilon^2}{2(r + R)^2} \right) = \frac{L\varepsilon^2}{2r(r + R)}.$$

А.Теплов

## Деннис Габор

(Начало см. на с. 15)

достаточно использовать любой источник света. При наблюдении голографического изображения нужно смотреть на пленку – само изображение «появляется» в пространстве между пленкой и наблюдателем.

В настоящее время не существует технологий, допускающих фокусировку изображения в пустом пространстве. Для создания изображения нужен дым, туман, пленка или же вогнутое зеркало. Голографические изображения невозможно проецировать на удаленные объекты. Голограмма создает трехмерное изображение в пространстве только при просмотре через пленку или при отражении света от нее.

Габор не мог получить качественных голограмм по той причине, что имевшиеся в его распоряжении ртутные дуговые лампы не давали когерентного (мономатического, или одноцветного) света. Сам термин «голограмма», предложенный Габором, имеет греческое происхождение и означает «всеобщая передача».

Первые голограммы с использованием лазера были получены Э.Лейтом и Ю.Упатниексом в Мичиганском университете в 1962 году. Для просмотра полу-

ченных ими голограмм тоже использовался лазер. В том же 1962 году Ю.Н.Денисюк в Государственном оптическом институте в Ленинграде, впервые объединив голографию Габора с принципами цветной фотографии Липмана, получил голограммы, просматриваемые при обычном освещении. С изобретением импульсных лазеров, которые дают мощный поток света в течение нескольких наносекунд, открылась возможность буквально останавливать мгновение и получать голограммы быстротекущих процессов (например, полет пули).

Голограммы можно получать с помощью не только лазеров, работающих в диапазоне видимого света, но и звуковых волн или других участков электромагнитного спектра. Так, голограммы, сделанные с использованием рентгеновских или ультрафиолетовых лучей, позволяют получать трехмерные изображения объектов с размерами, меньшими длины видимого света. Уникальная способность голограмм записывать и реконструировать объекты одновременно с помощью звуковых и световых волн открывает простор для многочисленных практических применений.

# Задачи

1. В красный круг вписан треугольник, покрашенный в синий цвет. Когда круг разрезали на две части и сложили их вместе, то снова получился красный круг с синим треугольником. Обязательно ли этот треугольник вписанный?

*М.Ахмеджанова*



2. Фрекен Бок на клетчатой бумаге с размерами клетки  $1 \times 1$  по линиям сетки рисует прямоугольник, содержащий не менее 3 клеток. Малыш и Карлсон по очереди заполняют клетки нарисованного прямо-



угольника крестиками и ноликами, причем начинает Малыш и ставит крестики. Карлсон ставит нолики. Выигрывает тот, кто поставит 3 своих знака подряд на одной горизонтали или на одной вертикали. Прямоугольник какого наименьшего периметра должна начертить Фрекен Бок, чтобы Малыш мог наверняка выиграть при правильной игре?

*В. Сендеров*

3. Мартышка, Попугай, Удав и Слононок устроили концерт по случаю приезда бабушки Удава. На концерте было исполнено семь номеров, причем каждый номер представлял собой либо пение вдвоем, либо танец втроем. Никакие два номера не исполнялись одним и тем же составом. Удав участвовал в исполнении одной песни и двух танцев. Мартышка исполнила больше номеров, чем Слононок. Сколько номеров исполнил Слононок?

*Е.Барабанов*



4. Аня написала на бумаге некоторое утверждение (верное или неверное — никто не знает), а Боря на другом листе бумаги написал свое утверждение (тоже



неизвестно, верное оно или неверное). Витя после этого написал: «Из Бороного утверждения следует Анино», а Гена написал: «Из Аниного утверждения следует Витино». Докажите, что из Витиноного утверждения обязательно следует Генино, но из Гениного утверждения не обязательно следует Витино.

*Г.Гальперин*

5. Гирьки массой 1 г, 2 г, ..., 200 г по 100 штук как попало разложили на две чашки весов. Разрешено с каждой чашки 50 гирек переместить на другую. Можно ли за счет этого обмена получить равновесие?

*В.Произволов*



Иллюстрации Д.Гришуковой

# Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

**1.** В ряд выложены 28 одинаковых по внешнему виду монет. Известно, что среди них есть 2 фальшивые монеты — более тяжелые по весу, чем настоящие. Можно ли за 3 взвешивания на чашечных весах без гирь найти все фальшивые монеты, если известно, что они лежат рядом друг с другом?

*И.Николаева*

**2.** Докажите, что число  $\underbrace{10101010\dots10101}_{101 \text{ единица}}$  является составным в системе счисления с произвольным натуральным основанием, большим 1.

*А.Жуков, А.Зайчик*

**3.** Квадратное поле 2005 вертикальными и 2005 горизонтальными линиями разделили на прямоугольные участки, на каждом из которых поселился рыцарь или лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы

всегда лгут. Каждый владелец заявил, что площадь его участка больше площадей соседних по стороне участков. Какое наибольшее количество владельцев могли быть рыцарями?

*В. Брагин (ученик 8 кл.)*

**4.** На сторонах треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1, B_1, C_1$  так, что отрезки  $AA_1, BB_1, CC_1$  делят соответствующие стороны треугольника  $A_1B_1C_1$  пополам. Верно ли, что точки  $A_1, B_1, C_1$  непременно являются серединами сторон треугольника  $ABC$ ?

*В.Произволов*

**5.** Найдите наибольшее натуральное число  $n$ , которое делится на все натуральные числа, не превышающие  $\sqrt{n}$ .

*И.Акулич*

## Легенда о задаче Гаусса

**С. ДВОРЯНИНОВ**

ИЗВЕСТНА ЛЕГЕНДА О МАЛЕНЬКОМ НЕМЕЦКОМ МАЛЬЧИКЕ Гауссе, который впоследствии стал великим Карлом Фридрихом Гауссом и который еще при жизни носил полуофициальный титул «король математиков».

Случилось это в ту пору, когда маленький Гаусс еще посещал начальную школу. Однажды учитель задал своим ученикам нелегкую задачу: сложить все натуральные числа от 1 до 20. Он надеялся освободить себе немного времени, пока ученики будут заняты нахождением суммы, и потому был несказанно удивлен, когда маленький Гаусс шагнул вперед, в то время как остальные его товарищи еще только собирались приступить к работе, положил грифельную доску на учительскую кафедру и сказал: «Готово». Учитель даже не взглянул на доску юного Гаусса, так как был совершенно убежден, что ответ неверен. Он

даже намеревался наказать мальчика за нескромность.

Дождавшись, пока остальные ученики завершили работу и сложили свои доски на доску маленького Гаусса, учитель вытащил ее (ведь она лежала в самом низу) и взглянул на нее. Каково же было его удивление, когда он обнаружил на доске одно-единственное число и притом верное. На черной грифельной доске красовалось аккуратно написанное мелом число 210.

Как маленький Гаусс нашел его? Мы, конечно, точно не знаем, как он это сделал, и никогда не сможем этого узнать. Однако мы можем предположить следующее.

Гаусс, должно быть, «видел» задачу не так, как другие его сверстники, а более глубоко. Все его одноклассники намеревались складывать данные числа последовательно, прибавляя к уже найденной сумме следующее слагаемое. Гаусс же обратил свое внима-



Иллюстрация В.Иванюка

ние на два крайних числа (самое первое и самое последнее) — на числа 1 и 20. Затем — на второе и предпоследнее, т.е. на числа 2 и 19. И вообще, на числа, равноудаленные от концов этой суммы из двадцати слагаемых. Эти пары дают в сумме одно и то же число:

$$1 + 20 = 2 + 19 = 3 + 18 = \dots = 9 + 12 = 10 + 11 = 21.$$

Пар таких всего десять, поэтому сумма всех этих чисел равна  $21 \cdot 10 = 210$ .

Когда Гаусс рассказал свое решение у классной доски, учитель был краток: «Молодец». Теперь он уже не помнил свою минутную досаду и был рад тому, что его ученик «увидел истину ясно и четко», как сказал бы Декарт, и нашел легкий, не требующий напряжения, удобный для применения способ вычисления искомой суммы. Такими учениками, как Гаусс, учитель может гордиться!

**Упражнение 1.** Найдите по методу Гаусса сумму  $1 + 2 + 3 + \dots + 100$ .

В наши дни мало кто знает, что произошло в этой немецкой школе дальше. А дальше учитель задал своим ученикам домашнее задание: *расставить знаки в выражении  $+1 \pm 2 \pm 3 \pm \dots \pm 99 \pm 100$  так, чтобы получить ноль.*

Шумной гурьбой школяры высыпали на небольшую площадь перед гимназией. Ребята наперебой обращались к маленькому Гауссу: как быть с новой задачей?

— Пока что о способе решения сказать ничего нельзя.

— Ну, хорошо, оставим учебу и давайте-ка лучше совершим восхождение на Шпицберг, — предложил

кто-то из ребят. — С вершины этой горы открывается чудесный вид! Карл, ты идешь с нами?

Тот не ответил. Неспешно двигаясь по улицам тихого городка к дому своих родителей, Гаусс думал о новой задаче. Конечно, интересно было бы вместе с друзьями еще раз подняться на гору. С высоты видно далеко-далеко, приятно ощущать победу над этой высотой. Но сейчас Гаусс размышлял о задаче. Ничего другого для него в эти минуты не существовало. Для Карла решение каждой новой трудной задачи было своего рода победой, своеобразной высотой. И сейчас эту новую высоту он намеревался покорить. Как это сделать?

Если вначале расставить знаки так:  $1 + 2 - 3$ , то получится ноль. Но как выбирать знаки потом, совершенно неясно. Гаусс не замечал проезжавших мимо карет, не слышал ни боя часов на городской ратуше, ни шума воды, падавшей на лопасти водяной мельницы. Плюс, минус, минус, плюс, ... — знаки перепрыгивали от одного числа к другому, как кузнечики в придорожной траве.

Стоп! А если поступить так:  $1 - 2 - 3 + 4$ ? Ноль получается, хорошо. А потом? Что потом? Гаусс представил, как все сто его слагаемых, словно живые, начали группироваться по четыре:

$$(1 - 2 - 3 + 4) + (5 - 6 - 7 + 8) + \dots + (9 - 10 - 11 + 12) + \dots$$

Рассмотрим четыре последовательных натуральных числа  $k, k + 1, k + 2, k + 3$ . Возьмем последовательность знаков  $+ - - +$ . Мальчуган от радости даже

тихо попытался пропеть на мотив знакомой песенки, что пели его друзья:

*Веселый плюс и радостный минус,  
Долгожданный минус и нужный плюс!..*

Ключом к решению новой задачи является формула

$$k - (k + 1) - (k + 2) + (k + 3) = 0.$$

Гаусс снова уверенно повторил нараспев:

*Вот такой плюс и вот такой минус,  
Вот такой минус, вот такой плюс!..*

Задача была решена:

$$\begin{aligned} &(1 - 2 - 3 + 4) + \\ &+ (5 - 6 - 7 + 8) + (9 - 10 - 11 + 12) + \dots \\ &\dots + (93 - 94 - 95 + 96) + (97 - 98 - 99 + 100) = \\ &= 0 \times 25 = 0. \end{aligned}$$

Так, а если слагаемых не сто? А сколько? Сколько их может быть? Конечно, такая расстановка знаков позволяет в сумме получить ноль, если количество слагаемых  $n$  кратно 4, т.е.  $n = 4k$ . В этом случае получается  $k$  четверок, а каждая четверка содержит четыре последовательных натуральных числа со знаками  $+ - - +$ . И если вспомнить равенство  $+1 + 2 - 3 = 0$ , то слагаемых в сумме  $+1 \pm 2 \pm 3 \pm \dots \pm n$  может быть  $3 + 4k$ . При  $n = 3 + 4k$  расстановка знаков такова:  $(+ + -)(+ - - +)(+ - - +)(+ - - +) \dots (+ - - +)$ . В этой «песенке» из знаков первый такт неполный — содержит всего три знака и три слагаемых соответственно.

*Замечание.* При  $n = 1 + 4k$  и при  $n = 2 + 4k$  число 0 получить нельзя. Причина в следующем. Легко убедиться, что в обоих этих случаях сумма  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  является нечетным числом. При замене одного знака «+» на знак «-» новая сумма также будет числом нечетным, ибо при это исходная сумма уменьшится на четное число (продумайте, почему это так), и поэтому четное число 0 никогда не получится.

Вечером того же дня, уже лежа в кровати, маленький Гаусс снова думал о решенной задаче и о тех чувствах, которые он испытал от ее решения. Потому и нравились ему математика, что решения задач и маленькие открытия, которые он совершал при этом, доставляли ему ни с чем не сравнимую радость.

Сон не шел к юному математику. А если рассмотреть выражение  $+1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \dots \pm n^2$ , то как здесь следует расставить знаки  $\pm$ , чтобы в сумме получить ноль?

Сколько прошло времени, сколько раз пробили часы на городской ратуше — Карл не мог сказать. Он представил себе формулу  $k^2 - (k + 1)^2 = -2k - 1$ , выражающую разность двух последовательных квадратов. Ясно, что минусы здесь — в задаче о расстановке знаков — не играют существенной роли, и можно сказать, что разность есть удвоенное натуральное число плюс единица. Снова в сознании зазвучала знакомая формула:

$$+1, -1, -1, +1$$

— все эти единицы уничтожаются, и четыре последовательных числа вида  $2k + 1$  тоже дают в сумме ноль:

$$\begin{aligned} &(2k + 1) - (2(k + 1) + 1) - (2(k + 2) + 1) + \\ &+ (2(k + 3) + 1) = 0. \end{aligned}$$

Теперь понятно, как следует выбирать знаки в сумме  $1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \dots \pm n^2$ :

$$\begin{aligned} &\{(1^2 - 2^2) - (3^2 - 4^2) - (5^2 - 6^2) + (7^2 - 8^2)\} + \\ &+ \{(9^2 - 10^2) - (11^2 - 12^2) - (13^2 - 14^2) + (15^2 - 16^2)\} + \dots \end{aligned}$$

В этой сумме все слагаемые последовательно группируются по восемь. В итоге получится ноль, если изначально число  $n$  кратно 8, т.е.  $n = 8k$ . Следовательно, для алгебраической суммы квадратов ноль получается при таком выборе знаков:  $(+ - - + - + + -)$ . Дальше знаки периодически повторяются. Эта новая последовательность знаков получается из основной простейшей последовательности  $(+ - - +)$  заменой знака *плюс* на пару знаков  $+ -$  и заменой знака *минус* на пару знаков  $- +$ .

Азарт охватил и уже больше не покидал Гаусса. А к какой еще сумме можно применить его волшебную формулу «плюс, минус, минус, плюс»?

Перед его мысленным взором предстала такая красивая формула:

$$+1 \cdot 2 \pm 2 \cdot 3 \pm 3 \cdot 4 \pm 4 \cdot 5 \pm \dots \pm 96 \cdot 97.$$

Как в ней расставить знаки так, чтобы получить ноль? Здесь разность двух последовательных чисел равна

$$k(k + 1) - (k + 1)(k + 2) = -2(k + 1).$$

Ясно, что для таких четырех последовательных чисел основная комбинация знаков  $(+ - - +)$  вновь дает ноль:

$$\begin{aligned} &(2k + 2) - (2(k + 1) + 2) - (2(k + 2) + 2) + \\ &+ (2(k + 3) + 2) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, сумма

$$+1 \cdot 2 \pm 2 \cdot 3 \pm 3 \cdot 4 \pm 4 \cdot 5 \pm \dots \pm 96 \cdot 97$$

превращается в ноль при выборе знаков  $(+ - - + - + -)$ . Количество слагаемых здесь (а именно, 96) кратно 8.

Мы не можем абсолютно точно сказать, о каких еще суммах размышлял будущий король математиков в тот поздний вечер. Возможно, о расстановке знаков в выражении

$$+1 \cdot 3 \pm 3 \cdot 5 \pm 5 \cdot 7 \pm \dots \pm (16k - 1)(16k + 1),$$

снова приводящей к нулю (найдите эту расстановку самостоятельно, и пусть это будет **Упражнение 2**), или о другой подобной задаче. Гадать не будем. Вместо этого расскажем, в какой форме задача, которую решал Гаусс примерно 220 лет назад, существует в наши дни.

Весной 2006 года участникам олимпиады в Московском педагогическом государственном университете предлагалась такая задача: *расставить знаки в выра-*

женин

$$+1 \cdot 2 \cdot 3 \pm 2 \cdot 3 \cdot 4 \pm 3 \cdot 4 \cdot 5 \pm \dots \pm 2005 \cdot 2006 \cdot 2007$$

так, чтобы получить 0.

Здесь речь идет о слагаемых вида

$$a_n = n(n+1)(n+2), \quad n = 1, 2, \dots, 2005.$$

При этом равна нулю следующая алгебраическая сумма первых пяти слагаемых:

$$\begin{aligned} +1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 6 - 5 \cdot 6 \cdot 7 = \\ = 6 + 24 + 60 + 120 - 210 = 0. \end{aligned}$$

Если рассмотреть 16 последовательных таких чисел, то, выбирая знаки  $\pm$  определенным образом, можно получить сумму  $a_k \pm a_{k+1} \pm \dots \pm a_{k+15}$ , равную нулю. Эта специальная последовательность знаков такова:

$$+ - - + - + + - - + + - + - - +.$$

Для проверки этого факта удобно найти сначала сумму первых четырех слагаемых, равную  $3(4k+10)$  (проведите соответствующие выкладки). Отсюда сразу (заменой  $k$  на  $k+4$ ) и с учетом знака получается сумма следующих четырех слагаемых:  $-3(4(k+4)+10)$ , затем сумма еще четырех слагаемых:  $-3(4(k+8)+10)$  и, наконец, сумма последних четырех слагаемых:  $3(4(k+12)+10)$ . Легко видеть, что сумма полученных четырех выражений равна 0.

Поскольку данная сумма содержит 2005 слагаемых и  $2005 = 5 + 16 \times 125$ , то указанная расстановка знаков действительно приводит к нулю.

Теперь объясним, как можно догадаться до такой расстановки знаков. Рассмотрим разность двух последовательных чисел из данной последовательности слагаемых:

$$\begin{aligned} a_k - a_{k+1} &= k(k+1)(k+2) - (k+1)(k+2)(k+3) = \\ &= -3(k+1)(k+2) = -3(k^2 + 3k + 2). \end{aligned}$$

Для суммы квадратов  $+1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \dots \pm k^2$  Гаусс нашел последовательность знаков  $(+ - - + - + + -)$ . Эта же последовательность годится и для суммы вида  $+1 \pm 2 \pm \dots \pm k$ . Очевидно, эта последовательность знаков подходит и для суммы

$$+2 \pm 2 \pm 2 \pm \dots \pm 2 \pm 2,$$

и для суммы

$$(a_k - a_{k+1}) + (a_{k+2} - a_{k+3}) + \dots + (a_{k+14} - a_{k+15}).$$

Для исходной последовательности  $\{a_n\}$  последовательность знаков оказывается такой:

$$+ + + + - (+ - - + - + + - - + + - + - - +).$$

Как и ранее, период последней последовательности (содержащий 16 знаков) получается из периода предыдущей последовательности (содержащей 8 знаков) заменой знака *плюс* на пару знаков  $+ -$  и заменой знака *минус* на пару знаков  $- +$ .

### Упражнения

Выберите знаки  $\pm$  в следующих суммах так, чтобы получить ноль:

3.  $+1 \cdot 5 \pm 5 \cdot 9 \pm 9 \cdot 13 \pm \dots \pm 29 \cdot 33$

4.  $+1 \cdot 5 \pm 5 \cdot 9 \pm 9 \cdot 13 \pm \dots \pm (32n-3) \cdot (32n+1)$ .

5.  $+1 \cdot 3 \cdot 5 \pm 3 \cdot 5 \cdot 7 \pm \dots \pm (32n-1) \cdot (32n+1) \cdot (32n+3)$

6.  $+1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \pm 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \pm \dots \pm 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35$

7.  $+1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \pm 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \pm \dots \pm 32n \cdot (32n+1) \cdot (32n+2) \cdot (32n+3)$

8. Укажите два-три значения  $n$ , при которых в выражении  $+1^5 \pm 2^5 \pm 3^5 \pm \dots \pm n^5$

можно расставить знаки  $\pm$  так, чтобы получить ноль. Укажите соответствующую последовательность знаков.

Ровно 100 лет назад, в 1906 году, норвежский математик Аксель Туэ привел пример последовательности, составленной из нулей и единиц:

$$0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \dots$$

В 1921 году американский математик Марстон Морс обнаружил эту же последовательность, проводя исследования некоторых нелинейных динамических систем. В честь этих математиков последовательность получила название последовательности Морса–Туэ.

Построение последовательности Морса–Туэ начинается с нуля. На каждом следующем шаге к набору нулей и единиц, который получен на предыдущем шаге, справа приписывается его дополнение — набор цифр, в котором каждый ноль заменен единицей, а каждая единица заменена нулем:

1-й шаг	0
2-й шаг	01
3-й шаг	0110
4-й шаг	01101001
5-й шаг	0110100110010110
6-й шаг	01101001100101101001011001101001

и так далее.

Оказывается, последовательность Морса–Туэ помогает решать задачи, над которыми задумывался и маленький Гаусс.

Рассмотрим, например, сумму  $S_1 = +1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm \dots \pm 100$ . Требуется выбрать последовательность знаков  $\{\pm\}$  так, чтобы сумма стала равной нулю:  $S_1 = 0$ . Решением этой задачи является конечный отрезок последовательности Морса–Туэ 0110 с заменой  $0 \rightarrow +$ ,  $1 \rightarrow -$ :

$$\begin{aligned} S_1 &= (1 - 2 - 3 + 4) + \\ &+ (5 - 6 - 7 + 8) + (9 - 10 - 11 + 12) + \dots \\ &\dots + (93 - 94 - 95 + 96) + (97 - 98 - 99 + 100) = \\ &= 0 \times 25 = 0. \end{aligned}$$

Отрезок знаков  $+ - - +$  (или, что то же, конечная последовательность 0110) используется здесь 25 раз.

Подумайте, как последовательность Морса–Туэ помогает решать и другие задачи.

# Почему Земля вращается против часовой стрелки?

С. СЕМИКОВ

ТИХО ШЕЛЕСТЕЛИ НА ОСЕННЕМ ВЕТРУ ПОЖЕЛТЕВШИЕ ЛИСТЫ «Диалогов» Галилея. Три брата сидели на веранде дома, задумчиво склонив головы. Было грустно. Закончилась четырехдневная «беседа», которой без малого четыреста лет, беседа о двух важнейших системах мира — птолемеевой и коперниковой.

Какой бы интересной ни была книга, ей всегда приходит конец. Но книга не умирает, тем более такая. Она остается жить в нашей памяти, в наших мыслях. И вот, чтобы оживить на время потерянное чувство, задумали три брата — а были они математиком, астрономом и лингвистом (так мы и будем называть их в дальнейшем) — самим повести беседу или спор по какому-нибудь схожему вопросу.

Участников «Диалога» было трое: Сагредо, Сальвиати и Симпличио, и братьев как раз трое. Нашлась и подходящая тема беседы, устраивавшая каждого. А именно, раз Галилей доказал, что Земля вертится, то разумно задаться таким вопросом: «Почему Земля вертится именно против часовой стрелки?» На том и порешили.

Первым, на правах старшего брата, взял слово Математик. Он уточнил, что направление вращения — характеристика относительная. Если смотреть с Северного полюса, то Земля вращается против часовой стрелки, а если с Южного — по часовой стрелке. Значит, вопрос не имеет смысла.

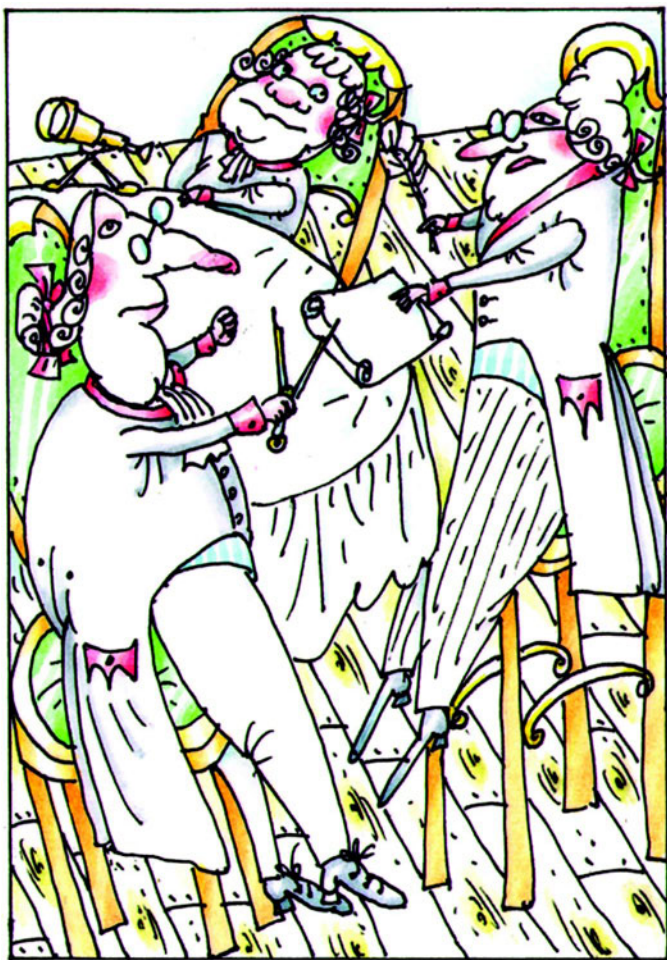
— Тут ты ошибаешься, — возразил Астроном, являющийся средним братом. — Северное полушарие Земли считается верхним, и смотрят обычно с его стороны. Недаром глобусы с фиксированной осью имеют верхним именно северное полушарие. Даже мы, астрономы, народ строгий, говорим: «над плоскостью эклиптики», т.е. плоскостью орбиты Земли, когда имеем в виду полупространство со стороны северного полушария, и — «под», когда со стороны южного. Хотя моряки высокими называют широты, близкие не только к Северному, но и к Южному полюсу, а низкими — близкие к экватору. Правда, тут дело скорее в том, что абсолютное значение широты растет при движении в обе стороны от экватора. Но само понятие о высокой широте возникло в северном полушарии.

— Брат Астроном прав, — подтвердил Лингвист, младший брат. — И хотя детское утверждение о том, что у Земли есть верх и низ, это исторический пережиток и следствие зарождения цивилизации в северном полушарии, но так принято и так удобнее. Если задавать вопрос строго, то он звучит слишком громоздко: «Почему

Земля, видимая со стороны Северного полюса, вращается против часовой стрелки?»

— Хорошо, я отвечу и на такой вопрос, — сказал Математик, хитро улыбнувшись. — Только сначала ответьте мне, — он подбросил монетку и показал ее всем, — почему выпал именно орел, а не решка? Видите ли, появление вращения по или против часовой стрелки, так же, как и выпадение орла или решки, суть события случайные и равновероятные.

— Ну, здесь вы ошибаетесь, — перебил Астроном. — В Солнечной системе вращение против часовой стрелки (если смотреть со стороны Северного полюса эклиптики) является преобладающим, а значит, и более вероятным. Поэтому мы, астрономы, называем это движение прямым, хотя оно и «против», а движение по часовой стрелке — обратным, хотя оно и «по». Да и физики с математиками, видимо, поэтому приняли за



положительное направление вращения и обхода именно движение против часовой стрелки. Так движется все, что только возможно: поверхность Солнца, планеты по орбитам и вокруг оси, спутники и кольца вокруг планет и вокруг оси, пояс астероидов. Лишь немногие небесные тела имеют обратное движение: лежебока-Уран вместе со всеми своими спутниками, склонивший ось вращения под плоскость орбиты на восемь градусов; лентяйка-Венера, имеющая самый длинный день продолжительностью в 243 земных дня; некоторые внешние спутники планет-гигантов да несколько комет и астероидов. Объясняется преобладание прямого движения в Солнечной системе тем, что такое направление вращения имело протопланетное облако, из которого она возникла. Так что шанс того, что Земля стала бы вращаться по часовой стрелке, крайне мал.

В ответ на это Математик, умевший изготовить модель из чего угодно, вытащил из кармана билет на автобус и спросил:

— А ты знаешь, что шанс того, что номер этого билета мог оказаться именно «847935», был один к миллиону и, тем не менее, выпал, как видишь, именно он. А все потому, что не имеет смысла искать вероятность события уже после того, как оно произошло. Кроме того, о вероятности имеет смысл говорить лишь для событий, которые могут повторяться, которые можно воспроизводить или наблюдать в большом количестве, а в одном событии не может быть никаких закономерностей. Именно поэтому, например, нельзя говорить о температуре или давлении газа в объеме, включающем всего одну или несколько молекул. Кроме того, ты утверждаешь, что направление вращения Земли обусловлено направлением вращения протооблака, а между тем, ты забываешь, что оно и само случайно. Ты мог бы, например, изучить начальные условия при бросании монеты и рассчитать, какой стороной она упадет. Это говорит о том, что в принципе выпадение монеты это не случайное событие. Но дело здесь не в том, что результат нельзя предугадать, а в том что он непредсказуем без знания начальных условий, которые сами случайны. Поэтому и оба направления вращения для Земли равновероятны. Теперь вы, надеюсь, понимаете, что спорить бессмысленно, — закончил Математик с видом победителя. — Прав я, брат Лингвист?

— Оба вы по сути правы. Спор же у вас идет о словах и формулировках. Все зависит от того, какой смысл вы вкладываете в вопрос. Естественно, каждый искал и нашел решение вопроса в близком ему значении: математик ищет через вероятности, астроном — через космогонию, а я сейчас дам вам третью трактовку. Поскольку я лингвист, то ищу смысл, прежде всего, в значении слов. — Взгляд его упал на часы. — Вот кто нас рассудит. Вы, когда слышите о вращении по часовой стрелке, представляете себе конкретное направление, а я вижу слово «часы». Для меня «по часовой стрелке» — это направление, совпадающее с ходом часовой стрелки наших часов. Спрашивается, почему же люди за главное направление выбрали именно ход часовой стрелки, а не, скажем, направление вращения гончарного круга или вращение минутной стрелки? И

вообще, почему люди сделали часовую стрелку вращающейся в известную нам сторону? Я думаю, что это не случайно. За направление движения стрелки в механических часах было принято направление вращения указателя в первых часах, созданных человеком, — в солнечных. Именно они определили не только вид современных механических часов и скорость вращения их часовой стрелки (только она стала вращаться в два раза медленнее тени и стрелки в некоторых прежних 24-часовых циферблатах), но и вообще вид приборов с круговой шкалой и стрелочным указателем. Только движение часовой стрелки-тени в солнечных часах обладало неизменным направлением вращения и могло быть всегда воспроизведено — вот почему люди и взяли его за эталон. Заметьте, тень от столба, как известно, поворачивается по часовой стрелке — в ту же сторону, в которую происходит видимое движение Солнца по небосводу. Но, как было показано Галилеем, в действительности Солнце неподвижно, а видимое его движение вызвано вращением Земли в обратном направлении, т.е. именно против часовой стрелки. Таким образом, понятно, что Земля может вращаться только против часовой стрелки, если под этим понимать не конкретное направление, а именно направление хода часовой стрелки-тени в солнечных или механических часах. Если бы Земля вращалась в другую сторону, то другим было бы и движение часовой стрелки.

— Ну ты, брат, силен, — восхищенно проговорил Математик. — Это же невероятно. Получается, если бы цивилизация возникла в южном полушарии, то обнаружила бы, что и с их стороны Земля вращается против часовой стрелки. Ведь их солнце движется по небу в сторону, противоположную движению нашего, а значит, и их часовая стрелка вращалась бы противоположно. Относительное вращение Земли и стрелки инвариантно по отношению к преобразованию направления вращения Земли!

— Да что там Земли, это справедливо для любой планеты с коренной цивилизацией, — вмешался Астроном, который, как и все астрономы, в глубине души лелеял мечту о контакте с инопланетной разумной жизнью. — Представляете, как будут удивлены инопланетяне, когда, связавшись с ними, мы сообщим, что их планета вращается против их часовой стрелки, иными словами, что мы знаем не только их эталон вращения, но и направление вращения планеты и этого эталона. Я бы на их месте удивился.

— Ну, я бы не стал приписывать данному правилу такую универсальность, — охладил его пыл Лингвист. — Ведь требуется выполнение сразу многих условий. Так, эта цивилизация могла уже позабыть, что такие механические часы, или солнечные часы не были изобретены, например из-за плотной облачной атмосферы, как на Венере. Я же производил анализ для земной цивилизации... На этом предлагаю пока закончить обсуждение. Быть может, завтра мы снова соберемся, чтобы обсудить этот и, возможно, другие вопросы. — Лингвист поежился. — А сейчас становится темно и прохладно, предлагаю пойти выпить чаю. Возражений не имеется?



# Вписанные и описанные многоугольники

И.СМИРНОВА, В.СМИРНОВ

**Т**ЕМА «ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ» является одной из основных в курсе геометрии 7–9 классов. Однако ее изучение ограничивается вписанными и описанными треугольниками и правильными многоугольниками.

В новых стандартах по математике профильного уровня обучения в курсе геометрии 10–11 классов предусматривается изучение вписанных и описанных четырехугольников, в частности – необходимых и достаточных условий вписанности и описанности, теоремы Птолемея и др.

Здесь мы предлагаем материал о вписанных и описанных многоугольниках, предназначенный для углубленного изучения геометрии, подготовки к различным турнирам, конкурсам и олимпиадам по математике.

## Вписанные четырехугольники

Начнем с рассмотрения некоторых свойств вписанных четырехугольников. В отличие от треугольников, не около каждого четырехугольника можно описать окружность. Нетрудно доказать, что имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** Если четырехугольник вписан в окружность, то сумма его противоположных углов равна  $180^\circ$ .

Действительно, например, углы  $A$  и  $C$  вписанного в окружность четырехугольника  $ABCD$  (рис.1) опираются на

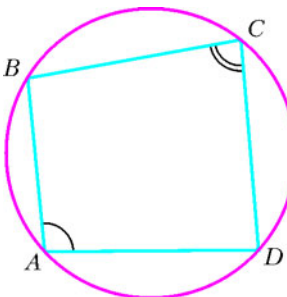


Рис. 1

В самом деле, пусть  $ABCD$  – четырехугольник, у которого  $\angle A + \angle C = 180^\circ$ . Заметим, что геометрическое место точек  $C$ , из которых отрезок  $BD$  виден под углом  $180^\circ - \angle A$ , представляет собой дугу окружности, стягиваемую хордой  $BD$ . Так как по условию  $\angle A + \angle C = 180^\circ$ , то точка  $C$  должна принадлежать данной окружности.

Таким образом, справедлива такая теорема.

**Теорема 3.** Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна  $180^\circ$ .

### Упражнения

1. Можно ли описать окружность около: а) прямоугольника; б) параллелограмма; в) ромба; г) квадрата; д) равнобедренной

трапеции; е) прямоугольной трапеции?

2. Можно ли описать окружность около четырехугольника, углы которого последовательно равны: а)  $70^\circ, 130^\circ, 110^\circ, 50^\circ$ ; б)  $90^\circ, 90^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ ; в)  $45^\circ, 75^\circ, 135^\circ, 105^\circ$ ; г)  $40^\circ, 125^\circ, 55^\circ, 140^\circ$ ?

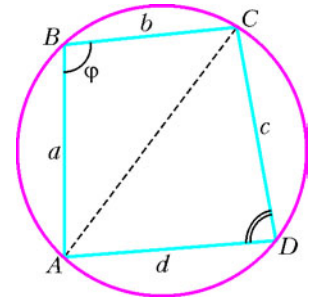


Рис. 2

Выясним, каким условиям должны удовлетворять стороны четырехугольника, вписанного в окружность.

Пусть четырехугольник  $ABCD$  со сторонами  $a, b, c, d$  вписан в окружность (рис.2). По теореме косинусов,

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi =$$

$$= c^2 + d^2 - 2cd \cos(180^\circ - \varphi) = c^2 + d^2 + 2cd \cos \varphi,$$

откуда

$$\cos \varphi = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

и, следовательно, должно выполняться неравенство

$$\left| \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} \right| \leq 1.$$

Верно и обратное: если для сторон четырехугольника выполняется указанное неравенство, то мы можем определить угол  $\varphi$ , положив

$$\varphi = \arccos \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}.$$

Полученное неравенство эквивалентно неравенству

$$|a^2 + b^2 - c^2 - d^2| \leq 2(ab + cd)$$

и, значит, системе неравенств

$$-2(ab + cd) \leq a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \leq 2(ab + cd).$$

Сделаем несколько равносильных преобразований этой системы:

$$\begin{cases} (c-d)^2 \leq (a+b)^2, \\ (a-b)^2 \leq (c+d)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |c-d| \leq a+b, \\ |a-b| \leq c+d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq b+c+d, \\ -a-b \leq c-d \leq a+b, \\ -c-d \leq a-b \leq c+d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \leq a+c+d, \\ c \leq a+b+d, \\ d \leq a+b+c. \end{cases}$$

Легко видеть, что последняя система неравенств справедлива для любого четырехугольника со сторонами  $a, b, c, d$ .

Итак, имеет место следующая теорема.

**Теорема 4.** Для произвольного четырехугольника  $ABCD$  существует четырехугольник  $A'B'C'D'$  с такими же сторонами, около которого можно описать окружность.

### Упражнения

3. Существует ли четырехугольник со сторонами 1, 2, 3, 4, около которого можно описать окружность?

4. Можно ли описать окружность около четырехугольника со сторонами 1, 2, 3, 4 и одной диагональю 4?

Теорема Птолемея для четырехугольника, вписанного в окружность, утверждает, что произведение его диагоналей

(Продолжение см. на с. 34)

# Египетские дроби

ДРОБИ ВИДА  $\frac{1}{n}$ , ГДЕ  $n$  – НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО, часто называют *египетскими*. Другие названия таких дробей: *основные*, *аликвотные* (от латинского *aliquot* – несколько). Древнеегипетские вычислители почему-то питали особое пристрастие к дробям, в числителе которых стоит единица. В Британском музее хранится папирус, составленный писцом Ахмесом примерно за 1600–1700 лет до нашей эры. Одна из задач этого папируса – разделить 7 хлебов между 8 людьми – решается в характерном для всей египетской математики стиле: каж-

дому проголодавшемуся нужно дать сумму  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$  долей одного хлеба, выраженных аликвотными дробями. В другой задаче предлагается найти такое натуральное  $n$ , что  $\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{n}$ . Когда эту задачу предложили шестиклассникам на Московской олимпиаде в 1997 году, то справились с ней далеко не все – видимо, упорство не каждого современного школьника может сравниться с установкой на преодоление трудностей древнего египтянина.

В большинстве случаев для представления некоторой правильной дроби в виде суммы различных египетских дробей достаточно уметь раскладывать в такую сумму всякую дробь вида  $\frac{2}{n}$ . Например, зная разложения

$$\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}, \quad \frac{2}{25} = \frac{1}{15} + \frac{1}{75}, \quad \frac{2}{75} = \frac{1}{50} + \frac{1}{150},$$

дробь  $\frac{7}{25}$  можно легко представить суммой различных египетских дробей:

$$\begin{aligned} \frac{7}{25} &= \frac{1}{25} + \frac{2}{25} + \frac{4}{25} = \frac{1}{25} + \frac{1}{15} + \frac{1}{75} + \frac{2}{15} + \frac{2}{75} = \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{25} + \frac{1}{30} + \frac{1}{50} + \frac{1}{75} + \frac{1}{150}. \end{aligned}$$

Папирус Ахмеса предваряет таблица, в которой все дроби вида  $\frac{2}{n}$  для нечетных  $n$  от 3 до 101 представлены суммами египетских дробей. Эта таблица помогала производить сложные арифметические выкладки согласно принятым канонам. По-видимому, писцы заучивали ее наизусть, так же, как сейчас школьники запоминают таблицу умножения.

Разложение произвольной дроби в сумму аликвотных дробей не единственно. Например,

$$\frac{3}{25} = \frac{1}{15} + \frac{1}{25} + \frac{1}{75} = \frac{1}{10} + \frac{1}{50}.$$

Египтяне стремились использовать разложения с небольшим количеством слагаемых и по возможности с наимень-

шими знаменателями. Какими именно способами они при этом пользовались, мы не знаем. В настоящее время доказано, что всякое положительное рациональное число можно выразить суммой различных египетских дробей, а также предложено для этих целей несколько практических алгоритмов (вообще говоря, эти алгоритмы иногда дают различные разложения).

Алгоритм Фибоначчи (1180–1240) разложения рационального числа  $r = \frac{m}{n}$ ,  $0 < r < 1$ , в сумму различных египетских дробей основан на последовательном приближении. Выберем  $a_1$  так, чтобы дробь  $\frac{1}{a_1}$  оказалась наибольшей из дробей, приближающих  $r$  снизу:  $\frac{1}{a_1} \leq r < \frac{1}{a_1 - 1}$ . Тогда остаток  $r_1 = r - \frac{1}{a_1} = \frac{ma_1 - n}{na_1} = \frac{m_1}{n_1}$  удовлетворяет неравенствам  $0 \leq r_1 < \frac{1}{a_1(a_1 - 1)}$ ,  $0 < ma_1 - n = m_1 < m$ .

Следующее число  $a_2$  выбираем так, чтобы дробь  $\frac{1}{a_2}$  наилучшим образом приближала снизу остаток  $r_1$ :  $\frac{1}{a_2} \leq r_1 < \frac{1}{a_2 - 1}$ , так что  $a_2 \geq a_1^2 - a_1 + 1$ .

Далее полагаем  $r_2 = r_1 - \frac{1}{a_2} = \frac{m_1 a_2 - n_1}{n_1 a_2} = \frac{m_2}{n_2}$ , тогда  $0 < m_1 a_2 - n_1 = m_2 < m_1$ . Затем по  $r_2$  определяем  $a_3$  и т.д. Так как последовательность числителей  $m_i$  убывает, то при некотором  $i = k < m$  получим  $r_k = \frac{1}{n_k} = \frac{1}{a_k}$ . В итоге окончательное разложение примет вид  $r = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots$

$\dots + \frac{1}{a_k}$ , при этом числа  $a_i$  удовлетворяют неравенствам  $a_{i+1} \geq a_i^2 - a_i + 1$ ,  $a_i \geq 2$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Алгоритм, предложенный М.В. Остроградским (1801–1862), родственен алгоритму Фибоначчи и аналогично позволяет получить разложение  $r = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_1 b_2} + \dots + \frac{1}{b_1 b_2 \dots b_k}$ , где  $b_i$  – натуральные числа,  $b_{i+1} \geq b_i$ ,  $b_i \geq 2$ .

Имеются и другие алгоритмы.

Среди любопытных находок укажем способ разложения единицы в сумму различных египетских дробей, предложенный Н.Ю. Нецветаевым в 1985 году:

$$1 = \frac{1}{f_1 f_3} + \frac{1}{f_2 f_4} + \dots + \frac{1}{f_n f_{n+2}} + \frac{1}{f_{n+1} f_{n+2}},$$

где  $f_i$  – числа Фибоначчи:  $f_1 = f_2 = 1$ ,  $f_{i+1} = f_i + f_{i-1}$ .

В 1915 году американский математик О. Келлог опубликовал задачу: какие  $n$  египетских дробей (дроби могут

повторяться), взятые в сумме, дают наилучшее приближение к 1 снизу? Например, при  $n = 3$  наилучшее приближение дает сумма  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42}$ . В 1922 году эта задача была решена американским математиком Кертисом. Оказалось, что в общем случае наилучшее приближение дает сумма  $n$  первых членов ряда  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{1807} + \dots$ . Знаменатель каждого члена этого ряда, начиная со второго, на 1 больше произведения знаменателей всех предыдущих членов. Последовательность чисел в знаменателях носит название последовательности Сильвестра (1814–1897) и может быть также задана рекуррентной зависимостью  $a_1 = 2$ ,  $a_{i+1} = a_i^2 - a_i + 1$ ,  $i = 1, 2, \dots$

### Знаете ли вы, что...

- Для любого натурального  $k \geq 3$  единицу можно представить в виде суммы  $k$  различных египетских дробей.

- Для любого нечетного  $k \geq 9$  единицу можно представить в виде суммы  $k$  различных египетских дробей с нечетными знаменателями. Например, в случае  $k = 9$  годится разложение

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{135} + \frac{1}{10395}$$

- Единицу нельзя представить в виде суммы четного количества различных египетских дробей с нечетными знаменателями.

- Дробь  $\frac{1}{n}$  при простом  $n$  представима суммой двух египетских дробей двумя способами, а при составном  $n$  – более чем двумя способами.

- Дробь  $\frac{2}{n}$  при простом  $n$  представима в виде суммы двух различных египетских дробей только одним способом.

- Представление числа  $\frac{3}{n}$ , где  $n$  не делится на 3, в виде суммы двух египетских дробей возможно в том и только в том случае, когда  $n$  имеет делитель вида  $3k + 2$ .

- Дробь  $\frac{4}{n}$  при нечетном  $n$  представима в виде суммы двух египетских дробей тогда и только тогда, когда  $n = m(4k - 1)$ ,  $m, k$  – натуральные.

- Любую дробь  $\frac{4}{n}$  можно представить суммой трех египетских дробей (П.Эрдёш, 1913–1996).

- В случае  $m < n^2$  ( $m, n$  – натуральные) существует разложение рационального числа  $\frac{m}{n}$  в сумму различных египетских дробей, в которой не более  $2^m - 1$  слагаемых.

- Если  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$  – каноническое разложение натурального числа  $n$  на простые множители  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , то количество способов, с помощью которых можно разложить число  $\frac{1}{n}$  в сумму двух не обязательно различных египетских дробей, равно  $\frac{1}{2}((2a_1 + 1)(2a_2 + 1) \dots (2a_k + 1))$ .

- Любое рациональное число можно лишь конечным числом способов представить в виде суммы заданного количества египетских дробей (В.Серпинский, 1882–1969). Другими словами, при каждом  $s$  уравнение  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_s} = 1$  может иметь лишь конечное количество решений в множестве натуральных чисел.

- Для любого натурального  $n$  на числовом интервале  $(0; 1)$  существует рациональное число, не представимое в виде суммы различных египетских дробей с не более чем  $n$  слагаемыми.

- Всякую дробь  $\frac{m}{n} < 1$  ( $m, n$  – натуральные) можно разложить в сумму различных египетских дробей со знаменателями, не превосходящими  $n^2$ .

- Любое число, не меньшее  $\frac{2}{3}$ , нельзя представить в виде конечной суммы различных дробей, обратных квадратам натуральных чисел.

- Любое положительное рациональное число, меньшее  $\frac{\pi^2}{6} - 1$ , можно представить в виде конечной суммы различных дробей, обратных квадратам натуральных чисел (П.Эрдёш).

- Дробь  $\frac{1}{2}$  равна сумме всех дробей вида  $\frac{1}{pq}$ , где  $0 < p < q \leq n$ ,  $p + q > n$ ,  $p$  и  $q$  взаимно просты.

- Любое натуральное число  $n$  является суммой всех дробей вида  $\frac{1}{i_1 i_2 \dots i_k}$ , где  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ .

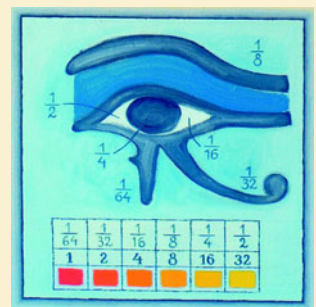
- Из любой арифметической прогрессии натуральных чисел можно выбрать несколько различных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  таких, что  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1$ .

### Глаз и Солнце

«Для древних характерно переплетение образа Солнца и глаза. В египетской мифологии часто упоминается бог Гор, олицетворяющий крылатое Солнце и являющийся одним из самых распространенных сакральных символов. В битве с врагами Солнца, воплощенными в образе Сета, Гор сначала терпит поражение. Сет вырывает у него Глаз – чудесное око – и разрывает его в клочья. Тот – бог учения, разума и правосудия – снова сложил части глаза в одно целое, создав «здоровый глаз Гора». Изображения частей разрубленного Ока использовались при письме в Древнем Египте для обозначения математических дробей» – из книги М.Г.Томилина, С.К.Стафеева «Пять тысячелетий оптики: предыстория».

Материал подготовил А. Жуков

В оформлении использована картина А.Ф.Панкина, «Глаз и Солнце»



(Начало см. на с. 31)

равно сумме произведений противоположных сторон. Мы докажем более сильную теорему.

**Теорема 5.** Произведение диагоналей произвольного четырехугольника меньше или равно сумме произведений его противоположных сторон, причем равенство достигается

только в случае четырехугольника, вписанного в окружность.

**Доказательство.**

Рассмотрим четырехугольник  $ABCD$ . Воспользуемся инверсией с центром в точке  $A$  и радиусом  $R$  (рис.3). Напомним, что при инверсии точкам  $X$ , отличным от  $A$ , сопоставляются точки  $X'$  на луче  $AX$ , для кото-

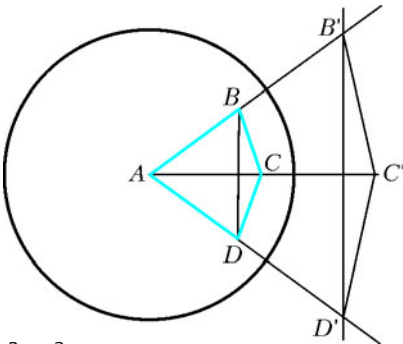


Рис. 3

рых  $AX \cdot AX' = R^2$ . При этом окружности, не проходящие через точку  $A$ , переходят в окружности, проходящие через точку  $A$ , за исключением самой точки  $A$ , переходят в прямые.

Пусть точки  $B, C$  и  $D$  переходят в точки  $B', C'$  и  $D'$  соответственно. Тогда треугольники  $ABC$  и  $AB'C'$ ,  $ADC$  и  $AD'C'$ ,  $ABD$  и  $AB'D'$  подобны и, следовательно, имеют место равенства

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AC'}, \quad \frac{CD}{AD} = \frac{C'D'}{AC'}$$

Складывая почленно эти равенства, получим

$$\begin{aligned} \frac{BC}{AB} + \frac{CD}{AD} &= \frac{B'C' + C'D'}{AC'} \geq \\ &\geq \frac{B'D'}{AC'} = \frac{B'D'}{BD} \cdot \frac{BD}{AC'} = \frac{AB'}{AD} \cdot \frac{BD}{AC'} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{BD}{AD} \end{aligned}$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD \geq AC \cdot BD.$$

При этом равенство достигается только тогда, когда точки  $B', C', D'$  принадлежат одной прямой. Это выполняется только в случае, если точки  $B, C, D$  принадлежат окружности, проходящей через точку  $A$ .

### Вписанные пятиугольники

Рассмотрим теперь пятиугольники, вписанные в окружность. Начнем с задачи.

**Задача 1.** Можно ли описать окружность около пятиугольника с углами  $8^\circ, 9^\circ, 1^\circ, 13^\circ, 14^\circ$  ?

Для ее решения установим соотношения между углами вписанного пятиугольника (рис.4). Заметим, что углы  $A$  и  $C$  опираются на дуги, в сумме составляющие всю окружность плюс дугу  $DE$ . Из этого вытекает следующая теорема.

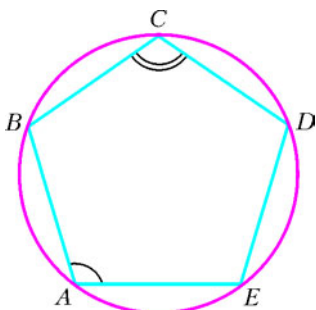


Рис. 4

**Теорема 6.** Сумма любых двух несмежных углов вписанного пятиугольника больше  $180^\circ$ .

Указанные в задаче 1 углы не удовлетворяют этому условию, и, значит, около такого пятиугольника нельзя описать окружность.

Естественный вопрос, который возникает после этого: является ли полученное условие достаточным, чтобы около пятиугольника можно было описать окружность? Ответ на этот вопрос отрицательный.

Пример такого пятиугольника легко построить. Возьмем какой-нибудь вписанный пятиугольник  $ABCDE$  (рис.5) и, продолжив две его стороны, построим пятиугольник  $ABCD'E'$  так, чтобы сторона  $D'E'$  была параллельна  $DE$ . Тогда углы этого пятиугольника будут равны углам исходного, но около него нельзя описать окружность.

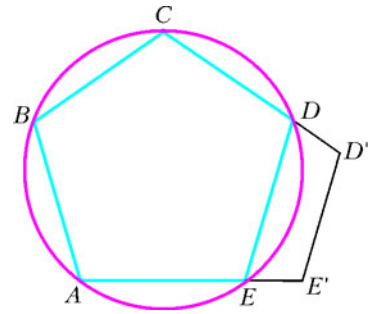


Рис. 5

Поставим другой вопрос, связанный с достаточным условием вписанности пятиугольника. Пусть  $ABCDE$  – пятиугольник, сумма любых двух несмежных углов которого больше  $180^\circ$ . Существует ли пятиугольник  $A'B'C'D'E'$  с такими же углами, около которого можно описать окружность?

Прежде чем ответить на этот вопрос, решим такую задачу.

**Задача 2.** По данным углам вписанного пятиугольника  $ABCDE$  найдите углы между его диагоналями, выходящими из одной вершины.

**Ответ:**  $\angle CAD = \angle B + \angle E - 180^\circ$  (рис. 6). Аналогичным образом выражаются и другие углы.

Вернемся теперь к поставленному вопросу. Для ответа на него рассмотрим какую-нибудь окружность и разделим ее на дуги, равные удвоенным углам между диагоналями исходного пятиугольника, выходящими из одной вершины. Концы этих дуг будут вершинами искомого пятиугольника, вписанного в окружность.

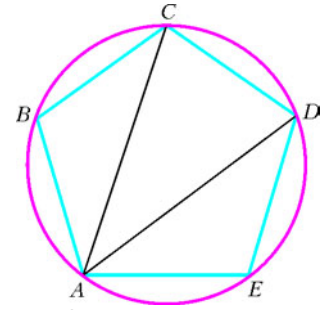


Рис. 6

Таким образом, имеет место следующая теорема.

**Теорема 7.** Для произвольного пятиугольника  $ABCDE$ , суммы любых двух несмежных углов которого больше  $180^\circ$ , существует пятиугольник  $A'B'C'D'E'$  с такими же углами, около которого можно описать окружность.

**Задача 3.** По радиусу окружности и углам вписанного в нее пятиугольника  $ABCDE$  найдите стороны этого пятиугольника.

**Ответ:**  $AB = 2R \sin \angle ADB = -2R \sin (\angle C + \angle E)$ . Аналогичным образом выражаются другие стороны пятиугольника.

Решение задачи 3 показывает, что для пятиугольника, вписанного в окружность, имеет место теорема, аналогичная теореме синусов для треугольника. А именно:

**Теорема 8.** Для пятиугольника  $ABCDE$ , вписанного в окружность радиуса  $R$ , имеют место равенства

$$\frac{AB}{\sin (\angle C + \angle E)} = \dots = \frac{AE}{\sin (\angle B + \angle D)} = -2R. \quad (1)$$

Оказывается, верно и обратное утверждение:

**Теорема 9.** Если для пятиугольника  $ABCDE$  выполняются равенства (1), то около него можно описать окружность радиуса  $R$ .

Для доказательства рассмотрим окружность радиуса  $R$  и отложим на ней дуги, равные удвоенным величинам

$\angle B + \angle E - 180^\circ, \dots$  Концы этих дуг будут вершинами многоугольника, равного исходному.

Следующая теорема дает ответ на вопрос о том, можно ли описать окружность около пятиугольника с данными сторонами.

**Теорема 10.** Для произвольного пятиугольника  $ABCDE$  существует пятиугольник  $A'B'C'D'E'$  с такими же сторонами, около которого можно описать окружность.

**Доказательство.** Пусть стороны пятиугольника равны  $a, b, c, d, e$ , где  $e$  – его наибольшая сторона. Если при  $R = \frac{e}{2}$  выполняется равенство

$$\arcsin \frac{a}{2R} + \dots + \arcsin \frac{e}{2R} = 180^\circ,$$

то, откладывая на окружности радиуса  $R$  дуги величин

$$2 \arcsin \frac{a}{2R}, \dots, 2 \arcsin \frac{e}{2R},$$

получим, что концы этих дуг являются вершинами искомого пятиугольника.

Предположим, что при  $R = \frac{e}{2}$  выполняется неравенство

$$\arcsin \frac{a}{2R} + \dots + \arcsin \frac{e}{2R} > 180^\circ.$$

Тогда при увеличении  $R$  левая часть уменьшается и стремится к нулю. Поэтому найдется  $R$ , при котором будет выполняться равенство

$$\arcsin \frac{a}{2R} + \dots + \arcsin \frac{e}{2R} = 180^\circ,$$

и, значит, существует искомым пятиугольник.

Предположим, что при  $R = \frac{e}{2}$  выполняется неравенство

$$\arcsin \frac{a}{2R} + \dots + \arcsin \frac{e}{2R} < 180^\circ,$$

или, что то же самое, неравенство

$$\arcsin \frac{a}{e} + \dots + \arcsin \frac{d}{e} < 90^\circ.$$

Докажем, что найдется  $R$ , для которого будет выполняться равенство

$$\arcsin \frac{a}{2R} + \dots + \arcsin \frac{d}{2R} = \arcsin \frac{e}{2R}.$$

Для окружности радиуса  $R = \frac{e}{2}$  отложим хорды  $A'B' = a$ ,  $B'C' = b$ ,  $C'D' = c$ ,  $D'E' = d$ . Тогда будет выполняться неравенство  $A'E' < e$ . При стремлении радиуса окружности к  $+\infty$  хорда  $A'E'$  будет стремиться к  $a + b + c + d$ . Поскольку  $e < a + b + c + d$ , то найдется  $R$ , при котором будет выполняться требуемое равенство. Соответствующий пятиугольник  $A'B'C'D'E'$  будет искомым пятиугольником, вписанным в окружность.

**Упражнение 5.** Можно ли описать окружность около пятиугольника со сторонами 1, 2, 3, 4, 5? Точнее: существует ли пятиугольник со сторонами 1, 2, 3, 4, 5, около которого можно описать окружность?

### Вписанные многоугольники с большим числом сторон

Ситуация с вписанными в окружность семиугольниками, девятиугольниками и так далее аналогична рассмотренной ситуации с пятиугольниками. В частности, имеют место следующие теоремы.

**Теорема 11.** Сумма любых трех несмежных углов вписанного семиугольника больше  $36^\circ$ .

**Теорема 12.** Для произвольного семиугольника  $ABCDEFG$ , суммы любых трех несмежных углов которого больше  $36^\circ$ , существует семиугольник  $A'B'C'D'E'F'G'$  с такими же углами, около которого можно описать окружность.

**Теорема 13.** Для семиугольника  $ABCDEFG$ , вписанного в окружность радиуса  $R$ , имеют место равенства

$$\frac{AB}{\sin(\angle C + \angle E + \angle G)} = \dots = \frac{AE}{\sin(\angle B + \angle D + \angle F)} = 2R. \quad (2)$$

**Теорема 14.** Если для семиугольника  $ABCDEFG$  выполняются равенства (2), то около него можно описать окружность радиуса  $R$ .

**Теорема 15.** Для произвольного семиугольника  $ABCDEFG$  существуют семиугольник  $A'B'C'D'E'F'G'$  с такими же сторонами, около которого можно описать окружность.

Для вписанных многоугольников с четным числом сторон ситуация аналогична ситуации с вписанным четырехугольником. В частности, для вписанного шестиугольника справедливы такие теоремы.

**Теорема 16.** Сумма трех несмежных углов вписанного шестиугольника равна  $360^\circ$ .

**Теорема 17.** Если сумма трех несмежных углов выпуклого шестиугольника равна  $360^\circ$ , то существует шестиугольник с такими же углами, около которого можно описать окружность.

Заметим, что, в отличие от вписанного пятиугольника, углы вписанного шестиугольника и радиус описанной окружности определяют стороны шестиугольника неоднозначно. Действительно, рассмотрим какой-нибудь вписанный шестиугольник  $ABCDEF$  (рис.7). Повернем треугольник  $BDF$  вокруг центра окружности на некоторый угол. Получим треугольник  $B'D'F'$ . Шестиугольник  $AB'C'D'E'F'$  вписанный и имеет те же углы, что и данный шестиугольник.

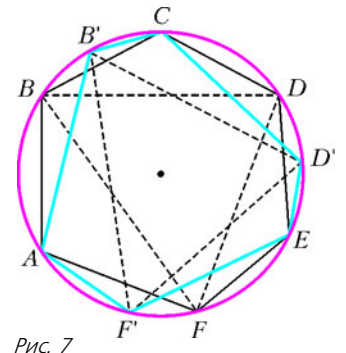


Рис. 7

### Описанные многоугольники

Перейдем теперь к рассмотрению описанных многоугольников. Ситуация здесь в некотором смысле двойственная по отношению к вписанным многоугольникам. При этом стороны описанного многоугольника двойственны углам вписанного многоугольника. Так, например, если для вписанности четырехугольника необходимым и достаточным условием является равенство сумм противоположных углов, то для описанности выпуклого четырехугольника необходимым и достаточным условием является равенство сумм противоположных сторон. А именно, имеют место следующие теоремы.

**Теорема 18.** Суммы противоположных сторон описанного около окружности четырехугольника равны.

**Доказательство.** Пусть четырехугольник  $ABCD$  описан около окружности,  $A', B', C', D'$  – точки касания (рис.8). Тогда  $AA' = AD'$ ,  $BB' = BC'$ ,  $CC' = CD'$ ,  $DD' = DA'$ . Сумма противоположных сторон  $AB + CD = AA' + BB' + CC' + DD' = AD' + BC' = BC + DA$ .

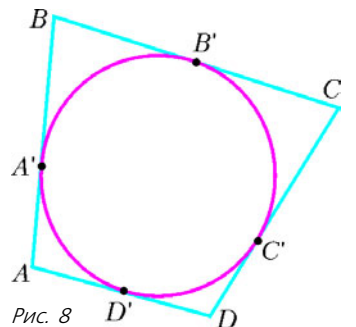


Рис. 8

$BA' = BB'$ ,  $DC' = DD'$ ,  $CC' = CB'$ . Складывая почленно эти равенства, получим равенство  $AB + CD = AD + BC$ , означающее, что суммы противоположных сторон вписанного четырехугольника равны.

**Теорема 19.** Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

**Доказательство.** Пусть в выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  имеет место равенство  $AB + CD = BC + AD$ .

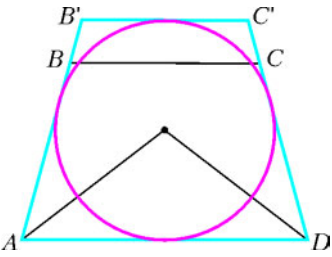


Рис. 9

Рассмотрим окружность, касающуюся сторон углов  $A$  и  $D$  (рис.9). Центром этой окружности является точка пересечения биссектрис углов  $A$  и  $D$ . Предположим, что эта окружность не касается стороны  $BC$ . Проведем касательную  $B'C'$ , для которой угол  $B'$  равен углу  $B$ . Тогда четырехугольник

$AB'C'D$  будет описан около окружности и, следовательно, для него будет выполняться равенство  $AB' + C'D = AD + B'C'$ . С другой стороны, по условию выполняется равенство  $AB + CD = AD + BC$ . Вычитая из первого равенства второе, получим  $BB' + CC' = B'C' - BC$ , или  $B'C' = BB' + BC + CC'$ . Последнее равенство не может выполняться для точек, не лежащих на одной прямой, значит, неверным было наше предположение о том, что окружность не касается стороны  $BC$ .

Самостоятельно подумайте, где в доказательстве использовалась выпуклость четырехугольника. Приведите пример невыпуклого четырехугольника, у которого суммы противоположных сторон равны и в который нельзя вписать окружность.

### Упражнения

6. Можно ли вписать окружность в: а) прямоугольник; б) параллелограмм; в) ромб; г) квадрат; д) дельтоид (рис.10)?

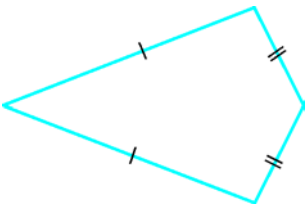


Рис. 10

7. Можно ли вписать окружность в четырехугольник со сторонами 1, 2, 3, 4?

Выясним, каким условиям должны удовлетворять углы четырехугольника, чтобы в него можно было вписать окружность.

Конечно, описанный четырехугольник должен быть выпуклым. Это равносильно тому, что углы четырехугольника меньше  $180^\circ$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 20.** Для произвольного выпуклого четырехугольника  $ABCD$  существует четырехугольник  $A'B'C'D'$  с такими же углами, в который можно вписать окружность.

Действительно, зафиксируем  $R$  и рассмотрим восемь прямоугольных треугольников с катетом  $R$  и противолежащими острыми углами  $A/2$ ,  $A/2$ ,  $B/2$ ,  $B/2$ ,  $C/2$ ,  $C/2$ ,  $D/2$ ,  $D/2$ . Складывая эти треугольники, получим четырехугольник  $A'B'C'D'$ , в который

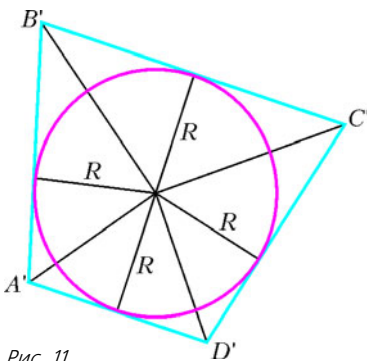


Рис. 11

можно вписать окружность и углы которого равны углам исходного четырехугольника (рис.11).

**Упражнение 8.** Можно ли вписать окружность в четырехугольник с углами  $70^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $100^\circ$ ,  $110^\circ$ ?

Следующие упражнения и теоремы, двойственные соответствующим задачам и теоремам для вписанных пятиугольников, предлагаем для самостоятельного решения и доказательства.

**Упражнение 9.** Можно ли вписать окружность в пятиугольник со сторонами 1, 2, 1, 2, 1?

**Теорема 21.** Сумма любых двух несмежных сторон описанного пятиугольника меньше суммы трех оставшихся сторон.

**Теорема 22.** Для произвольного пятиугольника  $ABCDE$ , сумма любых двух несмежных сторон которого меньше суммы оставшихся сторон, существует пятиугольник  $A'B'C'D'E'$  с такими же сторонами, в который можно вписать окружность.

**Теорема 23.** Для пятиугольника  $ABCDE$ , описанного около окружности радиуса  $R$ , имеют место равенства

$$\frac{a + c + d - b - e}{\operatorname{ctg} \frac{\angle A}{2}} = \dots = \frac{b + c + e - a - d}{\operatorname{ctg} \frac{\angle E}{2}} = 2R. \quad (3)$$

**Теорема 24.** Если для пятиугольника  $ABCDE$  выполняются равенства (3), то в него можно вписать окружность радиуса  $R$ .

**Теорема 25.** Для произвольного выпуклого пятиугольника существует пятиугольник с такими же углами, в который можно вписать окружность.

**Упражнение 10.** Можно ли вписать окружность в пятиугольник с углами  $80^\circ$ ,  $100^\circ$ ,  $110^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $130^\circ$ ?

### Общие теоремы

#### о вписанных и описанных многоугольниках

Сформулируем теперь общие теоремы о вписанных и описанных многоугольниках. Их доказательства повторяют доказательства рассмотренных выше частных случаев.

**Теорема I.** Сумма любых  $n$  несмежных углов вписанного  $(2n+1)$ -угольника больше  $180^\circ(n-1)$ .

**Теорема II.** Если сумма любых  $n$  несмежных углов  $(2n+1)$ -угольника больше  $180^\circ(n-1)$ , то существует  $(2n+1)$ -угольник с такими же углами, около которого можно описать окружность.

**Теорема III.** Сумма  $n$  несмежных углов вписанного  $2n$ -угольника равна  $180^\circ(n-1)$ .

**Теорема IV.** Если сумма  $n$  несмежных углов  $2n$ -угольника равна  $180^\circ(n-1)$ , то существует  $2n$ -угольник с такими же углами, около которого можно описать окружность.

**Теорема V.** Сумма любых  $n$  несмежных сторон описанного  $(2n+1)$ -угольника меньше суммы его остальных сторон.

**Теорема VI.** Если сумма любых  $n$  несмежных сторон  $(2n+1)$ -угольника меньше суммы его остальных сторон, то существует  $(2n+1)$ -угольник с такими же сторонами, в который можно вписать окружность.

**Теорема VII.** Сумма  $n$  несмежных сторон описанного  $2n$ -угольника равна сумме его остальных сторон.

**Теорема VIII.** Если сумма  $n$  несмежных сторон  $2n$ -угольника равна сумме его остальных сторон, то существует  $2n$ -угольник с такими же сторонами, в который можно вписать окружность.

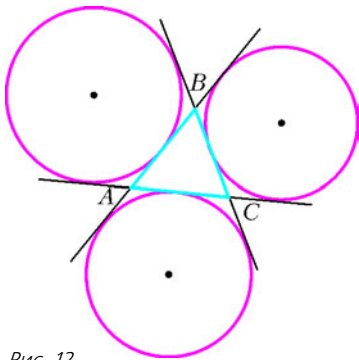


Рис. 12

### Вневписанные окружности

Кроме вписанных и описанных окружностей бывают так называемые вневписанные окружности. У треугольника имеются три вневписанные окружности (рис.12). Каждая из них касается одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон.

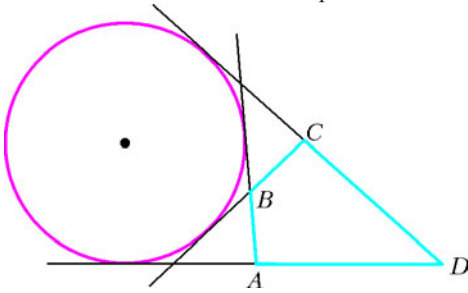


Рис. 13

На рисунке 13 изображен четырехугольник  $ABCD$  и вневписанная в него окружность, касающаяся продолжений всех его сторон.

### Упражнения

11. Установите взаимосвязь между сторонами четырехугольника, для которого имеется вневписанная окружность.

12. Приведите примеры пятиугольников, шестиугольников и так далее многоугольников, для которых имеются вневписанные окружности. Установите соотношения между их сторонами.

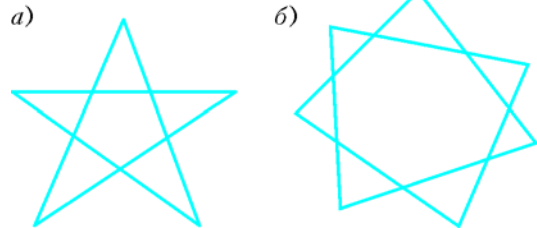


Рис. 14

13. Сформулируйте и докажите теоремы, аналогичные теоремам, рассмотренным выше, о вписанных и описанных звездчатых многоугольниках (рис.14).

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

# Листья улыбаются

**А.МИНЕЕВ**

У КАЖДОГО ДЕРЕВА ЕСТЬ НЕСКОЛЬКО ОСОБЫХ ТИПОВ клеток, которые во многом определяют его строение и свойства. Среди клеток листьев это устьица, на корнях растений – корневые волоски, а в стволе дерева – ближайшие к коре дерева клетки камбия. Именно по этим клеткам движется вода в растениях: через корневые волоски вода всасывается из почвы, по сосудам ксилемы (часть камбия) вода поднимается вверх по стволу к листьям и через открытые устьица испаряется в воздух.

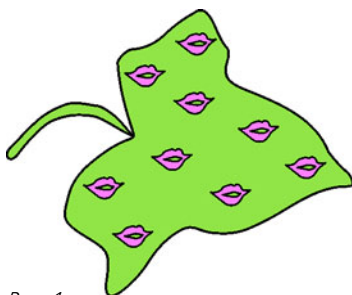


Рис. 1

Название и основное содержание предлагаемой вниманию читателя статьи относится к устьицам. Если представить себе, несколько приукрасив, открытые устьица на листе, то их можно уподобить множеству маленьких улыбок (рис.1).

Сколько места занимают устьица на листе? Возьмем типичный пример – лист кукурузы. На одном квадратном сантиметре его поверхности расположено около 10000 устьиц, площадь одного устьичного отверстия порядка  $100 \text{ мкм}^2$ . Первая из этих цифр позволяет определить характерное расстояние от одного устьица до другого: оно составляет примерно 100 микрон, а вторая дает типичный геометрический размер устьица: приблизительно 10 микрон. В результате получается, что доля поверхности листа, занятая открытыми устьицами, составляет около 1%.

По плотности расположения устьиц на листе есть, естественно, свои лидеры и аутсайдеры. Среди лидеров – огурец с 60000 устьиц на квадратный сантиметр, у травянистых растений плотность равна  $10000\text{--}30000 \text{ уст./см}^2$ , у древесных это  $15000\text{--}30000 \text{ уст./см}^2$ , а у некоторых злаков – только  $8000 \text{ уст./см}^2$ . Однако при таком большом разбросе абсолютных величин плотности устьиц доля занимаемой ими площади на листе меняется очень слабо – в пределах все тех же 1–2%.

### Устьичные парадоксы

Сформулируем два парадоксальных, на первый взгляд, утверждения, относящихся к устьицам.

1) Несмотря на малую долю (~ 1%) площади листа, занимаемой устьицами, испарение через устьица происходит практически так же, как и со свободной поверхности.

2) Как утверждает в учебниках по ботанике и физиологии растений, скорость испарения с небольших поверхностей (типа устьиц) пропорциональна их линейному размеру (диаметру), в то время как при испарении с больших поверхностей скорость испарения пропорциональна площади этой поверхности, т.е. квадрату линейного размера.

Разбору этих парадоксов и посвящено основное содержание статьи. А анализ начнем с простейшего случая – испарения воды со свободной поверхности, скажем, блюдца или стакана. Оказывается, что даже в этом случае, казалось бы изученном вдоль и поперек, нас поджидают сюрпризы.

### К теории испарения воды из стакана

Под таким высоконаучным заголовком скрывается разбор решения задачи, в которой требуется оценить время испарения воды из стакана. Это типичный пример испарения со свободной поверхности. Примем, для определенности, начальное значение высоты воды в стакане равным  $h = 10$  см.

Такая задача была решена, например, в курсе «Фейнмановских лекций по физике» (см. том «Задачи и упражнения с ответами и решениями», задача 1.3). Однако первая странность ответа задачи такова: в издании 1969 года вычисленное время испарения составляет приблизительно 7 дней, а в исправленном издании 2004 года – уже 14 дней. Допустим, что кто-то проверил приведенные там выкладки и в новом издании исправил их. Запомним это и пойдем чуть дальше – поставим стакан с водой и подождем, когда вода испарится. У автора статьи, оставившего стакан в рабочем помещении, вода испарилась за ... месяц! Правда, в проведенном эксперименте условия несколько отличались от принятых у Фейнмана, а именно:

- температура воздуха в комнате была  $18-20$  °С, у Фейнмана она составляла  $25$  °С;
- относительная влажность воздуха в комнате была 70%, у Фейнмана она принималась за 50%;
- стакан у Фейнмана располагался у открытого окна, а условиям проведенного нами эксперимента соответствовала комната с закрытой форточкой.

Как сопоставить теоретическое значение 7–14 дней с экспериментальным значением 30 дней? Понятно, что в издании 2004 года была исправлена ошибка предыдущего издания, где была утеряна двойка, но отличие между 14 и 30 днями все еще слишком велико. Проверим влияние различий в исходных данных – температуры, влажности и характера испарения (открытое окно – замкнутое пространство). Мы сознательно не будем полностью воспроизводить выкладки, приведенные в курсе «Фейнмановских лекций», поскольку интересующиеся могут ознакомиться по оригиналу, а сосредоточимся лишь на важных для нас особенностях.

**Влияние температуры.** Концентрация насыщенного водяного пара довольно сильно растет с ростом температуры окружающего воздуха. Воспользуемся справочными данными

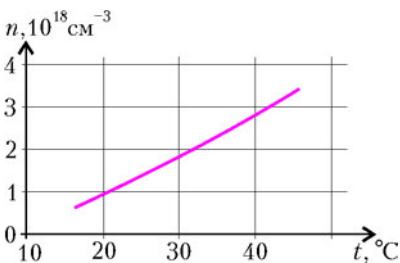


Рис. 2

для плотности  $n$  насыщенного водяного пара в зависимости от температуры  $t$ , которые приведены на рисунке 2. Из этой зависимости следует, что разница температур в эксперименте ( $18$  °С) и в теории ( $25$  °С) могла бы объяснить около 40% отличия во времени испарения (так как скорость испарения пропорциональна концентрации  $n$  водяного пара, то время испарения пропорционально  $n^{-1}$ , значит, меньшей температуре должно соответствовать большее значение времени испарения).

Однако указанный «резерв» остался фактически неиспользованным, поскольку Фейнман оценил концентрацию насыщенного водяного пара значением  $1 \cdot 10^{18}$  см $^{-3}$  при  $t =$

$= 25$  °С, а не более точной величиной  $1,4 \cdot 10^{18}$  см $^{-3}$  при той же температуре (см. рис. 2). Взятое же Фейнманом значение  $n$  фактически соответствует температуре нашего эксперимента.

**Влияние влажности.** При 100-процентной относительной влажности воздуха все испарившиеся молекулы возвращаются обратно. Стакан в этом случае как будто закрыт крышкой, и вода из него вообще не испаряется.

Зависимость времени испарения от относительной влажности  $\varphi$  очень проста:  $t_{\text{исп}} \sim \frac{1}{1-\varphi}$ . Таким образом, если влажность воздуха в помещении составляет 70–80% ( $\varphi = 0,7 - 0,8$ ) вместо 50% ( $\varphi = 0,5$ ) у Фейнмана, то время испарения вырастает в 1,67–2,5 раза.

**Влияние замкнутого помещения.** В замкнутом помещении по мере испарения воды из стакана влажность воздуха должна увеличиваться. Для оценки эффекта примем (по максимуму), что из стакана испарились все 200 мл воды, а объем помещения равен  $50$  м $^3$ . Тогда внесенная испарением плотность водяного пара составит  $200 \text{ г}/50 \text{ м}^3 = 4 \text{ г}/\text{м}^3$ . Поскольку при температуре  $t = 18$  °С плотность водяного пара равна  $16 \text{ г}/\text{м}^3$ , то учет этого эффекта может дать до 25% увеличения времени испарения. Однако периодическое открывание и закрывание дверей в помещении во время работы существенно ослабляет эффект.

В итоге мы получили, что различие в относительной влажности воздуха и эффект замкнутого помещения могут объяснить разницу во времени испарения: Фейнман – 2 недели, наш эксперимент – 1 месяц.

### Зависимость времени испарения от основных параметров задачи

Приведенная в задаче 1.3 из курса «Фейнмановских лекций» (издание 2004 г.) зависимость для времени испарения имеет следующий вид:

$$t_{\text{исп}} = \frac{2n_{\text{в}}h}{n\lambda v}. \quad (1)$$

Здесь  $h = 10$  см – начальное значение высоты воды в стакане,  $\lambda \approx 3 \cdot 10^{-5}$  см – длина свободного пробега молекул воды в воздухе,  $v \approx 600$  м/с (при  $25$  °С) – скорость испарившихся молекул воды,  $n_{\text{в}} \approx 3 \cdot 10^{22}$  см $^{-3}$  и  $n \approx 1 \cdot 10^{18}$  см $^{-3}$  – концентрации молекул воды и пара соответственно. Кроме того, в формуле учтено, что относительная влажность воздуха составляет 50%.

Однако прямое использование формулы (1) не для конкретного примера стакана воды, а для случая испарения с больших или меньших поверхностей оказывается невозможным и нуждается в корректировке. Дело в том, что *формально* размерности правой и левой частей соотношения (1) различны: слева – размерность времени (с), справа – размерность обратной скорости (с/м). Действительно, проследив за выкладками Фейнмана можно заметить, что размерность длины в ходе вывода была утрачена. Фейнманом принято, что на расстоянии 1 см от поверхности воды в стакане плотность пара снижается вдвое, а затем этот сантиметр был «замылен» и выпал из окончательного результата.

Введем в формулу (1) несколько изменений:

- вместо произведения  $\lambda v$  будем использовать коэффициент диффузии водяного пара  $D = \lambda v/3$ ;
- восстановим зависимость от относительной влажности воздуха  $\varphi$ ;
- учтем явно толщину  $l$  слоя половинного ослабления концентрации водяного пара.



Тогда более корректное выражение для времени испарения с точностью до множителя порядка единицы примет вид

$$t_{\text{исп}} = \frac{hl}{2D} \frac{n_{\text{в}}}{n(1-\varphi)}. \quad (2)$$

При значении параметров, принятых в задаче Фейнмана:  $h = 10$  см,  $l = 1$  см,  $n_{\text{в}} = 3 \cdot 10^{22}$  см<sup>-3</sup>,  $n = 1 \cdot 10^{18}$  см<sup>-3</sup>,  $\varphi = 0,5$ , и табличной величине коэффициента диффузии водяного пара  $D = 0,22$  см<sup>2</sup>/с формула (2) дает ответ, совпадающий с результатом Фейнмана:  $t_{\text{исп}} \approx 1,36 \cdot 10^6$  с  $\approx 15$  суток.

Восстановленная таким образом явная зависимость решения от толщины слоя половинного ослабления  $l$  оказывается очень важной для дальнейшего использования формулы (2). Так, в случае озера километрового размера величина  $l$  в безветренную погоду может составить уже метры, а при испарении через маленькое устье на листе  $l$  должно быть существенно меньше сантиметра. Получается, из общих соображений, что величина  $l$  должна снижаться по мере уменьшения размеров области испарения. Ответ становится зависящим от поперечных размеров испаряемой области («зеркала» испарения), а не только от продольного размера (глубины испаряемой области, как в формуле (1)).

Эти качественные рассуждения подтверждаются *точным* решением известной задачи об испарении капли воды начального радиуса  $a$  (которое приведено, например, в одном из лучших вузовских учебников по физике – книге Д.В. Сивухина «Общий курс физики», т.2, задача 3 к параграфу 118). Ответ к задаче имеет вид

$$t_{\text{исп}} = \frac{a^2}{2D} \frac{n_{\text{в}}}{n(1-\varphi)}$$

и переходит в решение (2) при замене  $h$  и  $l$  на единственный геометрический параметр капли – ее радиус  $a$ . Таким образом, для сферической капли как ее «глубина»  $h$ , так и толщина слоя половинного ослабления концентрации водяного пара  $l$  оказываются масштаба размера капли, т.е.  $h \approx l \approx a$ . Такая капля с начальным радиусом 1 мм в воздухе с относительной влажностью  $\varphi = 40\%$  при температуре  $t = 20$  °С испаряется примерно за 40 минут.

### Скорость испарения и задача Стефана

Скорость испарения  $\Gamma$  можно выразить через испаряемой объем  $V$  и время испарения  $t_{\text{исп}}$ :

$$\Gamma = \frac{V}{t_{\text{исп}}}$$

Для геометрии стакана воды высотой  $h$  и площадью открытой поверхности испарения  $S$  (тогда  $V = Sh$ ) получим

$$\Gamma \approx \frac{2SD}{l} \frac{n(1-\varphi)}{n_{\text{в}}}$$

Отсюда следует, что если толщина слоя половинного ослабления пропорциональна размерам области испарения (т.е.  $l \sim a$  и  $S \sim a^2$ ), то скорость испарения будет расти с размерами не квадратично ( $\sim S$ ), а только линейно.

Задача об испарении воды с *небольшой* поверхности круглой площади в спокойную атмосферу была решена Стефаном в 1881 году. Полученное им выражение, называемое законом Стефана, имеет вид

$$\Gamma \approx 4aD \frac{n(1-\varphi)}{n_{\text{в}}},$$

где  $a$  – радиус поверхности.

Сопоставление двух последних выражений показывает, что при  $l \sim a$  и  $S = \pi a^2$  они практически совпадают и отличаются лишь множителем, близким к единице.

В учебниках по ботанике и физиологии растений закон Стефана (испарение с небольших поверхностей) с его *линейной* зависимостью от размеров испаряемой области ( $\Gamma \sim a$ ) неявно противопоставляется случаю испарения с относительно больших поверхностей с якобы квадратичной ( $\Gamma \sim S$ ) зависимостью от поперечных размеров области испарения. Однако явный учет величины  $l$  и ее зависимости от размеров зоны испарения ставит все на свои места: и в случае закона Стефана, и при испарении капли и при испарении воды из стакана в подходе Фейнмана речь идет просто об использовании общего выражения (2) для разных частных случаев.

### А что же с устьицами?

Для случая открытых устьиц глубина испаряемой области и поперечный размер зоны испарения одного масштаба, поэтому скорость испарения пропорциональна линейному размеру устьиц  $a$ . Сравним скорость испарения  $\Gamma_{\text{л}}$  водяного пара со свободной поверхности листа площадью  $S_{\text{л}}$  и скорость испарения от  $N$  устьиц с площадью каждого  $S_{\text{у}}$ . Для первого случая имеем

$$\Gamma_{\text{л}} \approx \frac{2S_{\text{л}}D}{l_{\text{л}}} \frac{n(1-\varphi)}{n_{\text{в}}},$$

для второго –

$$\Sigma \Gamma_{\text{у}} \approx \frac{2NS_{\text{у}}D}{l_{\text{у}}} \frac{n(1-\varphi)}{n_{\text{в}}},$$

где  $l_{\text{л}}$  и  $l_{\text{у}}$  – значения толщины слоя половинного ослабления для листа как целого и для устьиц.

Отношение скоростей испарения через устьица и с открытой поверхности листа можно привести к виду

$$\frac{\Sigma \Gamma_{\text{у}}}{\Gamma_{\text{л}}} = \frac{NS_{\text{у}}}{S_{\text{л}}} \frac{l_{\text{л}}}{l_{\text{у}}}$$

Как уже говорилось в начале статьи, относительная суммарная площадь устьиц на листе составляет  $NS_{\text{у}}/S_{\text{л}} \sim 1\%$ . Площадь листа (типичная) масштаба площади водной поверхности обычного стакана, поэтому для листа можно положить, как это сделал Фейнман для стакана воды,  $l_{\text{л}} \approx 1$  см. А для устьиц на листе в качестве характерного значения толщины слоя половинного ослабления следует брать характерное расстояние между устьицами, т.е.  $l_{\text{у}} \sim 100$  мкм =  $10^{-2}$  см. В результате получим

$$\frac{\Sigma \Gamma_{\text{у}}}{\Gamma_{\text{л}}} \approx 0,01 \frac{1}{0,01} \approx 1,$$

т.е. действительно, несмотря на то что суммарная площадь устьиц составляет всего 1%, их испаряющая способность оказывается близкой к случаю испарения с открытой поверхности (а больше она и быть не может!).

Устьица изобразили улыбку (см. рис.1), приоткрыв свою тайну огромной испаряющей способности. Этой улыбкой мы и закончим статью.

# Заряженные частицы в магнитном поле

**В.МОЖАЕВ**

**В**ЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ДВИЖУЩУЮСЯ в электромагнитном поле заряженную частицу, было получено Х.Лоренцем. В векторной форме это выражение имеет вид

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}],$$

где  $q$  – заряд частицы,  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля,  $\vec{B}$  – магнитная индукция,  $\vec{v}$  – скорость частицы относительно той системы координат, в которой измеряются величины  $\vec{F}$ ,  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .

Первый член в правой части этой формулы – это сила, действующая на заряженную частицу в электрическом поле, а второй – в магнитном. Выражение для магнитной части силы Лоренца записано в виде векторного произведения:  $[\vec{v}\vec{B}]$  – это вектор, который перпендикулярен векторам  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ , а его абсолютная величина равна

$$|[\vec{v}\vec{B}]| = vB \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

Так как сила, действующая со стороны магнитного поля на частицу, перпендикулярна  $\vec{v}$ , то она не совершает работы, а только искривляет траекторию движения частицы, не изменяя ее энергии. Это свойство магнитной составляющей силы Лоренца широко используется в различных приборах и устройствах: например, в ускорителях для удержания заряженных частиц на заданной орбите, в камере Вильсона для наблюдения следов (треков) заряженных частиц, в масс-спектрометрах для разделения ионизованных молекул и атомов по их массам, в магнитных линзах для фокусировки пучков заряженных частиц, в магнитных ловушках, которые способны длительное время удерживать заряженные частицы внутри определенного объема пространства.

А теперь – несколько конкретных задач.

**Задача 1.** Электрон влетает в постоянное однородное магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$  (рис.1) и в точке А имеет скорость  $\vec{v}$ , образующую с направлением поля угол  $\alpha$ .

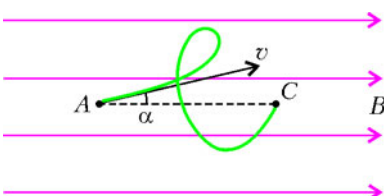


Рис. 1

Описав один виток винтовой линии, электрон оказывается в точке С. Чему равно расстояние АС?

Движение электрона по винтовой линии можно рассматривать как суперпозицию (сумму) двух движе-

ний: вдоль оси, совпадающей с направлением вектора  $\vec{B}$ , и в плоскости, перпендикулярной этому направлению. В нашем случае вектор скорости  $\vec{v}$  лежит в плоскости рисунка, поэтому проекция скорости электрона вдоль горизонтальной оси  $x$  равна  $v_x = v \cos \alpha$ , а в плоскости, перпендикулярной оси  $x$ , составляет  $v_{\perp} = v \sin \alpha$ . Очевидно, что вдоль горизонтальной оси электрон будет двигаться прямолинейно и равномерно со скоростью  $v_x$ , а в перпендикулярной плоскости – по окружности с линейной (окружной) скоростью  $v_{\perp}$ .

Уравнение движения электрона по окружности имеет вид

$$\frac{mv_{\perp}^2}{R} = ev_{\perp}B,$$

где  $m$  и  $e$  – масса и заряд электрона, а  $R$  – радиус окружности. Время, через которое электрон окажется в точке С, равно периоду обращения электрона:

$$\tau = T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{eB}.$$

За это время электрон сместится по горизонтали на искомое расстояние АС (шаг винтовой линии):

$$AC = v_x T = \frac{2\pi v_x}{eB} = \frac{2\pi v \cos \alpha}{eB},$$

где  $\frac{e}{m}$  – удельный заряд электрона.

Сделаем несколько замечаний.

1) Из уравнения движения электрона по окружности следует, что радиус круговой орбиты частиц с удельным зарядом  $\frac{q}{m}$  в однородном магнитном поле  $\vec{B}$  равен

$$R = \frac{v_{\perp}}{\frac{q}{m} B}.$$

При постоянных значениях  $\frac{q}{m}$  и  $v_{\perp}$  радиус кривизны траектории заряженной частицы обратно пропорционален величине индукции магнитного поля. Для удержания заряженных частиц высоких энергий в ограниченном объеме используют специальную конфигурацию магнитного поля. Такие устройства называют магнитными ловушками.

2) Из выражения для периода обращения следует, что частота обращения заряженной частицы в постоянном магнитном поле  $\vec{B}$  в плоскости, перпендикулярной полю, пропорциональна удельному заряду частицы и индукции поля:

$$\nu_c = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \frac{q}{m} B.$$

В теории плазмы эту частоту называют циклотронной частотой. Например, для электронов земной ионосферы, находящейся в магнитном поле Земли,  $\nu_c = 1,4 \cdot 10^6$  Гц.

**Задача 2.** На плоский вакуумный диод, расстояние между анодом и катодом которого  $d = 2$  см, подается высокое напряжение (рис.2). Диод находится в однородном магнитном поле, индукция которого равна  $B = 0,1$  Тл и направлена перпендикулярно плоскости рисунка. Пренебрегая начальной скоростью вылетающих из катода электронов, определите, при каких напряжениях электроны будут попадать на анод.

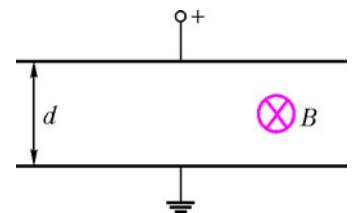


Рис. 2

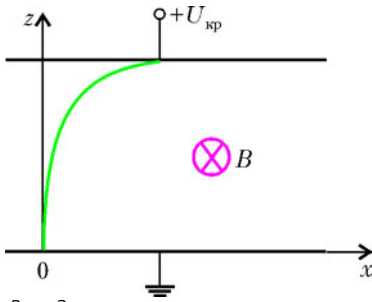


Рис. 3

Пусть электрон при  $t = 0$  находился у поверхности катода с координатами  $x = 0, z = 0$  и имел нулевую скорость (рис. 3). Уравнение движения электрона вдоль оси  $x$  для произвольного момента времени будет иметь вид

$$mv'_x = ev_z B.$$

Это уравнение можно записать в другом виде:

$$dv_x = \frac{e}{m} B dz,$$

где  $\frac{e}{m}$  – удельный заряд электрона.

Рассмотрим случай, когда траектория электрона касается поверхности анода (см. рис.3). Пусть это происходит при разности потенциалов между катодом и анодом  $U_{кр}$ . Запишем решение уравнения движения для момента времени, когда электрон находится в своей наивысшей точке и имеет только горизонтальную составляющую скорости  $v_{xкр}$ :

$$v_{xкр} = \frac{e}{m} B d.$$

С другой стороны, закон сохранения энергии позволяет записать такое равенство:

$$\frac{mv_{xкр}^2}{2} - eU_{кр} = 0.$$

Из совместного решения двух последних уравнений находим напряжение, при котором электрон касается анода:

$$U_{кр} = \frac{e}{m} B^2 d^2 = 3,5 \cdot 10^5 \text{ В}.$$

При напряжениях  $U \geq 3,5 \cdot 10^5$  В электроны будут попадать на анод.

**Задача 3.** Длинная медная незаряженная пластинка движется равномерно со скоростью  $v = 6,0$  м/с в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,2$  Тл. Векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$

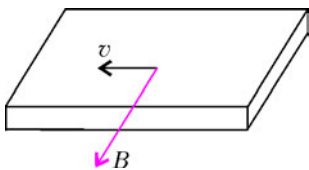


Рис. 4

взаимно перпендикулярны и параллельны плоскости пластинки (рис.4). Определите поверхностную плотность электрических зарядов, возникающих на плоскостях пластинки при ее движении.

В медной пластинке содержится большое количество свободных электронов, их концентрация равна  $n \approx 10^{23}$  см<sup>-3</sup>. Эти электроны не принадлежат атомам, а образуют электронный газ, «разогретый» до температуры  $T \approx 5 \cdot 10^4$  К. При движении пластинки помимо хаотического движения электроны приобретают упорядоченную скорость, равную скорости пластинки  $\vec{v}$ . Если мы обозначим скорость «теплого» движения одного из электронов, назовем его  $i$ -м, через  $\vec{v}_i$ , то его полная скорость будет равна

$$\vec{v}_i = \vec{v} + \vec{v}_i.$$

В магнитном поле на такой электрон будет действовать сила Лоренца, равная

$$F_i = evB + ev_i B \sin \alpha_i.$$

Если мы усредним по большому количеству  $N$  электронов, то

среднее значение синуса будет равно нулю:

$$\langle \sin \alpha \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin \alpha_i = 0.$$

Любому электрону, летящему под каким-то углом, найдется электрон, летящий в противоположную сторону, поэтому мы можем забыть о хаотическом движении электрона.

Как только пластинка приходит в движение, сила Лоренца начинает отклонять электроны к нижней поверхности пластинки. В результате на нижней поверхности накапливается отрицательный поверхностный заряд, а на верхней – положительный (рис.5). Между поверхностями пластинки возникает электрическое поле  $\vec{E}$ , подобное полю плоского конденсатора. Как только сила, действующая на электрон со стороны электрического поля, уравновесит силу Лоренца, перераспределение заряда прекратится и в проводнике установится стационарное электрическое поле с напряженностью

$$E_{ст} = vB.$$

Величина этого поля связана с поверхностной плотностью зарядов на плоскостях пластинки  $\sigma$  простым соотношением:

$$E_{ст} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Отсюда получаем

$$\sigma = \epsilon_0 E_{ст} = \epsilon_0 vB = 10,6 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/м}^2.$$

Интересно, что на  $1 \text{ см}^2$  поверхности находится  $\frac{\sigma}{10^4 e} \approx 6600$  электронов.

**Задача 4.** В одном из проектов получения электроэнергии предлагается использовать морские течения и магнитное поле Земли. Для этого в море погружают две горизонтальные металлические пластины, расположенные одна над другой на расстоянии  $l = 100$  м; площадь каждой пластины  $S = 1 \text{ км}^2$ . Морская вода, удельное сопротивление которой  $\rho = 0,25$  Ом·м, протекает между пластинами с запада на восток со скоростью  $v = 1$  м/с. Магнитное поле Земли в данном месте однородно и направлено с юга на север, индукция поля равна  $B = 10^{-5}$  Тл. Определите максимальную электрическую мощность, которая может выделиться на нагрузке, подсоединенной к пластинам.

Принцип действия такой установки можно понять из рисунка 6. Морская вода, конечно же, содержит какое-то количество положительных и отрицательных ионов.

Когда эти ионы пересекают линии магнитного поля, на них действует сила Лоренца: положительные ионы отклоняются к верхней пластине, а отрицательные – к нижней. Между пластинами возникает разность потенциалов, которая и приводит к появлению тока во внешней цепи.

Электрическая схема нашей установки эквивалентна цепи, изображенной на рисунке 7.

Мы знаем, что ЭДС источника – это напряжение на его

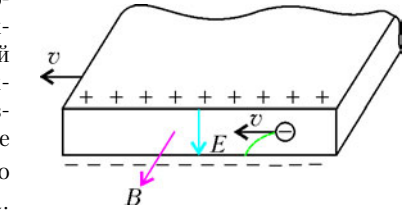


Рис. 5

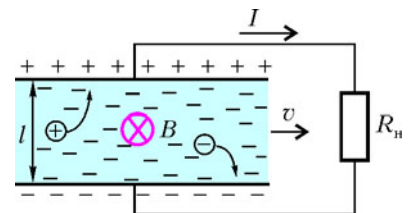


Рис. 6

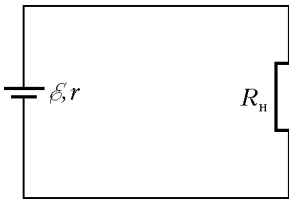


Рис. 7

концах при разомкнутой цепи. Воспользовавшись результатом решения задачи 3, мы можем утверждать, что установившаяся напряженность электрического поля между пластинами равна

$$E_{\text{уст}} = vB.$$

А, следовательно, ЭДС нашего источника есть

$$\mathcal{E} = vBl.$$

Очевидно, что внутреннее сопротивление  $r$  источника равно сопротивлению морской воды в объеме прямоугольника длиной  $l$  с площадью поперечного (по отношению к току) сечения  $S$ :

$$r = \rho \frac{l}{S}.$$

Таким образом, ток в цепи будет равен

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_n + r} = \frac{vBl}{R_n + \rho l/S},$$

и на нагрузке выделится мощность

$$P = I^2 R_n = \frac{(vBl)^2 R_n}{(R_n + \rho l/S)^2}.$$

Остается исследовать это выражение на максимум по параметру  $R_n$ . Предоставим это читателю, а для контроля сообщим, что мощность будет максимальной при  $R_n = r = \rho l/S$  и составит

$$P_{\text{max}} = \frac{(vBl)^2}{4\rho l/S} = 10^{-2} \text{ Вт}.$$

Мы получили чрезвычайно малую мощность, что, в первую очередь, обусловлено слабым магнитным полем Земли.

**Задача 5.** Протон со скоростью  $v_0 = 10^7$  м/с влетает в камеру Вильсона с индукцией магнитного поля  $B = 0,2$  Тл, направленной перпендикулярно плоскости орбиты протона (рис.8). На протон в камере Вильсона действует сила торможения, пропорциональная его скорости:  $\vec{F}_T = -\alpha \vec{v}$ , где  $\alpha = 7 \cdot 10^{-20}$  Н·с/м. На каком расстоянии от точки влета протон остановится?

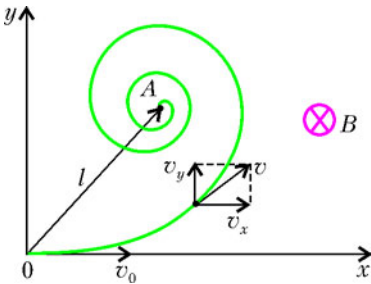


Рис. 8

Пусть в произвольный момент времени проекции скорости  $\vec{v}$  протона на оси  $x$  и  $y$  равны  $v_x$  и  $v_y$ . Тогда уравнения движения протона по этим осям будут иметь вид

$$mv'_x = -qv_y B - \alpha v_x,$$

$$mv'_y = qv_x B - \alpha v_y,$$

где  $m = 1,7 \cdot 10^{-27}$  кг – масса протона, а  $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл – его заряд. Учитывая, что  $dy = v_y dt$  и  $dx = v_x dt$ , запишем эти уравнения через бесконечно малые приращения:

$$dv_x = -\omega_c dy - \frac{\alpha}{m} dx,$$

$$dv_y = \omega_c dx - \frac{\alpha}{m} dy,$$

где  $\omega_c = \frac{qB}{m}$  – это частота, с которой протон вращается в однородном магнитном поле  $\vec{B}$ , перпендикулярном скорости протона (циклотронная частота).

Перейдя к конечным приращениям  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $x$  и  $y$  от момента влета протона в камеру и до момента остановки, получим

$$-v_0 = -\omega_c y_A - \frac{\alpha}{m} x_A,$$

$$0 = \omega_c x_A - \frac{\alpha}{m} y_A,$$

где  $x_A$  и  $y_A$  – координаты точки остановки протона  $A$ . Из последних уравнений находим  $x_A$  и  $y_A$ :

$$x_A = \frac{(\alpha/m)v_0}{\omega_c^2 + (\alpha/m)^2}, \quad y_A = \frac{\omega_c v_0}{\omega_c^2 + (\alpha/m)^2}$$

и расстояние  $l$  от точки влета протона в камеру до точки остановки:

$$l = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \frac{v_0}{\sqrt{\omega_c^2 + (\alpha/m)^2}} = \frac{v_0 m}{\sqrt{q^2 B^2 + \alpha^2}} = 21,7 \text{ см}.$$

**Задача 6.** В однородном магнитном поле электрон вращается по круговой орбите в плоскости, перпендикулярной линиям индукции поля. Индукцию поля медленно (за время, во много раз превышающее период обращения электрона) увеличивают в три раза. Во сколько раз изменится при этом радиус орбиты электрона?

Рассмотрим изменение величины индукции магнитного поля  $\Delta B$  за малое время  $\Delta t$ . Пусть радиус орбиты электрона в момент  $t$  равен  $R$ . Изменяющееся магнитное поле приводит к появлению вихревого электрического поля:

$$\pi R^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} = E_{\text{вихр}} \cdot 2\pi R,$$

откуда

$$E_{\text{вихр}} = \frac{R \Delta B}{2 \Delta t}.$$

На электрон со стороны этого поля за время  $\Delta t$  подействует импульс силы, который приведет к изменению импульса электрона:

$$eE_{\text{вихр}} \Delta t = \frac{eR}{2} \Delta B = m \Delta v,$$

где  $e$  – заряд,  $m$  – масса, а  $\Delta v$  – приращение скорости электрона. Уравнение движения электрона по орбите радиусом  $R$  со скоростью  $v$  в магнитном поле с индукцией  $B$  имеет вид

$$\frac{mv^2}{R} = evB.$$

Перепишем это уравнение так:

$$v = \frac{e}{m} RB.$$

Продифференцируем его по трем переменным  $v$ ,  $R$  и  $B$ :

$$\Delta v = \frac{e}{m} R \Delta B + \frac{e}{m} B \Delta R.$$

Подставим это выражение в уравнение изменения импульса электрона:

$$e \frac{R}{2} \Delta B = eR \Delta B + eB \Delta R,$$

или

$$-\frac{1}{2} \frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta R}{R}.$$

После интегрирования получим

$$R\sqrt{B} = \text{const}.$$

Следовательно, радиус новой орбиты уменьшится в  $\sqrt{3}$  раз.

**Упражнения**

1. С помощью камеры Вильсона, помещенной в магнитное поле с индукцией  $\bar{B}$ , наблюдают упругое рассеяние  $\alpha$ -частиц на ядрах дейтерия. Определите начальную энергию  $\alpha$ -частицы, если радиус кривизны начальных участков траекторий ядра и  $\alpha$ -частицы после рассеяния оказался равным  $R$ . Обе траектории лежат в плоскости, перпендикулярной индукции магнитного поля.

2. Частица массой  $m$  с положительным зарядом  $q$  находится в однородных электрическом и магнитном полях. Напряженность электрического поля равна  $E$  и параллельна линиям индукции магнитного поля (рис.9). В начальный момент частице сообщают скорость  $v_0$ , направленную под углом  $\alpha$  к линиям индукции. Через некоторое время частица возвращается в начальную точку. Чему равно это время? Определите также

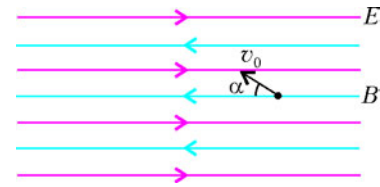


Рис. 9

значения индукции магнитного поля, при которых происходит возвращение частицы в начальную точку.

3. В однородное магнитное поле с индукцией  $\bar{B}$  помещена тонкая металлическая лента шириной  $d$  и толщиной  $a$  так, что плоскость ленты перпендикулярна линиям индукции (рис.10).

По ленте пропускают ток  $I$ . Найдите разность потенциалов, возникающую между боковыми поверхностями ленты (т.е. на расстоянии  $d$ ), если концентрация свободных электронов в металле ленты равна  $n$ .

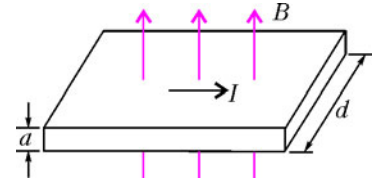


Рис. 10

# Метод замены множителей

**В.ГОЛУБЕВ**

**Основная идея метода**

Метод интервалов для решения неравенств подробно рассматривается в школьных учебниках и пособиях для поступающих и, как правило, легко усваивается. Поэтому естественным можно признать желание свести решение того или иного неравенства повышенной сложности к решению рациональных неравенств. Оказывается, достаточно широкий класс неравенств подобную попытку допускает.

Любое неравенство приводимо к виду

$$\frac{u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n}{v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_k} \succ 0, \tag{1}$$

где символ « $\succ$ » обозначает один из четырех возможных знаков неравенства:  $<$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ ,  $>$ . Согласитесь, что при решении неравенства (1) нас интересует только знак любого множителя в числителе или знаменателе, а не абсолютная его величина. Поэтому, если по каким-либо причинам нам неудобно работать с данным множителем, мы можем заменить его на другой знаковоспадающий с ним множитель в области определения неравенства (и имеющий в этой области те же корни). Этот бесхитростный факт и определяет основную идею метода замены множителей.

Важно обратить внимание читателя, что замена множителя осуществляется только (!) при условии приведения неравен-

ства к виду (1), т.е. когда требуется сравнить произведение с нулем.

**Монотонность – ключ к замене множителя**

Основная часть замен обусловлена двумя следующими равносильными утверждениями.

**Утверждение 1.** Функция  $f(x)$  есть строго (!) возрастающая тогда и только тогда, когда для любых двух значений  $t_1$  и  $t_2$  из области определения функции разность  $(t_1 - t_2)$  совпадает по знаку с разностью  $(f(t_1) - f(t_2))$ , т.е.

$$f \nearrow \Leftrightarrow \left( t_1 - t_2 \overset{\text{одн}}{\Leftrightarrow} f(t_1) - f(t_2) \right),$$

где символ « $\Leftrightarrow$ » означает знаковоспадение .

**Утверждение 2.** Функция  $f(x)$  есть строго (!) убывающая тогда и только тогда, когда для любых двух значений  $t_1$  и  $t_2$  из области определения функции разность  $(t_1 - t_2)$  совпадает по знаку с разностью  $(f(t_2) - f(t_1))$ , т.е.

$$f \searrow \Leftrightarrow \left( t_1 - t_2 \overset{\text{одн}}{\Leftrightarrow} f(t_2) - f(t_1) \right).$$

Обоснование этих утверждений непосредственно вытекает из определения строгой монотонной функции. Равносильность утверждений 1 и 2 следует из того факта, что если  $y = f(x)$  есть монотонно возрастающая функция, то  $y = -f(x)$  есть монотонно убывающая функция.

*Комментарий.* Из утверждений 1 и 2 вытекают все возможные замены множителей, за исключением знаковостоянных. Поэтому, если нет желания трогать знак неравенства, всюду положительные множители просто убираем, а всюду отрицательные заменяем на  $(-1)$ . Популярный знаковостоянный множитель – квадратный трехчлен  $ax^2 + bx + c$  с отрицательным дискриминантом – удобно заменять на старший коэффициент или на свободный член, т.е.

$$ax^2 + bx + c \Leftrightarrow a \Leftrightarrow c \quad (\text{при } D < 0). \tag{2}$$

**Функция  $y = t^n$  и определяемые ею замены**

Поскольку функция  $y = t^n$  при  $n > 0$  является строго возрастающей на множестве неотрицательных чисел (а при нечетном натуральном  $n$  – на всей числовой оси), то в силу утверждения 1 справедливы такие замены:

$$t_1 - t_2 \leftrightarrow t_1^n - t_2^n \text{ при } n > 0, t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, \quad (3.1)$$

$$t_1 - t_2 \leftrightarrow t_1^{2k-1} - t_2^{2k-1} \text{ при } k \text{ натуральном.} \quad (3.2)$$

Практически задачи конкурсных экзаменов содержат корни только второй или третьей степени, при этом подавляющая часть содержит корни только второй степени, работа с которыми и вызывает у школьников основные трудности. Поэтому и мы основное внимание уделим квадратным корням, полагая, что этого достаточно для безошибочной ориентации в других случаях.

Функции  $y = t^2$  и  $y = \sqrt{t}$ , рассматриваемые на множестве неотрицательных чисел, являются взаимнообратными и строго возрастающими, т.е.

$$t_1 \vee t_2 \leftrightarrow t_1^2 \vee t_2^2 \leftrightarrow \sqrt{t_1} \vee \sqrt{t_2}.$$

Поэтому

$$t_1 - t_2 \leftrightarrow t_1^2 - t_2^2, \quad (3.3)$$

$$\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} \leftrightarrow t_1 - t_2, \text{ где } t_1, t_2 \geq 0. \quad (3.4)$$

Так как  $|m| \geq 0$  и  $|m|^2 = m^2$  для любого  $m$ , то из (3.3) получаем, что

$$|t_1| - |t_2| \leftrightarrow |t_1|^2 - |t_2|^2 \leftrightarrow t_1^2 - t_2^2. \quad (3.5)$$

**Пример 1. Решите неравенство**

$$\frac{(|x-2|-4-x^2)(|x+4|-\sqrt{x^2-x-2})}{(|1-x|-4)(|3+x|-|x-5|)} > 0.$$

**Решение** (подробное). Исходное неравенство представимо в виде

$$\frac{u_1 \cdot u_2}{v_1 \cdot v_2} > 0.$$

Все множители  $u_1, u_2, v_1$  и  $v_2$  имеют вид  $t_1 - t_2$ , где  $t_1 \geq 0$  и  $t_2 \geq 0$ , поэтому в силу (3.3) мы эти множители заменяем на знакосовпадающие с ними множители  $t_1^2 - t_2^2$ :

$$\frac{(|x-2|^2 - (4+x^2)^2)(|x+4|^2 - (\sqrt{x^2-x-2})^2)}{((1-x)^2 - 4^2)(|3+x|^2 - |x-5|^2)} > 0.$$

Так как  $|m|^2 = m^2$  и  $(\sqrt{x^2-x-2})^2 = x^2-x-2$ , то с учетом неотрицательности подкоренного выражения  $x^2-x-2$  получаем

$$\left\{ \frac{((x-2)^2 - (4+x^2)^2)((x+4)^2 - (x^2-x-2))}{((1-x)^2 - 4^2)((3+x)^2 - (x-5)^2)} > 0, \Leftrightarrow \right. \\ \left. x^2 - x - 2 \geq 0 \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \frac{(x-2-(4+x^2))(x-2+(4+x^2))(9x+18)}{(1-x-4)(1-x+4)(3+x-(x-5))(3+x+x-5)} > 0, \Leftrightarrow \right. \\ \left. x \leq -1 \text{ или } x \geq 2 \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \frac{9(-x^2+x-6)(x^2+x+2)(x+2)}{16(-x-3)(5-x)(x-1)} > 0, \Leftrightarrow \right. \\ \left. x \leq -1 \text{ или } x \geq 2 \right.$$

(далее знакопостоянные ( $D < 0$ ) квадратные трехчлены  $(-x^2+x-6)$  и  $(x^2+x+2)$  согласно (2) заменяем на  $(-1)$  и (1) соответственно, остальные упрощения очевидны)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(-1)(1)(x+2)}{(x+3)(x-5)(x-1)} > 0, \\ x \leq -1 \text{ или } x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+2)}{(x+3)(x-5)(x-1)} < 0, \\ x \leq -1 \text{ или } x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < -2, \text{ л. } 1 < x < 5, \\ x \leq -1, \text{ л. } x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x < 2, \\ 2 \leq x < 5. \end{cases}$$

**Ответ:**  $-3 < x < -2$ ;  $2 \leq x < 5$ .

Обратим внимание на две любопытные замены:

$$\sqrt{t} \overset{\text{одз}}{\leftrightarrow} t, \quad (3.6)$$

$$\sqrt{f} + \sqrt{g} \overset{\text{одз}}{\leftrightarrow} f + g. \quad (3.7)$$

Замена (3.6) очень удобна там, где приходится отслеживать область допустимых значений. Замена (3.7) суммы  $\sqrt{f} + \sqrt{g}$  при возможном одновременном равенстве нулю подкоренных выражений на сумму  $f + g$  позволяет учитывать эту возможность.

**Пример 2. Решите неравенство**

$$(x^2+x-6)\sqrt{x^2-2x-3} \geq 0.$$

**Решение.** Данное неравенство преобразуем следующим образом:

$$(x^2+x-6)\sqrt{x^2-2x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+x-6)(x^2-2x-3) \geq 0, \\ x^2-2x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} (x+3)(x-2)(x+1)(x-3) \geq 0, \\ x \leq -1 \text{ или } x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x = -1 \\ x \geq 3. \end{cases}$$

**Ответ:**  $(-\infty; -3] \cup \{-1\} \cup [3; +\infty)$ .

**Показательная и логарифмическая функции и вызываемые ими замены**

Показательная функция  $y = a^t$ , как известно, строго убывает при  $0 < a < 1$  и строго возрастает при  $a > 1$ . Поэтому, в частности, для  $a = 10$  получаем

$$10^{t_1} - 10^{t_2} \leftrightarrow t_1 - t_2.$$

Для произвольного основания  $a$ , пользуясь основным логарифмическим тождеством, можно увидеть, что

$$a^{t_1} - a^{t_2} = (10^{\lg a})^{t_1} - (10^{\lg a})^{t_2} = 10^{t_1 \lg a} - 10^{t_2 \lg a}.$$

Отсюда

$$a^{t_1} - a^{t_2} \leftrightarrow t_1 \cdot \lg a - t_2 \cdot \lg a,$$

т.е.

$$a^{t_1} - a^{t_2} \leftrightarrow (t_1 - t_2) \lg a. \quad (4)$$

Функция  $y = \lg x$  – строго возрастающая. Поэтому

$$x_1 - x_2 \overset{\text{одз}}{\leftrightarrow} \lg x_1 - \lg x_2.$$

Если  $x_1 = a$  и  $x_2 = 1$ , то получаем, что  $a - 1 \leftrightarrow \lg a - \lg 1$ , т.е.

$$\lg a \leftrightarrow a - 1. \quad (5)$$

Тогда соотношение (4) принимает вид

$$a^{t_1} - a^{t_2} \leftrightarrow (t_1 - t_2)(a - 1). \quad (5.1)$$

Таким образом, мы установили, что *разность степеней с одним и тем же основанием всегда по знаку совпадает с произведением разности показателей этих степеней на разность основания и единицы.*

Для логарифмической функции  $y = \log_a t$  аналогично устанавливаем, что

$$\log_a t_1 - \log_a t_2 = \frac{\lg t_1}{\lg a} - \frac{\lg t_2}{\lg a} = \frac{1}{\lg a} (\lg t_1 - \lg t_2).$$

Отсюда следует, что

$$\log_a t_1 - \log_a t_2 \leftrightarrow \frac{\lg t_1 - \lg t_2}{\lg a} \leftrightarrow \frac{t_1 - t_2}{a - 1}.$$

Иными словами, *разность логарифмов по одному и тому же основанию всегда по знаку совпадает с отношением разности подлогарифмических выражений к разности основания и единицы:*

$$\log_a t_1 - \log_a t_2 \leftrightarrow \frac{t_1 - t_2}{a - 1}. \quad (5.2)$$

**Замечание.** Утверждения (5.1) и (5.2) равносильны, поскольку показательная и логарифмическая функции взаимнообратны.

Утверждения (5.1) и (5.2) позволяют исключительно эффективно решать очень многие неравенства, которые принято относить к разряду задач повышенной сложности. В частности, из этих утверждений легко получить следующие полезные схемы решения основных показательных и логарифмических неравенств:

$$1) a^f > a^g \Leftrightarrow \begin{cases} (f - g)(a - 1) > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} a^f > b, \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (f - \log_a b)(a - 1) > 0;$$

$$3) \log_a f > \log_a g \Leftrightarrow \begin{cases} (f - g)(a - 1) > 0, \\ f > 0, \\ g > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$4) \log_a f > b \Leftrightarrow \begin{cases} (f - a^b)(a - 1) > 0, \\ f > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$5) \log_a f + \log_a g > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (fg - 1)(a - 1) > 0, \\ f > 0, \\ g > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$6) \frac{a^{f_1} - a^{f_2}}{a^{g_1} - a^{g_2}} > 0 \Leftrightarrow \frac{f_1 - g_1}{f_2 - g_2} > 0$$

и так далее.

**Пример 3.** Решите неравенство

$$\frac{(8 - x^3)(2^x - 1)}{(|x|^{2x-1} - |x|^{5-x})} \times \frac{(\sqrt{x+20} - \sqrt{2x+30})(|x-2| - 4 - x^2)}{(\log_{x+20}(12 - |x|) - \log_{x+20}(20 - 2|x|)) \log_5^3 x^2} < 0.$$

**Решение** (подробное). Первый множитель в числителе  $(8 - x^3)$  имеет вид  $(t_1^{2k-1} - t_2^{2k-1})$  ( $k = 2$ ), который знаковоспадает с разностью  $(t_1 - t_2)$ . Поэтому  $(8 - x^3)$  заменяем на  $(2 - x)$ .

Множитель  $(2^x - 1)$  имеет вид  $a^{t_1} - a^{t_2}$ , где  $a = 2$ ,  $t_1 = x$ ,  $t_2 = 0$ , который знаковоспадает с  $(t_1 - t_2)(a - 1)$ . Поэтому множитель  $2^x - 1$  заменяем на  $x$ .

Множитель  $(\sqrt{x+20} - \sqrt{2x+30})$  имеет вид  $(\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2})$ , который знаковоспадает с  $(t_1 - t_2)$ . Поэтому его заменяем на  $((x+20) - (2x+30))$ .

Множитель  $(|x-2| - 4 - x^2)$  имеет вид  $(t_1 - t_2)$ , где  $t_1 \geq 0$  и  $t_2 = x^2 + 4 \geq 0$ . Поэтому  $(t_1 - t_2)$  знаковоспадает с  $t_1^2 - t_2^2$ . И так как  $|x-2|^2 = (x-2)^2$ , то указанный множитель заменяем на  $((x-2)^2 - (x^2+4)^2)$ .

В знаменателе первый множитель  $(|x|^{2x-1} - |x|^{5-x})$  имеет вид  $a^{t_1} - a^{t_2}$ , который знаковоспадает с  $(t_1 - t_2)(a - 1)$ . Поэтому этот множитель знаковоспадает с произведением  $((2x-1) - (5-x))(|x|-1)$ . И так как  $(|x|-1)$  знаковоспадает с  $(|x|^2 - 1) = x^2 - 1$ , то окончательно получаем, что первый множитель можно заменить на  $((2x-1) - (5-x))(x^2 - 1)$ .

Второй множитель в знаменателе имеет вид  $\log_a t_1 - \log_a t_2$ , который знаковоспадает с произведением  $(t_1 - t_2) \cdot (a - 1)$ . Поэтому сначала этот множитель заменяем на

$$((12 - |x|) - (20 - 2|x|))(x + 20 - 1) = (|x| - 8)(x + 19).$$

И так как  $|x| - 8$  знаковоспадает с  $x^2 - 8^2$ , то второй множитель в знаменателе заменяем на  $(x - 8)(x + 8)(x + 19)$ .

Последний множитель  $\log_5^3 x^2$  имеет вид  $a^3$ , который знаковоспадает с  $a$ . И так как  $a = \log_5 x^2$ , имея вид  $\log_5 t_1 - \log_5 t_2$  ( $t_1 = x^2$ ,  $t_2 = 1$ ), знаковоспадает с  $(x^2 - 1)$ , то последний множитель заменяем на  $(x^2 - 1)$ .

Окончательно после всех замен устанавливаем, что исходное неравенство в своей области определения равносильно неравенству

$$\frac{(2-x)x(-x-10)(x-2-(x^2+4))(x-2+x^2+4)}{(3x-6)(x-1)(x+1)(x-8)(x+8)(x+19)(x^2-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{(2-x)x(-x-10)(-x^2+x-6)(x^2+x+2)}{3(x-2)(x-1)^2(x+1)^2(x-8)(x+8)(x+19)} < 0. \quad (6)$$

Очевидно, что область определения левой части исходного неравенства задается системой

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ 20 - 2|x| > 0, \end{cases}$$

т.е. область одновременного существования всех множителей представляет собой два промежутка:  $-10 < x < 0$  и  $0 < x < 10$ . В этой области множители  $(-x-10)$  и  $(x+19)$  знакопостоянны, и их можно заменить на  $(-1)$  и  $(1)$  соответственно. Знакопостоянны в области определения и квадратные трехчлены  $(-x^2+x-6)$  и  $(x^2+x+2)$ . Поэтому, заменив их на  $(-1)$  и  $(1)$ , устанавливаем, что

$$(6) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(-1)(x-2)x(-1)(-1)}{3(x-2)(x-1)^2(x+1)^2(x-8)(x+8)} < 0, \\ -10 < x < 0 \text{ или } 0 < x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 < x < -1 \\ -1 < x < 0 \\ 8 < x < 10. \end{cases}$$

Ответ:  $(-8; -1) \cup (-1; 0) \cup (8; 10)$ .

**Демонстрация решений неравенств без обоснований**

$$1. (4x^2 + 2x + 1)^{x^2 - x} > 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x^2 - x)((4x^2 + 2x + 1) - 1) > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2(x - 1)(2x + 1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -0,5) \cup (1; +\infty).$$

$$2. (x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2 + x + 1)^3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x+5}{x+2} - 3\right)((x^2 + x + 1) - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(-2x-1)x(x+1)}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-2; -1] \cup [-0,5; 0].$$

$$3. 1 < 3^{|x^2 - x|} < 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 < |x^2 - x| < 2 \Leftrightarrow |x^2 - x|(|x^2 - x| - 2) < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x^2 - x)^2((x^2 - x) - 2)(x^2 - x + 2) < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2(x - 1)^2(x + 1)(x - 2) < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \in (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2).$$

$$4. \log_{x^2}(3 - 2x) > 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(3 - 2x) - x^2}{x^2 - 1} > 0, \\ 3 - 2x > 0, \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} > 0, \\ x < \frac{3}{2}, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -3 < x < -1.$$

$$5. \log_x \log_2(4^x - 12) \leq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (\log_2(4^x - 12) - x)(x - 1) \leq 0, \\ \log_2(4^x - 12) > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (4^x - 12 - 2^x)(x - 1) \leq 0, \\ 4^x - 12 - 1 > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (2^{2x} - 2^x - 12)(x - 1) \leq 0, \\ x > \log_4 13 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (2^x + 3)(2^x - 4)(x - 1) \leq 0, \\ x > \log_4 13 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (2^x - 2^2)(x - 1) \leq 0, \\ x > \log_4 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)(x - 1) \leq 0, \\ x > \log_4 13 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_4 13 < x \leq 2.$$

$$6. (2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2 \log_2 x - \log_2(x+6)} > 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2^x + 3 \frac{1}{2^x}\right)^{\log_2 \frac{x^2}{x+6}} > 1, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\log_2 \frac{x^2}{x+6}\right) \left(2^x + \frac{3}{2^x} - 1\right) > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - (x+6))(2^{2x} - 2^x + 3) > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+2) > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

**Базовая информация по методу замены множителей**

Итак, вкратце изложим основные результаты.

I. *Стандартный вид неравенств*, когда применяется метод замены множителей:

$$\frac{u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n}{v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_k} \vee 0,$$

где символ « $\vee$ » обозначает один из четырех возможных знаков неравенства:  $<$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ ,  $>$ .

II. *Основная идея метода замены множителей* состоит в замене любого множителя в числителе или знаменателе на знакосовпадающий с ним и имеющий одни и те же корни.

*Замечание:* преобразованное таким образом неравенство всегда равносильно исходному в области существования последнего.

*Предупреждение:* указанная замена возможна только тогда, когда неравенство приведено к стандартному виду.

III. *Две основные замены:*

$$(t_1 - t_2) \Leftrightarrow (f(t_1) - f(t_2)),$$

если  $f(t)$  — строго возрастающая функция;

$$(t_1 - t_2) \Leftrightarrow (f(t_2) - f(t_1)),$$

если  $f(t)$  — строго убывающая функция.

IV. *Наиболее часто встречающиеся замены* (без учета области допустимых значений):

$$1) |t| \Leftrightarrow t^2; \quad 2) |t_1| - |t_2| \Leftrightarrow t_1^2 - t_2^2;$$

$$3) at^2 + bt + c \Leftrightarrow a \text{ при } D = b^2 - 4ac < 0;$$

$$4) \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} \Leftrightarrow t_1 - t_2; \quad 5) \|t\| - \sqrt{t_2} \Leftrightarrow t_1^2 - t_2;$$

$$6) |t| - (at^2 + bt + c) \Leftrightarrow t^2 - (at^2 + bt + c)^2 \\ \text{при } D = b^2 - 4ac \leq 0;$$

$$7) a^{t_1} - a^{t_2} \Leftrightarrow (t_1 - t_2)(a - 1); \quad 8) a^t - 1 \Leftrightarrow t(a - 1);$$

$$9) f - g \Leftrightarrow f^2 - g^2 \text{ при } f \geq 0 \text{ и } g \geq 0;$$

$$10) \log_a f \Leftrightarrow (f - 1)(a - 1);$$

$$11) \log_a f - g \Leftrightarrow (f - a^g)(a - 1);$$

$$12) \log_a f - \log_a g \Leftrightarrow (f - g)(a - 1).$$



# LXIX Московская математическая олимпиада

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК

6 класс

1. Доктор Айболит раздал четырем заболевшим зверям 2006 чудодейственных таблеток. Носорог получил на одну больше, чем крокодил, бегемот – на одну больше, чем носорог, а слон – на одну больше, чем бегемот. Сколько таблеток придется съесть слону?

*А.Хачатурян*

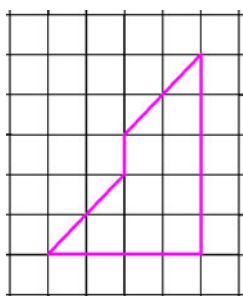


Рис. 1

2. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке 1, на две одинаковые (совпадающие при наложении) части.

*С.Маркелов*

3. Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живет в 10-м подъезде в квартире 333, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом девятиэтажный. На какой этаж ему следует подняться? (На каждом этаже число квартир одинаково, номера квартир в доме начинаются с единицы.)

*А.Ковальджи*

4. Таня стоит на берегу речки. У нее есть два глиняных кувшина: один – на 5 литров, а про второй Таня помнит лишь то, что он вмещает то ли 3, то ли 4 литра. Помогите Тане определить емкость второго кувшина. (Заглядывая в кувшин, нельзя понять, сколько в нем воды.)

*Т.Гейдер, А.Хачатурян*

5. Дед звал внука к себе в деревню: «Вот посмотришь, какой я необыкновенный сад посадил! У меня там растут четыре груши, а еще есть яблони, причем они посажены так, что на расстоянии 10 метров от каждой яблони растут ровно две груши». «Ну и что тут интересного, – ответил внук. – У тебя всего две яблони». «А вот и не угадал, – улыбнулся дед. – Яблонь у меня в саду больше, чем груш». Нарисуйте, как могли расти яблони и груши в саду у деда. Постарайтесь разместить на рисунке как можно больше яблонь, не нарушая условий. Если вы думаете, что разместили максимально возможное число яблонь, попробуйте объяснить, почему это так.

*А.Ковальджи, А.Хачатурян*

6. Пять футбольных команд провели турнир – каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 3 очка, за ничью – 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Четыре команды набрали 1, 2, 5 и 7 очков соответственно. А сколько очков набрала пятая команда?

*А.Заславский*

7 класс

1. Винни-Пух и Пятачок поделили между собой торт. Пятачок захныкал, что ему досталось мало. Тогда Пух отдал

ему треть своей доли. От этого у Пятачка количество торта увеличилось втрое. Какая часть торта была вначале у Пуха и какая у Пятачка?

*А.Ковальджи, И.Раскина*

2. Разрежьте пятиугольник, изображенный на рисунке 2, на две одинаковые (совпадающие при наложении) части.

*С.Маркелов*

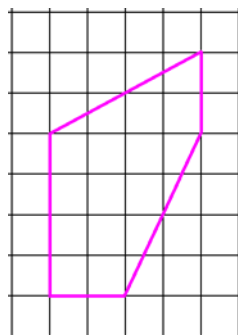


Рис. 2

							1
2	3	4	5	6	7	8	
9	10	11	12	13	14	15	
16	17	18	19	20	21	22	
23	24	25	26	27	28	29	
30	31						

Рис. 3

3. Наташа сделала из листа клетчатой бумаги календарь на январь 2006 года (рис.3) и заметила, что центры клеток 10, 20 и 30 января образуют равнобедренный прямоугольный треугольник. Наташа предположила, что это будет верно и в любом другом году, за исключением тех лет, когда центры клеток 10, 20 и 30 лежат на одной прямой. Права ли Наташа?

*Н.Нетрусова*

4. Год проведения нынешнего математического праздника делится на его номер:  $2006 : 17 = 118$ . Назовите:

а) первый номер математического праздника, для которого это было выполнено;

б) последний номер математического праздника, для которого это тоже будет выполнено.

*Фольклор*

5. Дед звал внука к себе в деревню: «Вот посмотришь, какой я необыкновенный сад посадил! У меня там растут груши и яблони, причем яблони посажены так, что на расстоянии 10 метров от каждой яблони растут ровно две груши». «Ну и что тут интересного, – ответил внук. – У тебя, значит, яблонь вдвое меньше, чем груш». «А вот и не угадал, – улыбнулся дед. – Яблонь у меня в саду вдвое больше, чем груш». Нарисуйте, как могли расти яблони и груши в саду у деда.

*А.Ковальджи, А.Хачатурян*

6. Петя закрасил одну клетку прямоугольника. Саша может закрасивать другие клетки этого прямоугольника по следующему правилу: можно красить любую клетку, у которой нечетное число покрашенных соседей (по стороне). Сможет ли Саша закрасить все клетки прямоугольника (независимо от того, какую клетку выбрал Петя), если размеры прямоугольника: а)  $8 \times 9$  клеток; б)  $8 \times 10$  клеток?

*И.Раскина*

## ЗАДАЧИ СТАРШИХ КЛАССОВ

9 класс

## 8 класс

1. В олимпиаде участвовали 2006 школьников. Оказалось, что школьник Вася из всех шести задач решил только одну, а также что участников, решивших

- хотя бы 1 задачу, в 4 раза больше, чем решивших хотя бы 2;
- хотя бы 2 задачи, в 4 раза больше, чем решивших хотя бы 3;
- хотя бы 3 задачи, в 4 раза больше, чем решивших хотя бы 4;
- хотя бы 4 задачи, в 4 раза больше, чем решивших хотя бы 5;
- хотя бы 5 задач, в 4 раза больше, чем решивших все 6.

Сколько школьников не решило ни одной задачи?

*А.Заславский*

2. В клетках таблицы  $3 \times 3$  расставлены числа так, что сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке равна нулю. Какое наименьшее количество чисел, отличных от нуля, может быть в этой таблице, если известно, что оно нечетно?

*И.Богданов*

3. Треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  – равнобедренные прямоугольные (стороны  $AB$  и  $A_1B_1$  – гипотенузы). Известно, что точка  $C_1$  лежит на стороне  $BC$ , точка  $B_1$  лежит на стороне  $AB$ , а точка  $A_1$  лежит на стороне  $AC$ . Докажите, что  $AA_1 = 2CC_1$ .

*А.Хачатурян*

4. Девять одинаковых по виду монет расположены по кругу. Пять из них настоящие, а четыре – фальшивые. Никакие две фальшивые монеты не лежат рядом. Настоящие монеты весят одинаково и фальшивые – одинаково (фальшивая монета тяжелее настоящей). Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить все фальшивые монеты?

*Р.Женодаров*

5. Сережа придумал фигуру, которую легко разрезать на две части и сложить из них квадрат (рис.4). Он утверждает,

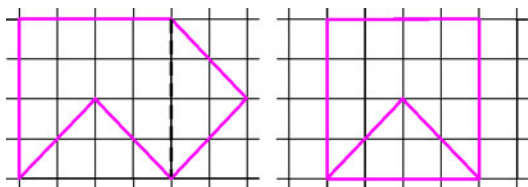


Рис. 4

что это можно сделать еще одним способом. Найдите этот способ.

*С.Маркелов*

6. Каждую неделю Ваня получает ровно одну оценку («3», «4» или «5») по каждому из семи предметов. Он считает неделю удачной, если количество предметов, по которым оценка улучшилась, превышает количество предметов, по которым оценка ухудшилась, хотя бы на два. Оказалось, что  $n$  недель подряд были удачными, и в последнюю из них оценка по каждому предмету в точности совпала с оценкой первой недели. Чему могло равняться число  $n$ ? (Найдите все варианты.)

*Т.Каравеева*

1. Васе на 23 февраля подарили 777 конфет. Вася хочет съесть все конфеты за  $n$  дней, причем так, чтобы в каждый из этих дней (кроме первого, но включая последний) съесть на одну конфету больше, чем в предыдущий. Для какого наибольшего числа  $n$  это возможно?

*Фольклор*

2. На олимпиаде  $m > 1$  школьников решали  $n > 1$  задач. Все школьники решили разное количество задач. Все задачи решены разным количеством школьников. Докажите, что один из школьников решил ровно одну задачу.

*Б.Френкин*

3. Дан остроугольный треугольник  $ABC$ . На сторонах  $AB$  и  $BC$  во внешнюю сторону построены равные прямоугольники  $ABMN$  и  $LBCK$  так, что  $AB = KC$ . Докажите, что прямые  $AL$ ,  $NK$  и  $MC$  пересекаются в одной точке.

*А.Гаврилюк*

4. В выражении  $(x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2)^{2006}$  раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Докажите, что при некоторой степени переменной  $x$  получился отрицательный коэффициент.

*М.Малкин*

5. Назовем тропинкой замкнутую траекторию на плоскости, состоящую из дуг окружностей и проходящую через каждую свою точку ровно один раз. Приведите пример тропинки и такой точки  $M$  на ней, что любая прямая, проходящая через  $M$ , делит тропинку пополам, т.е. сумма длин всех кусков тропинки в одной полуплоскости равна сумме длин всех кусков тропинки в другой полуплоскости.

*С.Маркелов*

6. Учитель заполнил клетчатую таблицу  $5 \times 5$  различными целыми числами и выдал по одной ее копии Боре и Мише. Боря выбирает наибольшее число в таблице, затем вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, затем выбирает наибольшее число из оставшихся, вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, и так далее. Миша производит аналогичные операции, каждый раз выбирая наименьшие числа. Может ли учитель так заполнить таблицу, что сумма пяти чисел, выбранных Мишей, окажется больше суммы пяти чисел, выбранных Борей?

*С.Токарев, А.Эвнин*

## 10 класс

1. Один из двух приведенных квадратных трехчленов имеет два корня, меньших тысячи, другой – два корня, больших тысячи. Может ли сумма этих трехчленов иметь один корень, меньший тысячи, а другой – больший тысячи?

*Б.Френкин*

2. Может ли сумма тангенсов углов одного треугольника равняться сумме тангенсов углов другого, если один из этих треугольников остроугольный, а другой тупоугольный?

*Б.Френкин*

3. Можно ли замостить все пространство равными тетраэдрами, все грани которых – прямоугольные треугольники?

*С.Маркелов*

4. В коробке лежат карточки, занумерованные натуральными числами от 1 до 2006. На карточке с номером 2006 лежит карточка с номером 2005 и так далее до 1. Сколько пустых коробок нужно для того, чтобы переложить все карточки в другую коробку, если за ход разрешается взять

одну верхнюю карточку (из любой коробки) и переложить ее либо на дно пустой коробки, либо на карточку с номером на единицу больше?

*А. Канель-Белов*

5. Натуральное число  $n$  таково, что числа  $3n + 1$  и  $10n + 1$  являются квадратами натуральных чисел. Докажите, что число  $29n + 11$  составное.

*Р. Женодаров*

6. Дан треугольник  $ABC$  и точки  $P$  и  $Q$ , лежащие на его описанной окружности. Точку  $P$  отразили относительно прямой  $BC$  и получили точку  $P_a$ . Точку пересечения прямых  $QP_a$  и  $BC$  обозначим  $A'$ . Точки  $B'$  и  $C'$  строятся аналогично. Докажите, что точки  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  лежат на одной прямой.

*А. Акоюян*

### 11 класс

1. Какие значения может принимать разность возрастающей арифметической прогрессии  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5$ , все члены которой принадлежат отрезку  $[0; 3\pi/2]$ , если числа  $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2$  и  $\cos \alpha_3$ , а также числа  $\sin \alpha_3, \sin \alpha_4$  и  $\sin \alpha_5$  в некотором порядке тоже образуют арифметические прогрессии?

*По мотивам А. Канунникова*

2. Найдите все несократимые дроби  $a : b$ , представимые в виде  $\bar{b}, \bar{a}$  (запятая разделяет десятичные записи натуральных чисел  $b$  и  $a$ ).

*И. Сергеев*

3. Можно ли намотать нерастяжимую ленту на бесконечный конус так, чтобы сделать вокруг его оси бесконечно много оборотов? Ленту нельзя наматывать на вершину

конуса, а также разрезать и перекручивать. При необходимости можно считать, что лента бесконечна, а угол между осью и образующей конуса достаточно мал.

*И. Сергеев*

4. Алиса и Базилио играют в следующую игру: из мешка, первоначально содержащего 1331 монету, они по очереди берут монеты, причем первый ход делает Алиса и берет 1 монету, а далее при каждом следующем ходе игрок берет (по своему усмотрению) либо столько же монет, сколько взял другой игрок последним ходом, либо на одну больше. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход по правилам. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш независимо от ходов другого?

*О. Косухин*

5. На биссектрисе данного угла фиксирована точка. Рассматриваются всевозможные равнобедренные треугольники, у которых вершина находится в этой точке, а концы оснований лежат на разных сторонах этого угла. Найдите геометрическое место середин оснований таких треугольников.

*В. Алексеев*

6. Все имеющиеся на складе конфеты разных сортов разложены по  $n$  коробкам, на которые установлены цены в  $1, 2, \dots, n$  у.е. соответственно. Требуется купить такие  $k$  из этих коробок наименьшей суммарной стоимости, которые содержат заведомо не менее  $k/n$  массы всех конфет при одном лишь условии, что масса конфет в любой коробке не превосходит массы конфет в любой более дорогой коробке.

а) Какие коробки следует купить при  $n = 10$  и  $k = 3$ ?

б) Тот же вопрос для произвольных натуральных  $n \geq k$ .

*И. Сергеев*

*Публикацию подготовил Б. Френкин*

# Избранные задачи Московской физической олимпиады

## ПЕРВЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

### 7 класс

1. Найдите примерную величину давления в центре Земли, считая, что средняя плотность ее вещества  $\rho = 5000 \text{ кг/м}^3$ . Радиус Земли  $R_3 = 6400 \text{ км}$ , ускорение свободного падения на поверхности Земли  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

*С. Варламов*

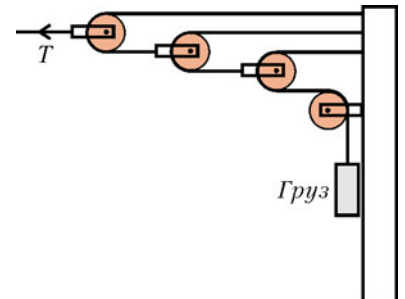
2. Школьники побывали в музее-имени Л.Н.Толстого «Ясная поляна» и возвращались в Рязань на автобусах, которые ехали со скоростью  $v_1 = 70 \text{ км/ч}$ . Пошел дождь, и водители снизили скорость до  $v_2 = 60 \text{ км/ч}$ . Когда дождь кончился, до Рязани оставалось проехать  $s = 40 \text{ км}$ . Автобусы поехали со скоростью  $v_3 = 75 \text{ км/ч}$  и въехали в Рязань в точно запланированное время. Сколько времени шел дождь? Чему равна средняя скорость автобуса? Для упрощения считайте, что автобусы в пути не останавливались.

*М. Ромашка*

3. Во льдах Арктики в центре небольшой плоской льдины площадью  $S = 70 \text{ м}^2$  стоит белый медведь массой  $m = 700 \text{ кг}$ . При этом надводная часть льдины выступает над поверхностью воды на высоту  $h = 10 \text{ см}$ . На какой глубине под водой находится нижняя поверхность льдины? Плотность воды  $\rho_v = 1000 \text{ кг/м}^3$ , плотность льда  $\rho_l = 900 \text{ кг/м}^3$ .

*М. Ромашка*

4. Провода над железной дорогой, питающие ток электропоезда, натягиваются с помощью системы, показанной на рисунке 1. Она крепится к столбу и состоит из тросов, блоков с изоляторами и стального груза квадратного сечения со сто-



*Рис. 1*

роной  $a = 20$  см. Сила натяжения толстого троса, который идет от крайнего блока к держателю проводов, равна  $T = 8$  кН. Какова высота стального груза? Плотность стали  $\rho_c = 7800$  кг/м<sup>3</sup>. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

*М.Ромашка*

### 8 класс

1. В двухлитровую пластиковую бутылку через короткий шланг накачивается воздух до давления 2 атм. Шланг пережимается, и к нему присоединяется герметичный тонкостенный полиэтиленовый пакет большой емкости (больше 10 литров) без воздуха внутри. Бутылку вместе с пакетом кладут на одну чашку весов и уравнивают гирями, которые помещают на другую чашку, а затем зажим ослабляют. Воздух из бутылки перетекает в пакет, и равновесие весов нарушается. Груз какой массы и на какую чашку весов нужно положить, чтобы равновесие весов восстановилось? Плотность воздуха равна  $1,3$  кг/м<sup>3</sup>, ускорение свободного падения считать равным  $10$  м/с<sup>2</sup>.

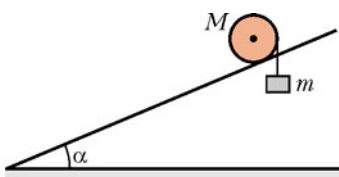
*С.Варламов*

2. В калориметре находится  $m = 100$  г расплавленного металла галлия при температуре его плавления  $t_{пл} = 29,8$  °С. Металл начали медленно охлаждать, оберегая от внешних воздействий, и в результате температура понизилась до  $t = 19,8$  °С, а галлий остался жидким. Когда переохлажденный таким образом жидкий галлий размешали палочкой, он частично перешел в твердое состояние. Найдите массу отвердевшего галлия и установившуюся в калориметре температуру. Удельная теплота плавления галлия  $\lambda = 80$  кДж/кг, удельная теплоемкость жидкого галлия  $c = 410$  Дж/(кг·°С). Теплоемкостью калориметра и палочки пренебречь.

*М.Ромашка*

### 9 класс

1. Цилиндр массой  $M$  поместили на рельсы, наклоненные под углом  $\alpha$  к горизонту (вид сбоку показан на рисунке 2).



Груз какой минимальной массы  $m$  нужно прикрепить к намотанной на цилиндр нити, чтобы цилиндр покатился вверх? Проскальзывание отсутствует.

*А.Якута*

Рис. 2

2. Алюминиевая проволока диаметром  $d = 2,5$  мм, не слишком гнутая, покрыта льдом. Общий диаметр проволоки со льдом  $D = 3,5$  мм. Температура льда и проволоки  $t = 0$  °С. По проволоке пустили ток силой  $I = 15$  А. За какое время лед растает? Плотность льда  $\rho_{л} = 0,9$  г/см<sup>3</sup>, а его удельная теплота плавления  $\lambda = 340$  кДж/кг. Удельное сопротивление алюминия  $\rho = 2,8 \cdot 10^{-8}$  Ом·м.

*М.Ромашка*

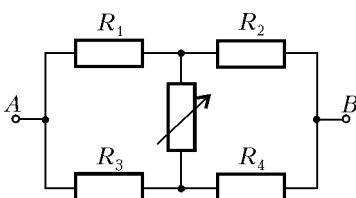


Рис. 3

3. Электрическая цепь состоит из трех резисторов с известными сопротивлениями  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 30$  Ом,  $R_4 = 60$  Ом, одного резистора с неизвестным сопротивлением  $R_3$  и одного переменного резистора (рис.3). При

измерении сопротивления  $R_{AB}$  между точками  $A$  и  $B$  этой электрической цепи выяснилось, что оно не зависит от сопротивления переменного резистора. Найдите величины сопротивлений неизвестного резистора  $R_3$  и всей цепи  $R_{AB}$ .

*М.Ромашка*

4. В секстанте, который позволяет определять угол  $\varphi$  возвышения Солнца над горизонтом в полдень и, таким образом, широту местности, используются два плоских зеркала, от которых свет поочередно отражается и угол  $\alpha$  между которыми регулируется. Изображение Солнца в этих зеркалах при измерениях с помощью секстанта необходимо совместить с линией горизонта, подбирая угол  $\alpha$ . Найдите связь угла  $\alpha$  с углом  $\varphi$  и объясните, почему использование секстанта сильно упрощает задачу нахождения угла  $\varphi$ , особенно при качке корабля.

*М.Семенов*

### 10 класс

1. Однажды летним утром кузнечик сидел на асфальте. Когда Солнце поднялось на угол  $\varphi$  над горизонтом, он прыгнул в сторону Солнца с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту. С какой скоростью будет двигаться по асфальту тень кузнечика спустя время  $t$  после прыжка?

*М.Ромашка*

2. На шарнирно закрепленной доске на расстоянии  $R$  от шарнира находится маленькая шайба. Доску, первоначально расположенную горизонтально, начали вращать вокруг шарнира в вертикальной плоскости с угловой скоростью  $\omega$ . При каком значении угла  $\alpha$  наклона доски к горизонту шайба начнет соскльзывать по доске? Коэффициент трения шайбы о доску равен  $\mu < 1$ , ускорение свободного падения равно  $g$ .

*А.Якута*

3. Два космических корабля с массами  $m_1$  и  $m_2$  летят с выключенными двигателями в поле тяготения звезды, масса которой  $M$  много больше их масс. Скорости кораблей на большом удалении от звезды были равны  $v_1$  и  $v_2$  соответственно. После пролета кораблей около звезды и их удаления на большое расстояние от нее векторы их скоростей изменили свое направление на  $90^\circ$  и остались такими же по величине. Первый корабль пролетел от звезды на минимальном расстоянии  $l_1$ . На каком минимальном расстоянии от звезды  $l_2$  пролетел второй корабль?

*О.Шведов*

### 11 класс

1. По внутренней поверхности большого неподвижного обруча радиусом  $2r$  без проскальзывания катится малый обруч радиусом  $r$ . Отрезок  $OO'$ , соединяющий центры обручей, движется с угловой скоростью  $\omega$ . К малому обручу в точке  $A$  прикреплен грузик. В некоторый момент времени обручи и грузик расположены так, как показано на рисунке 4. Чему равно в этот момент ускорение грузика?

*С.Кротов, М.Семенов*

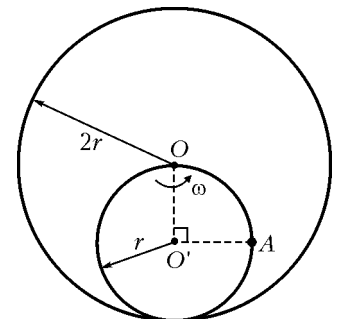


Рис. 4

2. На закрепленной наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом, удерживают легкий лист бумаги. В некоторый момент на него положили большой деревянный брусок. С каким ускорением начал двигаться брусок, когда брусок и бумагу отпустили? Коэффициент трения между

брусом и бумагой  $\mu_1$ , между бумагой и наклонной плоскостью  $\mu_2$ .

*М.Ромашка*

3. Для обоснования формулы, связывающей массу и энергию, А. Эйнштейн предложил следующий мысленный эксперимент. Два тела с массами  $m_1$  и  $m_2$  находятся на концах легкой неподвижной тележки длиной  $L$ , которая может свободно перемещаться по горизонтальной поверхности без трения. Одно из тел испускает фотон с частотой  $\omega$ , который поглощается вторым телом. Чему будет равна скорость тележки после испускания фотона до его поглощения? А после поглощения фотона? На какое расстояние сместится тележка в рассматриваемом процессе? На какую величину  $\Delta m$  должна уменьшиться масса первого тела и увеличиться масса второго тела, чтобы центр масс системы после поглощения фотона остался на месте? Постоянная Планка равна  $\hbar$ , скорость света  $c$ .

*О.Шведов*

**ВТОРОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР**

8 класс

1. Ко дну сосуда при помощи шарнира прикреплена за конец тонкая однородная палочка длиной  $L$ . В сосуд медленно наливают воду и отмечают, какая часть длины палочки  $L_n$  оказывается под водой. График зависимости относительной части длины палочки  $L_n/L$ , находящейся под водой, от высоты  $h$  уровня жидкости над дном сосуда изображен на рисунке 5. Определите плотность материала палочки, если известна плотность воды  $\rho_n$ .

Рис. 5

2. В калориметре находился лед массой  $m_l = 0,5$  кг при температуре  $t_l = -20$  °С. Удельная теплоемкость льда  $c_l = 2100$  Дж/(кг·°С), а его удельная теплота плавления  $\lambda = 340$  кДж/кг. В калориметр впускают пар массой  $m_n = 60$  г при температуре  $t_n = 100$  °С. Какая температура установится в калориметре? Удельная теплоемкость воды  $c_v = 4200$  Дж/(кг·°С), удельная теплота парообразования воды  $r = 2,2 \cdot 10^6$  Дж/кг. Теплоемкостью калориметра и потерями тепла пренебречь. Ответьте на тот же вопрос, если начальная масса льда равна  $m_{л1} = 0,3$  кг.

*М.Ромашка*

3. Груз массой  $M$  прикреплен к подвижному блоку, подвешенному на нити, один конец которой намотан на шкив радиусом  $r$ , а другой конец перекинут через соосный, скрепленный с первым шкив радиусом  $R$  и наматывается на вал, приводимый во вращение при помощи двигателя (рис.6). Скорость горизонтального участка нити равна  $v$ . Найдите мощность, которая развивается двигателем при поднятии груза, считая, что нить не проскальзывает по шкивам.

Рис. 6

*Я.Пузырев*

9 класс

1. Находясь на вершине ледяной горки, образующей угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом, школьник бросил снежок под углом  $\beta = 70^\circ$  к горизонту и в этот же момент начал спускаться без начальной скорости с этой горки на санках (рис.7). Через некоторое время снежок попал в школьника. Найдите коэффициент трения между полозьями санок и льдом.

Рис. 7

*М.Ромашка*

2. В системе, изображенной на рисунке 8, нить невесома и нерастяжима, блоки невесома, трения нет. Массы грузов на концах нити равны  $m_1$  и  $m_2$ , однородная доска массой  $m_3$  лежит на горизонтальном столе так, что вертикальные участки нити, переброшенной через закрепленные на доске блоки, проходят вдоль ее торцов. При каком условии доска при движении грузов будет оставаться в горизонтальном положении?

Рис. 8

*М.Семенов*

3. В два сообщающихся цилиндра налита вода. Один из цилиндров с площадью поперечного сечения  $S_1$  открыт, а другой закрыт сверху поршнем, к которому прикреплен пружина (рис.9). Система находится в равновесии. Если точку подвеса пружины сместить вниз на  $a$ , то свободная поверхность воды в первом цилиндре поднимется на  $\alpha_1 a$ , а поршень опустится на  $\alpha_2 a$  ( $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – положительные коэффициенты). Чему равна площадь поперечного сечения  $S_2$  закрытого цилиндра? На какое расстояние  $b_2$  сместился бы поршень, если бы в открытый цилиндр долили объем  $V$  воды, не смещая точку подвеса пружины? Чему равна жесткость пружины  $k$ ? Ускорение свободного падения равно  $g$ , плотность воды  $\rho$ .

Рис. 9

*О.Шведов*

4. В технической документации на калькулятор школьник прочитал: «Для нормальной работы калькулятора подаваемое на него напряжение должно быть в пределах от  $U_{\min} = 4,5$  В до  $U_{\max} = 5,5$  В; в зависимости от режима работы калькулятор потребляет ток от  $I_{\min} = 20$  мА до  $I_{\max} = 50$  мА». Не найдя батарейку с нужным напряжением, школьник решил включить данный калькулятор, используя имеющийся в школьной лаборатории аккумулятор с напряжением  $U_0 = 12$  В и малым внутренним сопротивлением и резисторы, собранные в электрическую

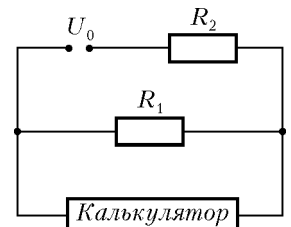


Рис. 10

цепь, схема которой изображена на рисунке 10. Сопротивление второго резистора  $R_2 = 40 \text{ Ом}$ . В каком интервале должно лежать сопротивление первого резистора ( $R_1$ ), чтобы включенный таким образом калькулятор функционировал нормально?

*С.Варламов*

### 10 класс

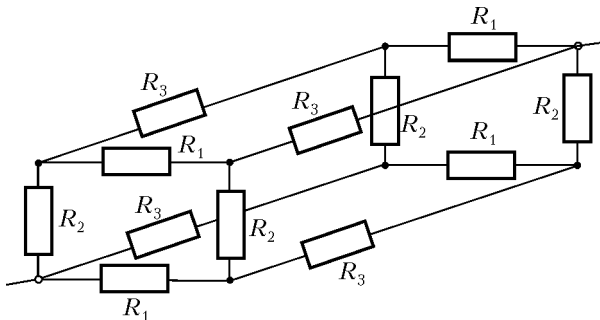
1. В невесомости внутри сферы радиусом  $R_0$  движется шарик, упруго соударяясь со стенками сферы. Скорость шарика  $v_0$ , угол падения шарика на сферу, т.е. угол между вектором его скорости и нормалью к сфере непосредственно перед соударением, равен  $\alpha_0$  (рис.11). Сферу начали медленно равномерно сжимать до радиуса  $R_1$ . С какой скоростью  $v_1$  будет двигаться шарик в конце процесса сжатия? Чему при этом будет равен угол  $\alpha_1$  падения шарика на сферу?

*Рис. 11*

2. Идеальный одноатомный газ в количестве  $\nu$  молей участвует в циклическом процессе, состоящем из двух изотерм и двух изохор. При изохорическом нагревании газ получает количество теплоты  $Q_1$ , а при изотермическом расширении – количество теплоты  $Q_2$ . Минимальная температура газа в данном циклическом процессе равна  $T_{\min}$ . Найдите: а) максимальную температуру газа; б) количества теплоты, отданные газом при изохорическом охлаждении и изотермическом сжатии; в) работу, совершенную газом на каждой из стадий процесса; г) КПД теплового двигателя, работающего по рассматриваемому циклу.

*А.Зильберман*

3. Двенадцать резисторов спаяны в виде прямоугольного параллелепипеда таким образом, что сопротивления каждого четырех параллельных ребер одинаковы и равны  $R_1$ ,  $R_2$  и



*Рис. 12*

$R_3$  соответственно (рис.12). Найдите сопротивление этой электрической цепи между точками, лежащими на пространственной диагонали параллелепипеда.

*С.Кротов*

### 11 класс

1. В системе, изображенной на рисунке 13, цилиндрический груз массой  $m_1$  движется внутри цилиндрического канала чуть большего диаметра, просверленного внутри тела массой  $m_2$ . Нить, соединяющая грузы с массами  $m_1$  и  $m_3$ , невесома и нерастяжима, блоки невесома, трения нет. Чему равно ускорение тела массой  $m_1$ ? Ускорение свободного

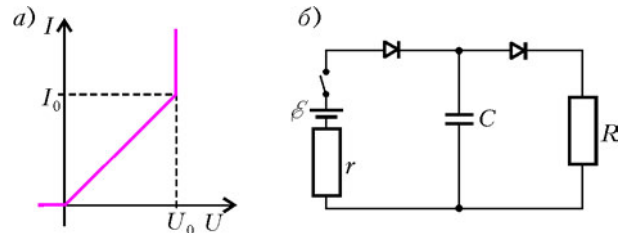
падения равно  $g$ , участок нити между блоками горизонтален.

*М.Семенов*

2. Развивая молекулярно-кинетическую теорию, И. Лошмидт в 1865 году предложил первый способ оценки размера и массы молекулы. Он использовал известные в его время данные о длине свободного пробега – расстоянии, которое пролетает молекула газа в промежутке между столкновениями (оно выражается через определяемые из опыта коэффициенты вязкости и теплопроводности). Вслед за Лошмидтом получите формулы для оценки по порядку величины размера молекулы  $r_0$  и ее массы  $m_0$  по известным данным – длине свободного пробега  $\lambda$  и плотностям вещества  $\rho_r$  и  $\rho_j$  в газообразном и жидком состояниях. Получите ответ в общем виде и для числовых значений  $\lambda \approx 10^{-7} \text{ м}$ ,  $\rho_j \approx 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_r \approx 1 \text{ кг/м}^3$ .

*О.Шведов*

3. Два одинаковых неидеальных диода с вольт-амперной характеристикой, приведенной на рисунке 14,а включены вместе с конденсатором, двумя резисторами, идеальной батареей и ключом в электрическую цепь, изображенную на рисунке 14,б. Сопротивления резисторов  $R = 16 \text{ Ом}$  и  $r = 4 \text{ Ом}$ , ЭДС батарейки  $\mathcal{E} = 4 \text{ В}$ , емкость конденсатора  $C = 100 \text{ мкФ}$ , параметры вольт-амперной характеристики диода  $U_0 = 1 \text{ В}$  и  $I_0 = 50 \text{ мА}$ . а) Ключ в цепи замкнули. До какого напряжения зарядится конденсатор? б) После заряд-

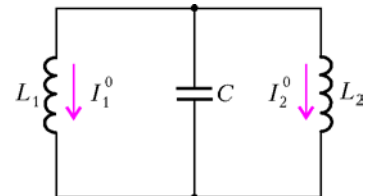


*Рис. 14*

ки конденсатора ключ разомкнули. Какое количество теплоты выделится при разрядке конденсатора на резисторе  $R$ ? А на каждом из диодов?

*К.Парфенов*

4. Электрическая цепь состоит из катушек с индуктивностями  $L_1$  и  $L_2$  и конденсатора емкостью  $C$ , включенных параллельно. В начальный момент времени токи через катушки текут в одну сторону и равны  $I_1^0$  и  $I_2^0$ , а конденсатор не заряжен (рис.15). Найдите частоту  $\omega$  возникающих в системе гармонических колебаний и зависимости от времени токов через катушки  $I_1(t)$ ,  $I_2(t)$  и заряда на конденсаторе  $Q(t)$ . Сопротивлением катушек пренебречь.



*Рис. 15*

*О.Шведов*

Публикацию подготовили  
*М.Семенов, А.Якута*

## 10000 задач по математике

В этой краткой заметке мы хотим рассказать читателям «Кванта» о нашем новом проекте – информационно-поисковой системе задач Problems.Ru (<http://www.problems.ru>). В ней мы постарались учесть все лучшее, что было сделано до нас, связать вместе и архивы олимпиад, и геометрическую базу, разработанную Р.К.Гординым, И.Ф.Шарыгиным и другими, и электронный архив журнала «Квант», и интернет-библиотеку МЦНМО.... Что же это такое?

Во-первых, на Problems.Ru можно смотреть просто как на сборник задач по математике. На сайте собрано около 10000 задач по алгебре, геометрии и математическому анализу. Большинство задач нельзя найти в школьных учебниках; встретиться с такими задачами вы могли на олимпиадах, кружках или факультативах по математике или в журнале «Квант». Все задачи разбиты по темам, по уровням сложности и классам. Так что, как мы надеемся, вам будет несложно найти задачи из интересующего вас раздела математики или заняться решением задач нужного уровня сложности. Мы не будем сейчас вдаваться в тонкости классификации (подробности можно найти на сайте), а просто приведем несколько примеров задач из нашей системы.

**Задача 35591.** *Кусок сыра имеет форму кубика  $3 \times 3$ , из которого вырезан центральный кубик. Мышь начинает грызть этот кусок сыра. Сначала она съедает некоторый кубик  $1 \times 1$ . После того как мышь съедает очередной кубик  $1 \times 1$ , она приступает к съедению одного из соседних (по грани) кубиков с только что съеденным. Сможет ли мышь съесть весь кусок сыра?*

Тема этой задачи называется «Шахматная раскраска» (а в дереве тем это выглядит так: *Методы -> Вспомогательная раскраска -> Шахматная раскраска*). Сложность этой задачи по нашей шкале равна 3, задача рекомендуется для 7, 8 и 9 классов.

**Задача 60836** (числа-автоморфы). *а) Трехзначное число 625 обладает своеобразным свойством самовоспроизводимости, как то:  $625^2 = 390625$ . Сколько четырехзначных чисел удовлетворяют уравнению  $x^2 = x \pmod{10000}$ ?*

*б) Докажите, что при любом  $k$  существует ровно 4 набора из  $k$  цифр – 00... 00, 00... 01 и еще два, оканчивающиеся пятеркой и шестеркой, – обладающие таким свойством: если натуральное число оканчивается одним из этих наборов цифр, то его квадрат оканчивается тем же набором цифр.*

Темы: «Китайская теорема об остатках» и «Индукция» (в дереве тем это выглядит как *Алгебра и арифметика -> Теория чисел. Делимость -> Китайская теорема об остатках и Методы -> Индукция*). Сложность: 5+. Рекомендуется для 9, 10 классов.

Теорема, приведенная в следующей задаче, была открыта совсем недавно – в 2002 году. Ее автор – голландец Floor van Lamoen.

**Задача 56846.** *Медианы треугольника ABC разрезают его на 6 треугольников. Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности.*

Темы: «Вписанные и описанные окружности» и «Вспомогательные проекции» (в дереве тем это выглядит так: *Геометрия -> Планиметрия -> Треугольники -> Вписанные и описанные окружности и Геометрия -> Классическая геометрия -> Планиметрия -> Векторы -> Вспомогательные проекции*). Сложность: 8+. Рекомендуется для 9,10,11 классов.

Если у вас не получается самим решить эти задачи (названия тем можно рассматривать как подсказку), то на сайте вы можете прочитать их полные решения.

Во-вторых, Problems.Ru – это информационно-поисковая система. Здесь можно как найти задачу по контексту (например, по ключевому слову или фразе), так и вывести подборку задач, находящихся на пересечении каких-то тем. Например, найти задачи на применение индукции в геометрии или принципа Дирихле в теории чисел.

В-третьих, это своего рода справочник по математике. Многие из тем снабжены статьями или ссылками на находящиеся в Интернете статьи в «Кванте», в которых объясняется, например, что же такое принцип Дирихле или как доказывать неравенство Коши. У нас также есть небольшой словарь. Если, скажем, вас заинтересует, что такое «луночки Гиппократы» или «теорема Хелли», то там можно найти ответы на эти вопросы. Словарик постоянно пополняется: если вы не нашли нужного термина или теоремы, то можно послать запрос, и через несколько дней в словаре появится еще одна статья.

В-четвертых, это возможность поделиться своими знаниями. Мы с радостью разместим на сайте ваше новое решение одной из имеющихся задач (со ссылкой на вас как на автора решения) или опубликуем вашу задачу. Для этого достаточно отправить нам подробное решение (или условие) через соответствующую форму на сайте.

Наконец (или, наоборот, в первую очередь), система Problems.Ru является большим подспорьем для учителя. Если вы читаете спецкурс или факультатив по математике или ведете кружок, то для разработки очередного занятия достаточно выбрать («добавить») нужные задачи из системы, и «версия для печати» предложит вам готовое для раздачи ученикам задание с вашими заголовками (например «5-е занятие кружка. Инварианты. 12 декабря 2005 г.»). Как мы проверили это на своем опыте, при таком подходе экономится очень много времени по сравнению с подбором задач по разным книгам, а потом печатью их вручную. С помощью поисковой системы также просто подобрать дополнительную нестандартную задачу по обычной школьной теме, что может быть очень полезно на уроке.

Как именно устроена наша информационная система, какие именно задачи в нее входят, как они классифицируются и так далее – все это можно найти на сайте Problems.Ru. Отметим только, что представлены задачи большинства олимпиад и турниров города Москвы, а также и других регионов нашей страны. Система постоянно пополняется, и мы планируем, например, в ближайшем будущем окончить публикацию задач Московских математических олимпиад (за все годы их существования). Разумеется, эти задачи приводятся с решениями и комментариями. Мы также попытались найти подходы к классификации сложности олимпиадных задач, исходя из подходов, принятых у альпинистов. Конечно, эта шкала пока несовершенна (и никогда не будет совершенной), но определенную оценку она уже дает.

Проект реализуется большим авторским коллективом (см. раздел «авторы» нашего сайта) на базе Московского центра непрерывного математического образования.

Мы приглашаем всех заинтересовавшихся нашим проектом к сотрудничеству. Мы будем рады оперативно размещать материалы олимпиад, конкурсов, а также авторские материалы. Мы постараемся учесть все предложения и замечания по классификатору и особенно по шкале сложности задач.

И. Яценко, П.Сергеев

КМШ

Задачи

(см. «Квант» №3)

1. Очевидно, что мумбиана должна соединять вершину треугольника с точкой на его противоположной стороне, которую мы назовем основанием.

Сначала докажем, что мумбиана является высотой треугольника. Если бы это было не так, то один из углов, которые образует мумбиана с основанием, был бы тупым. Например, на рисунке 1 мумбиана  $AD$  образует тупой угол  $ADC$  с основанием  $BC$ . Но в таком случае угол  $ADC$  треугольника  $ADC$

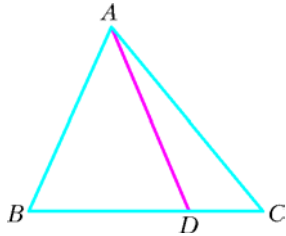


Рис. 1

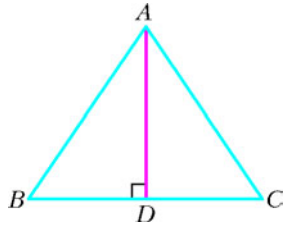


Рис. 2

больше любого угла треугольника  $ABD$ , поэтому треугольники  $ADC$  и  $ABD$  не могут быть равными. Итак, мумбиана  $AD$  является высотой (рис.2). Поскольку против равных углов в равных треугольниках находятся соответственно равные стороны, то  $AB = AC$ . Значит, треугольник  $ABC$  равнобедренный, но тогда высота  $AD$ , проведенная к основанию, является медианой (а также биссектрисой). Так что – увы! – профессору Мумбуму-Плюмбуму не удалось придумать новый замечательный отрезок.

2. Поскольку  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ , то  $n$ -е слагаемое в исходном выражении можно представить в виде

$$\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Тогда исходная сумма преобразуется к виду

$$1 + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2007}\right) = 1 + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2007}\right) = 1 \frac{2005}{2007}.$$

3. Докажем, что обязательно найдутся 5 клеток, в которых число чижей одинаково. Пронумеруем клетки по возрастанию количества содержащихся в них чижей. Пусть в первой клетке находится  $a_1$  чижей, во второй –  $a_2$  чижей, ..., в 17-й клетке –  $a_{17}$  чижей, причем

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{17}, \quad a_1 + a_2 + \dots + a_{17} = 44.$$

Если в последовательности чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{17}$  не существует 5 одинаковых и идущих подряд чисел, то

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geq 4, \quad a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \geq 8,$$

$$a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} \geq 12, \quad a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} \geq 16,$$

и тогда  $a_1 + a_2 + \dots + a_{16} \geq 4 + 8 + 12 + 16 = 40$ . В последней клетке не менее 5 чижей,  $a_{17} \geq 5$ , поэтому  $a_1 + a_2 + \dots + a_{17} \geq 45$ , что противоречит условию.

Несложно придумать распределение чижей по клеткам, в которых условие задачи выполняется.

4. Докажем, что Гулливер ошибся (оно и не удивительно: это только Мюнхгаузен всегда говорит правду).

Предположим противное – что Гулливер прав. Так как каждый крупный город связан рейсами с большинством городов другой страны, то он не связан с меньшинством городов. Поэтому, так как некий крупный город Лилипутии, по предположению, не связан ни с каким крупным городом Блефуску, крупных городов в Блефуску – меньше половины от общего числа городов. Значит, мелких городов в Блефуску больше половины от общего числа городов. Далее, если в Лилипутии есть мелкий город, связанный со всеми мелкими городами Блефуску, то получается, что этот город связан более чем с половиной городов Блефуску. Но тогда он должен быть не мелким, а крупным. Противоречие.

5. Развернем коробку так, как показано на рисунке 3.

Точки  $A$  и  $A'$  изображают одну и ту же точку на поверхности коробки. Минимальная длина ленточки равна длине прямолинейного отрезка, соединяющего точки  $A$  и  $A'$  на развертке. (Все такие отрезки, различающиеся положением точки  $A$ , параллельны друг другу, поэтому имеют одинаковые длины.) Если обозначить длину, ширину и высоту коробки через  $a, b, c$  соответственно, то искомая длина ленточки равна  $l = 2\sqrt{(a+c)^2 + (b+c)^2}$ . Для данных задачи получаем  $l = 60$  см.

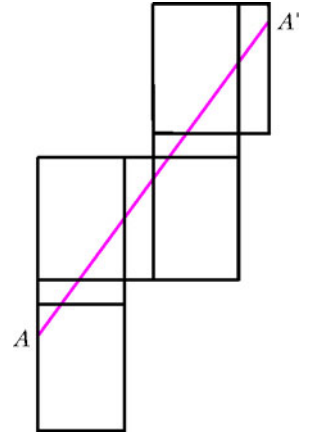


Рис. 3

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №1)

16. Обозначим  $x - y = a, y - z = b, z - x = c$ . Заметим, что  $a + b + c = 0, (a + b + c)^2 = 0, a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca), |a^2 + b^2 + c^2| = 2|ab + bc + ca|$ .

Итак,

$$2(|ab + bc + ca| + |ab| + |bc| + |ca|) = (a^2 + b^2 + c^2 + 2|ab| + 2|bc| + 2|ca|) = (|a| + |b| + |c|)^2,$$

что и требовалось доказать.

17. Взаимно простые числа  $a$  и  $b$  не могут одновременно быть четными. Точно так же они не могут быть одновременно нечетными, иначе в противном случае в левой части равенства  $a^2 + b^2 = c^2$  стояло бы число, дающее при делении на 4 остаток 2 (действительно:  $(2n+1)^2 + (2k+1)^2 = 4n^2 + 4n + 4k^2 + 4k + 2$ ), а стоящее в правой части число  $c^2$  такой остаток давать не может ни при каких целых значениях  $c$ .

Без ограничения общности можно считать число  $a$  нечетным, а число  $b$  – четным.

Поскольку нечетные числа  $c + b$  и  $c - b$  взаимно просты и  $(c + b)(c - b) = a^2$ , то  $c + b = u^2$  и  $c - b = v^2$  для некоторых натуральных чисел  $u$  и  $v$ . Так как числа  $u$  и  $v$  нечетны, то  $u^2$  и  $v^2$  при делении на 8 дают остаток 1 (в этом можно убедиться, рассмотрев остаток от деления на 8 чисел  $(8k+1)^2, (8k+3)^2, (8k+5)^2, (8k+7)^2$  для произвольных целых чисел  $k \geq 0$ ). Значит, число  $2c = u^2 + v^2$  можно представить в виде  $2c = 4m + 2$ , где  $m$  – некоторое натуральное число. Тогда  $c = 4m + 1$ , откуда следует утверждение задачи.

18. Пусть четырехугольник  $ABCD$  удовлетворяет условию задачи. Вначале докажем, что каждая его диагональ разрезает четырехугольник на два треугольника площади 1. Предполо-



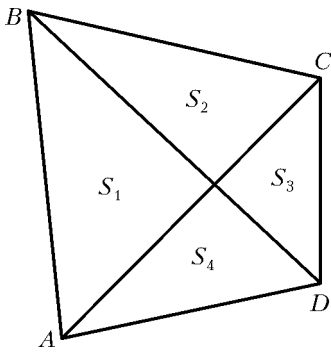


Рис. 4

ника площади 1. Тогда площади треугольников в обозначениях этого рисунка подчиняются системе равенств

$$\begin{cases} S_1 + S_2 = S_3 + S_4, \\ S_1 + S_4 = S_2 + S_3, \end{cases}$$

откуда следует  $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ . В этом случае диагонали четырехугольника  $ABCD$  точкой пересечения делятся пополам, значит,  $ABCD$  – параллелограмм, причем площадь его равна 2.

**19.** Рассмотрим значения  $n$  в порядке возрастания. Если  $n$  – однозначное (от 1 до 9), то побеждает первый: он сразу записывает цифру  $n$  и тем самым выигрывает.

Если  $n = 10$ , то выигрывает второй игрок, приписывая ноль к начальной цифре первого.

Если  $n = 11$ , то и здесь выигрывает второй, приписывая к начальной цифре первого такую же самую цифру.

Докажем, что при  $n \geq 12$  ни один из игроков не может гарантировать себе победу. Прежде всего оценим, сколько может быть чисел, делящихся на  $n$ , среди любых 100 последовательных целых чисел. Если первое из них делится на  $n$ , то общее

количество делящихся на  $n$  чисел равно  $1 + \left\lfloor \frac{99}{n} \right\rfloor$  (квадратные скобки означают целую часть), а если первое не делится на  $n$ , то их будет во всяком случае не больше этого количества. Так как  $n \geq 12$ , то среди любых 100 последовательных

чисел количество делящихся на  $n$  не больше  $1 + \left\lfloor \frac{99}{12} \right\rfloor = 1 + [8,25] = 9$ .

Пусть перед очередным ходом какого-либо игрока на доске уже записано некоторое число  $A$ , и этот игрок своим ходом выиграть не может. Покажем, что тогда он, тем не менее, может сделать такой ход, что его соперник ответным ходом также не сможет выиграть. Приписывая к числу  $A$  одну из цифр  $0, 1, 2, \dots, 9$ , игрок может получить одно из 9 чисел  $A0, A1, A2, \dots, A9$  (горизонтальная черта сверху обозначает, что числа записываются подряд – т.е. одно приписано справа к другому). Соперник приписывает справа тоже какую-то цифру, и после его хода получится целое число, заведомо заключенное между  $A00$  и  $A99$ . Поэтому возможное количество получившихся чисел не превышает 100. Как отмечено выше, среди них имеется не больше 9 чисел, делящихся на  $n \geq 12$ . Разобьем все числа от  $A00$  до  $A99$  на 10 групп – по значению второй цифры справа (т.е. в 1-й группе все числа имеют вид  $A0*$ , во 2-й –  $A1*$ , ..., в 10-й –  $A9*$  (звездочка означает любую ненулевую цифру)). Так как всего имеется не более 9 чисел, делящихся на  $n$ , то в некоторой  $m$ -й группе не окажется ни одного числа, делящегося на  $n$ . Тогда игрок должен следующей цифрой записать именно цифру  $(m - 1)$  – и, как бы ни ответил соперник, получившееся у него число не будет делиться на  $n$ . Правда, хотя он и не сможет победить, зато сумеет ответить так, чтобы его противник не смог побе-

дим, что это не так – скажем, диагональ  $AC$  не разрезает его на два треугольника площади 1 и отличную от 1 площадь имеет треугольник  $ABC$ . Тогда, разрезав треугольник  $CDA$  на два треугольника отличной от 1 площади, мы придем к противоположному.

Итак, пусть на рисунке 4 каждая из диагоналей  $AC$  и  $BD$  разрезает четырехугольник  $ABCD$  на два треугольника

Игра, таким образом, будет продолжаться безрезультатно сколь угодно долго.

Итак, один из игроков может обеспечить себе победу при любой игре противника только для значений  $n$  от 1 до 11 включительно (при этом для  $n$  от 1 до 9 побеждает первый игрок, а при  $n = 10$  и  $11$  – второй).

**20.** Прежде чем потопить корабль, его надо сначала ранить. Покажем, что наименьшее количество выстрелов, которое гарантирует ранение корабля, равно 16. Для этого раскрасим клетки поля в три различных цвета  $a, b, c$ , как показано на рисунке 5.

Заметим, что при любом расположении трехпалубного корабля он содержит клетки всех трех цветов. Клеток цвета  $a$  имеется 17, цвета  $b$  или  $c$  – по 16. Поэтому, если стрелять по клеткам цвета  $b$ , то за 16 выстрелов корабль наверняка будет ранен. Покажем, что 15 выстрелов может оказаться недостаточным.

Для этого изобразим на игровом поле 16 возможных стоянок трехпалубного корабля, как показано на рисунке 6. Сделав 15 выстрелов, можно ликвидировать максимум 15 возможных стоянок, а корабль вполне может оказаться на последней целой стоянке.

Покажем, что за 19 выстрелов корабль можно наверняка потопить. Будем стрелять по клеткам цвета  $b$ , которые на рисунке 7 обозначены цифрами 3, 4 и 5. Если корабль будет ранен выстрелом в клетку с цифрой  $n$  ( $n = 3, 4, 5$ ), то для его потопления останется, как легко проверить, максимум  $n$  выстрелов. Сначала стреляем по клеткам, обозначенным цифрой 5 (таких клеток 3). Если корабль будет при этом ранен, то для его потопления потребуется не более  $3 + 5 = 8$  выстрелов. Если после первых трех выстрелов корабль не будет ранен, то продолжаем стрелять по клеткам, помеченным цифрой 4 (таких клеток 9). Если корабль будет при этом ранен, то для его потопления потребуется не более  $12 + 4 = 16$  выстрелов. Если после первых 12 выстрелов корабль не ранен, то продолжаем стрелять по клеткам, помеченным цифрой 3 (таких клеток 4). Поскольку корабль будет наверняка ранен (не более 16 выстрелов), то для его потопления потребуется не более  $16 + 3 = 19$  выстрелов.

Покажем, что 18 выстрелов может не хватить. Предположим, что имеется стратегия, которая позволяет наверняка потопить корабль не более чем за 18 выстрелов. Пусть стреляющий придерживается этой стратегии, а мы применим «военную хитрость»: корабль нарисуем не сразу, а заявим его в самый последний момент, насколько это будет возможно. А именно:

1) после того выстрела, который лишает нас возможности найти стоянку для целого корабля, объявим, что корабль ранен; 2) после того выстрела, который лишает нас возможности найти стоянку для корабля с одной раной и двумя целыми

a	b	c	a	b	c	a
b	c	a	b	c	a	b
c	a	b	c	a	b	c
a	b	c	a	b	c	a
b	c	a	b	c	a	b
c	a	b	c	a	b	c
a	b	c	a	b	c	a

Рис. 5

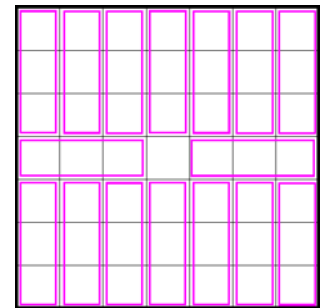


Рис. 6

	3		4		
3			4		3
		5		4	
	4		5		
4			5		4
		4		4	
	3		4		

Рис. 7

клетками, объявим, что корабль дважды ранен: 3) после того выстрела, который лишает нас возможности найти стоянку для корабля с двумя ранами и одной целой клеткой, объявим, что корабль потоплен. Если корабль был первый раз ранен  $k$ -м выстрелом, где  $k \geq 17$ , то для окончательного его потопления потребуется не менее 19 выстрелов. Меньше чем за 16 выстрелов (в силу нашей уловки) корабль ранить не удастся, поэтому, если он поражается 18 выстрелами, первый раз он будет ранен в точности 16-м выстрелом.

Дальше требуется более тонкий анализ, и мы рассмотрим возможные сценарии событий.

А) Если хотя бы один из первых 16 выстрелов был сделан в центральную, угловую или примыкающую к середине стороны клетку, то, как показано на рисунках 6 и 8, корабль не

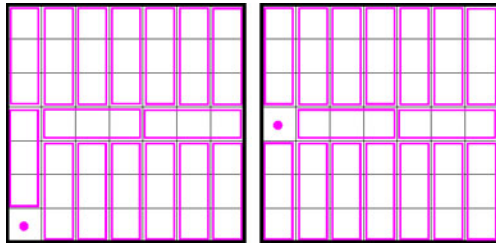


Рис. 8

мог быть ранен 16-м выстрелом (одна из возможных 16-ти стоянок осталась целой). Таким образом, до первого ранения выстрелов в указанные клетки не производилось. В дальнейшем эти клетки мы будем называть *нетронутыми*.

Б) Корабль не может быть ранен 16-м выстрелом, если какие-то два из них были сделаны в соседние по стороне клетки. Действительно, центральная клетка – *нетронутая*, поэтому всегда можно выделить 16 стоянок так, чтобы эти два выстрела пришлось в одну стоянку – тогда одна из оставшихся 15 стоянок окажется целой.

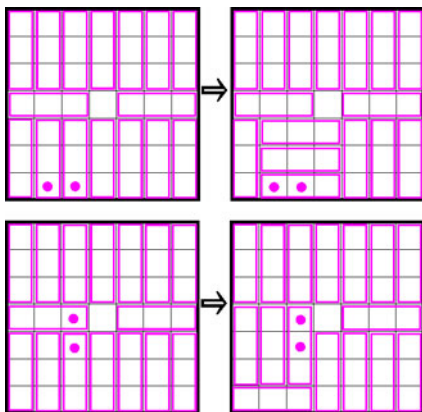


Рис. 9

Нижеследующие примеры на рисунке 9 показывают, как это можно сделать. Итак, последний, 16-й выстрел мог быть сделан либо в одну из периферийных клеток, за исключением угловых и срединных, либо в одну из внутренних

клеток, кроме центральной. На рисунке 10 крестиком показаны возможные варианты для 16-го выстрела, причем кружочком на этих рисунках показаны *нетронутые* клетки. Ясно,

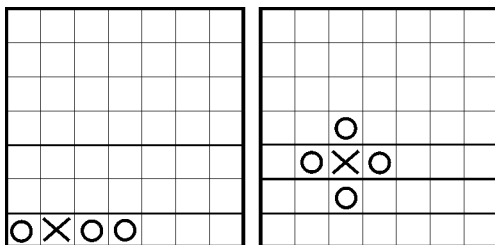


Рис. 10

что в силу нашей уловки во всех этих случаях необходимо сделать еще по крайней мере 3 выстрела, чтобы окончательно

потопить корабль.

Таким образом, предположив, что корабль наверняка можно потопить не более чем за 18 выстрелов, мы пришли к выводу, что выстрелов надо больше. Противоречие.

Следовательно, корабль можно наверняка потопить минимум за 19 выстрелов.

### ЛЕГЕНДА О ЗАДАЧЕ ГАУССА

1.  $(1 + 100) \cdot 50 = 5050$ .

2, 3, 4. Для трех данных сумм последовательность знаков одна и та же:

$$(+ - - + - + + -).$$

5.  $(+ - - + - + + - - + + - - - +)$ .

6, 7.  $(+ - - + - + + - - + + - - - + - + - + - - + - - + - -)$ .

8.  $n = 64, n = 128, \dots, n = 64k$ , где  $k \in \mathbf{N}$ . Последовательность знаков получается из последовательности, указанной в ответе к упражнениям 6, 7 и содержащей 32 знака, заменой знака *плюс* на пару знаков  $+ -$  и заменой знака *минус* на пару знаков  $- +$ . При этом получается последовательность знаков, период которой равен 64.

### ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

1. а, г, д) Да; б, в, е) нет.

2. а, в) Да; б, г) нет.

3. Да. 4. Нет. 5. Да. 6. а, б) Нет; в, г, д) да.

7. Нет. 8. Да. 9. Нет. 10. Да.

### ЗАРЯЖЕННЫЕ ЧАСТИЦЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

1.  $W_{\text{кин}} = \frac{3(qBR)^2}{4m}$ , где  $q$  – заряд и  $m$  – масса протона.

2.  $t = \frac{2mv_0 \cos \alpha}{qE}$ ;  $B_n = \frac{\pi E}{v_0 \cos \alpha} n$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$

3.  $U = \frac{IB}{nea}$ , где  $e$  – заряд электрона.

### ЛХІХ МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Математический праздник

6 класс

1. 503 таблетки.

Пока звери не съели лекарство, заберем одну таблетку у носорога, две у бегемота и три у слона. Теперь у всех таблеток поровну. Забрали мы 6 таблеток, т.е. осталось их 2000 – по 500 у каждого. У слона забрали 3 таблетки, т.е. Айболит прописал слону 503 таблетки.

2. Искомый разрез показан на рисунке 11.

3. На 3-й этаж.

Если на этаже не более трех квартир, то в десяти подъездах их не более чем  $10 \cdot 9 \cdot 3 = 270$ , т.е. в 10-м подъезде квартиры 333 не будет. Если на этаже не менее пяти квартир, то уже в девяти подъездах будет не менее чем  $9 \cdot 9 \cdot 5 = 405$  квартир, т.е. искомая квартира будет не в десятом подъезде. Значит, квартир на этаже 4, в первых девяти подъездах  $9 \cdot 9 \cdot 4 = 324$  квартиры. Тогда в десятом подъезде квартиры начинаются с 325-й. На

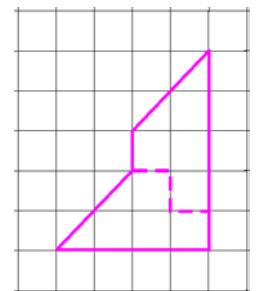


Рис. 11

втором этаже они начнутся с 329-й, на третьем – с 333-й. Таким образом, Пете нужно подняться на третий этаж.

4. Вот один из способов решения задачи. Если бы у Тани большой кувшин вмещал 10 литров, то достаточно было бы попытаться налить в него воду из малого трижды. Если вода польется через край, то малый кувшин на 4 литра, если нет, то на 3. С пятилитровым кувшином такая проверка возможна, если Таня опорожнит пятилитровый кувшин, когда тот заполнится.

5. Возможны различные расстановки яблонь и груш, например такая, как показана на рисунке 12,а. Наибольшее число яблонь можно поместить, если груши растут достаточно гус-

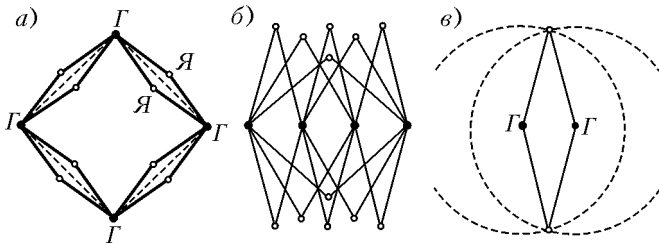


Рис. 12

то. Например, если посадить груши в ряд через 5 метров, то найдется место для 12 яблонь (рис.12,б).

Докажем, что больше двенадцати яблонь быть не может. В самом деле, рассмотрим две какие-то груши. На расстоянии 10 метров от них может быть только две яблони – одна по одну сторону от линии груш, другая – по противоположную (рис.12,в). Поэтому каждая пара груш «обслуживает» не более чем две яблони. Так как пар груш ровно шесть (пересчитайте!), то максимальное число яблонь равно 12.

6. Каждая команда провела 4 игры. Ясно, что первая команда один раз сыграла вничью, а остальные игры проиграла. Вторая имеет две ничьи и два поражения. Третья команда пять очков на одних ничьих набрать не могла, стало быть, она один раз выиграла, кроме того, у нее две ничьи и поражение. Четвертая команда победила два раза (если бы один, то ей пришлось бы набрать в трех играх на одних ничьих 4 очка, что невозможно). Также у этой команды есть ничья и поражение. В итоге первые четыре команды выиграли 3 раза, а проиграли 7 раз. Однако число побед должно равняться числу поражений. Значит, 4 раза они проиграли пятой команде, и у той 12 очков.

Нетрудно привести пример турнира, где такое распределение очков возможно. Пусть пятая команда выиграла у всех, четвертая – у первой и второй, третья – у первой, а все остальные игры закончились вничью. Тогда у каждой команды будет названное число очков.

7 класс

1.  $\frac{6}{7}$  и  $\frac{1}{7}$ . Треть доли Пуха увеличила втрое порцию Пятачка,

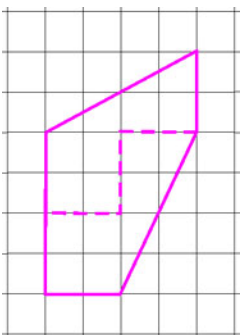


Рис. 13

т.е. сама была вдвое больше нее. Значит, вся доля Пуха была в 6 раз больше доли Пятачка, т.е. у Пуха было вначале  $\frac{6}{7}$  торта, а у Пятачка – лишь  $\frac{1}{7}$ .

2. Искомый разрез показан на рисунке 13.

3. Наташа права.

Всего существует 7 различных вариантов расположения дат в январском календаре. При этом есть всего два существенно различных варианта рас-

положения треугольника 10-20-30 (см. рис.14 здесь и рис.3 к условию задачи), все остальные получаются из первых двух горизонтальными сдвигами треугольника. Проверим Наташино предположение для первого случая, а для второго случая рассуждения будут аналогичными. Очевидно, что у треугольника 30-9-10 угол 9 прямой (см. рис.14) и, аналогично, является прямым угол 13 у треугольника 10-13-20.

Ясно, что стороны 9-30 и 10-13 равны; аналогично, равны стороны 9-10 и 13-20. Поэтому треугольники 9-30-10 и 13-10-20 равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, отрезки 10-30 и 10-20 равны. Так как сумма углов в треугольнике равна  $180^\circ$ , получаем, что сумма острых углов в треугольнике 9-10-30 равна  $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ . Осталось заметить, что сумма углов, дополняющих угол 10 до развернутого угла, равна сумме острых углов треугольника 9-10-30. Значит, угол 10 тоже равен  $90^\circ$ . Итак, треугольник 10-20-30 является равнобедренным и прямоугольным.

4. а) 1; б) 1989.

а) Первый математический праздник был в 1990 году. Ясно, что год его проведения делится на его номер, потому что номер равен единице.

б) Пусть  $N$  – номер праздника. Тогда год его проведения равен  $(2006 - 17) + N = 1989 + N$ . Пусть год проведения делится на номер, т.е.  $1989 + N$  делится на  $N$ . Значит, 1989 делится на  $N$ . Поскольку мы ищем наибольшее  $N$ , то нужно взять  $N = 1989$ .

5. Например, сад может выглядеть так, как показано на рисунке 15.

Замечание. На самом деле, можно так расположить груши и яблони, что яблонь будет во много раз больше, чем груш. Расставим груши на

		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

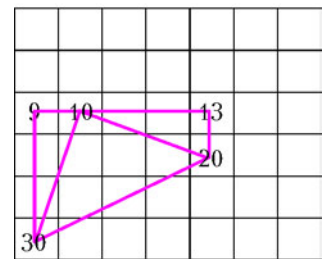


Рис. 14

одной прямой через равные расстояния так, чтобы расстояние между первой и последней не превосходило 20 метров. После этого берем

любые две груши (назовем их  $A$  и  $B$ ) и ставим яблоню в вершине равнобедренного треугольника с основанием  $AB$  и боковыми сторонами длиной 10 метров. Еще одну яблоню ставим симметрично этой яблоне относительно линии груш (рис.16). Значит, яблонь можно поставить вдвое больше числа пар груш, а оно равно  $\frac{n(n-1)}{2}$ . Мы

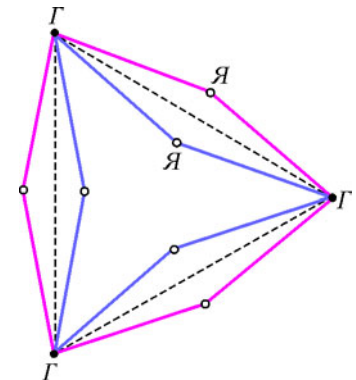


Рис. 15

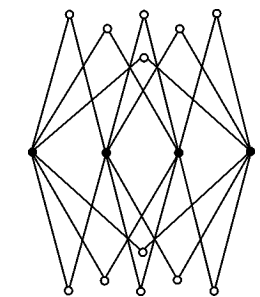


Рис. 16

сможем поставить  $\frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n(n-1)$  яблонь. Отметим, что в этом случае отношение числа яблонь и числа груш равно  $\frac{n(n-1)}{n} = n-1$ , значит, выбирая достаточно большие  $n$ , это отношение можно сделать сколь угодно большим.

6. а) Да; б) нет.

а) Сначала закрасим ряд длиной 9 клеток, содержащий изначально закрашенную клетку (рис.17). Далее будем красить

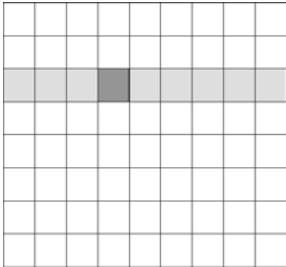


Рис. 17

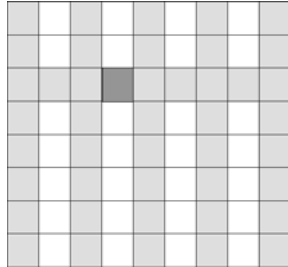


Рис. 18

столбцы через один, начиная закраску от клеток покрашенного ряда (рис.18). После этого закрасить оставшиеся клетки доски совсем просто.

*Замечание.* Данный способ покраски обобщается на тот случай, когда хотя бы одна из сторон прямоугольника имеет нечетную длину. Повернем прямоугольник так, чтобы его ширина была нечетной, а после этого повторим только что описанную процедуру: красим ряд нечетной длины и так далее.

б) Вот одно из возможных решений. Посмотрим на полупериметр фигуры, состоящей из закрашенных клеток. Вначале, когда закрасили одну клетку, полупериметр равен 2. На каждом шаге полупериметр или увеличивается на 1 (если у клетки была только одна соседняя закрашенная клетка) или уменьшается на 1 (если таких соседей было 3), т.е. полупериметр увеличивается или уменьшается на 1. Следовательно, когда закрашено четное число клеток, полупериметр закрашенной фигуры нечетен. Заметим, что полупериметр всего прямоугольника  $8 \times 10$  равен 18, т.е. четный, поэтому весь прямоугольник закрасить нельзя.

Задачи старших классов

8 класс

1. 982 школьника.

Пусть все задачи решили  $n$  школьников. Тогда хотя бы 5 задач решили  $4n$  человек, хотя бы 4 задачи –  $16n$  человек, ..., хотя бы одну задачу решили  $1024n$  человек. Следовательно,  $1024n \leq 2006$ , откуда получаем  $n \leq 2006 : 1024 < 2$ . Поскольку Вasy решил ровно одну задачу, то  $1024n > 0$ , откуда  $n > 0$ . Поэтому  $n = 1$ ; хотя бы одну задачу решили 1024 школьника, а значит, ни одной задачи не решили  $2006 - 1024 = 982$  школьника.

2. 7 чисел.

Приведем сначала пример таблицы, в которой ровно семь ненулевых чисел:

0	1	-1
-1	2	1
1	-1	0

Докажем, что меньшим количеством ненулевых чисел обойтись нельзя.

Если в таблице ровно одно ненулевое число, то сумма чисел в строке, содержащей это число, отлична от нуля.

Допустим, в таблице ровно три ненулевых числа. Если все они стоят в одной строке, то сумма чисел в любом столбце отлична от нуля. Если не все они стоят в одной строке, то в какой-нибудь строке стоит ровно одно ненулевое число и сумма чисел в этой строке не равна нулю.

Допустим, в таблице ровно пять ненулевых чисел. Тогда в таблице 4 нуля, значит, какие-то два нуля стоят в одной строке. Поскольку сумма чисел в этой строке равна нулю, все числа в этой строке – нули. Осталось заметить, что в столбце, в котором стоит оставшийся ноль, ровно два нуля, что невозможно.

3. Пусть  $D$  – середина стороны  $A_1B_1$  (рис.19). Тогда  $\angle C_1DA_1 = 90^\circ$ . Следовательно, четырехугольник  $CC_1DA_1$  – вписанный, откуда  $\angle DA_1C_1 = \angle DCC_1 = 45^\circ$  и  $\angle DC_1C = \angle DA_1A$ . Таким образом, треугольники  $DC_1C$  и  $B_1A_1A$  подобны по двум углам. Коэффициент подобия равен  $\frac{B_1A_1}{DC_1} = 2$ , поэтому  $AA_1 = 2CC_1$ .

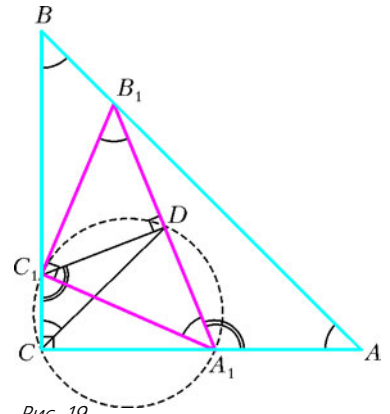


Рис. 19

4. Так как монет 9 и никакие две фальшивые не лежат рядом, то какие-то две настоящие монеты лежат рядом, а остальные монеты чередуются (рис.20). Заметим, что достаточ-

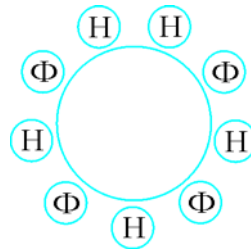


Рис. 20

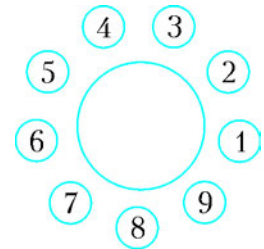


Рис. 21

но найти две настоящие монеты, лежащие рядом (этим расположение остальных монет определяется однозначно). Начав с произвольной монеты, пронумеруем монеты подряд числами от 1 до 9 (рис. 21). Взвешивать можно разными способами. Вот один из них.

Взвесим монеты 1 и 4. Возможны два случая.

- Монеты 1 и 4 весят одинаково. Взвесим монеты 2 и 3. Если 2 и 3 весят одинаково, то они настоящие, поскольку лежат рядом. Пусть одна монета тяжелее (фальшивая), будем считать, что это монета 2, тогда монеты 3, 1 и 4 настоящие. Монеты 3 и 4 – две настоящие рядом.
- Монеты 1 и 4 весят по-разному. Пусть монета 4 тяжелее (фальшивая). Тогда монеты 5, 3 и 1 – настоящие, а монета 2 – фальшивая. Взвесим монеты 9 и 6. Если они одинаково весят, то 7 и 8 – настоящие. Если же какая-то из них настоящая, то мы находим две настоящие рядом.

5. Пример изображен на рисунке 22 (важно, что режем не по клеточкам).

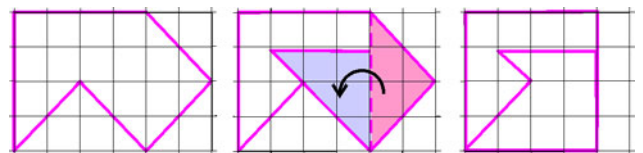


Рис. 22

6.  $n$  может быть любым натуральным числом, кроме 1, 2, 4, 5, 8 и 11.

Вычислим для каждой недели сумму Ваниных оценок за эту неделю. Посмотрим, как могла измениться сумма оценок на удачной неделе. Пусть оценки Вани ухудшились по  $x$  предметам. Тогда они улучшились хотя бы по  $x + 2$  предметам. Следовательно,  $x(x + 2) \leq 7$ , т.е.  $x \leq 2$ . Сумма оценок за те предметы, за которые оценки улучшились, возросла хотя бы на  $x + 2$ , а сумма оценок за те предметы, за которые оценки ухудшились, уменьшилась не более чем на  $2x$ . Поскольку  $x \leq 2$ , то  $2x \leq x + 2$ , т.е. уменьшилась сумма не больше, чем увеличилась. Таким образом, сумма Ваниных оценок не уменьшается, причем сохраниться она может только если по двум предметам оценки ухудшились на 2, а по четырем улучшились на 1.

Так как в итоге сумма оценок не увеличилась, а каждую неделю не уменьшалась, то она не изменялась все время наблюдения за успеваемостью. Следовательно, понижение оценки происходит всякий раз на 2 балла, а повышение – на 1 балл, т.е. для каждого предмета повышений оценки произошло в два раза больше, чем понижений. Таким образом, количество изменений каждой оценки кратно трем.

Пусть Ваня наблюдал за своей успеваемостью  $n$  недель, не считая первой. Посмотрим, чему может быть равно  $n$ . Рассмотрим следующие случаи.

• Пусть  $n$  кратно трем. Ниже представлен пример изменений оценок Вани при  $n = 3$ :

Первая неделя	5	5	3	3	4	4	5
1-я неделя наблюдений	3	3	4	4	5	5	5
2-я неделя наблюдений	4	4	5	5	3	3	5
3-я неделя наблюдений	5	5	3	3	4	4	5

Повторяя последние три недели  $k$  раз, получим пример для  $n = 3k$ .

• Пусть  $n = 3k + 1$ . Посмотрим на предмет, про который мы знаем, что оценка по нему менялась. Так как количество изменений оценки по этому предмету кратно трем, а  $n = 3k + 1$ , то была хотя бы одна неделя, на которой эта оценка не изменилась. В эту неделю все остальные оценки изменялись. Поэтому по всем предметам оценки когда-либо менялись, и значит, есть неделя (для каждого предмета – своя), когда оценка по этому предмету осталась без изменений. Поскольку предметов 7, число недель не может быть меньше семи. Ниже представлен пример изменений оценок Вани при  $n = 7$ :

Первая неделя	5	5	3	3	4	4	5
1-я неделя наблюдений	3	3	4	4	5	5	5
2-я неделя наблюдений	4	4	5	5	5	3	3
3-я неделя наблюдений	5	5	5	3	3	4	4
4-я неделя наблюдений	5	3	3	4	4	5	5
5-я неделя наблюдений	3	4	4	5	5	5	3
6-я неделя наблюдений	4	5	5	5	3	3	4
7-я неделя наблюдений	5	5	3	3	4	4	5

Добавляя по три недели из предыдущего случая, получим любое  $n$  вида  $3k + 1$ , большее семи.

• Пусть  $n = 3k + 2$ . Посмотрим на предмет, про который мы знаем, что оценка по нему менялась. Так как количество изменений оценки по этому предмету кратно трем, а  $n = 3k + 2$ , то были хотя бы две недели, на которых оценка по этому предмету не изменилась, а по остальным предметам оценка менялась. Аналогично предыдущему случаю, для каждого предмета есть хотя бы две недели, на которых оценка по этим предметам не менялась, а по всем остальным менялась, поэтому число недель не может быть меньше чем 14.

Пример для  $n = 14$  строится двукратным повторением примера для  $n = 7$ . Далее, очевидно, можно добавлять по три недели из примера первого случая.

**9 класс**

1.  $n = 37$ .

Если в первый день Вася съест  $a$  конфет, то за  $n$  дней он съест

$$a + (a + 1) + \dots + (a + n - 1) = \frac{n(2a - 1 + n)}{2}$$

конфет. Значит,  $\frac{n(2a - 1 + n)}{2} = 777$ . Следовательно,  $n$  делит  $2 \cdot 777 = 1554$ . Так как  $1554 = n(2a - 1 + n) > n^2$ , то  $n < 40$ .

Но максимальное число  $n$ , меньше 40 и делящее  $1554 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 37$ , равняется 37. Случай  $n = 37$  действительно возможен при  $a = 3$ .

2. Если нашелся школьник, не решивший ни одной задачи, то не будем его рассматривать. Аналогично, если есть задача, не решенная ни одним из школьников, то не будем ее рассматривать. По-прежнему все школьники решили разное количество задач, все задачи решены разным количеством школьников. Пусть осталось  $m'$  школьников и  $n'$  задач. Тогда  $m' \geq 1$ ,  $n' \geq 1$ . Если каждый из  $m'$  школьников решил от 2 до  $n'$  задач и все решили разное количество задач, то  $m' \leq n' - 1$ . Так как каждая из  $n'$  задач решена от 1 до  $m'$  школьниками и все задачи решены разным количеством школьников, то  $n' \leq m'$ . Противоречие. Значит, требуемый школьник найдется.

3. Рассмотрим окружности, описанные около данных прямоугольников (рис.23). Обозначим вторую точку их пересечения через  $X$ . Тогда  $\angle BXN = \angle B XK = 90^\circ$ . Значит, точки  $N, X, K$  лежат на одной прямой, перпендикулярной  $BX$ . Кроме

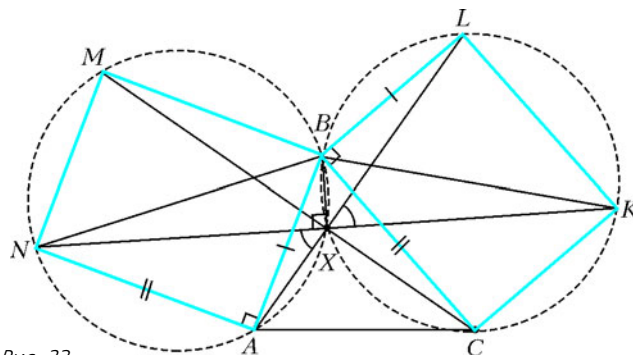


Рис. 23

того, треугольники  $NAB$  и  $KLB$  равны. Тогда  $\angle NXA = \angle NBA = \angle LBK = \angle L XK$ , значит, точки  $A, X, L$  также лежат на одной прямой. Аналогично, точки  $M, C, X$  лежат на одной прямой. Поэтому  $X$  – точка пересечения этих трех прямых.

4. Коэффициент при  $x^{4 \cdot 2006}$  в полученном выражении равен 1. Коэффициент при нулевой степени равен значению выражения при  $x = 0$ , т.е.  $2^{2006}$ . Сумма всех коэффициентов равна значению нашего выражения при  $x = 1$ , т.е.  $2^{2006}$ . Значит,

сумма первого и последнего коэффициентов больше суммы всех коэффициентов. Поэтому обязательно найдется отрицательный коэффициент.

5. На горизонтальном отрезке вниз построим полуокружность радиуса  $R$ , а вверх – две полуокружности радиуса  $R/2$  до середины отрезка (рис.24,а). Точка касания двух маленьких окружностей есть точка  $M$ . Проведем через точку  $M$  прямые

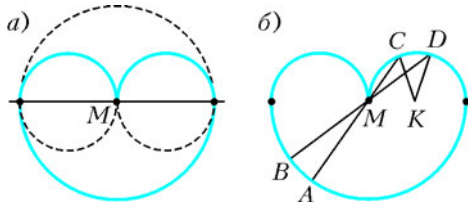


Рис. 24

$AC$  и  $BD$  (рис.24,б). Пусть  $K$  – центр окружности, на которой лежат точки  $C$  и  $D$ . Тогда длина дуги  $CD$  равна  $R/2 \cdot \angle CKD = R/2 \cdot 2\angle CMD = R \cdot \angle AMB$  и равна длине дуги  $AB$ .

6. Обозначим выбранные Борей числа по порядку  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ , а выбранные Мишей –  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$ . Достаточно доказать, что  $a_k \geq b_{6-k}$  для любого  $k$ . Рассмотрим ситуацию, когда Боря выбрал  $k-1$  число, а Миша выбрал  $5-k$  чисел. В Бориной копии таблицы еще не вычеркнуты числа на пересечении  $6-k$  столбцов. В Мишиной копии таблицы еще не вычеркнуты числа на пересечении  $k$  строк и  $k$  столбцов. Значит, найдутся строка и столбец, которые не вычеркнуты ни у Бори, ни у Миши, и пусть  $x$  – число на их пересечении. Тогда  $a_k \geq x \geq b_{6-k}$ .

**10 класс**

1. Нет.

Схематически изобразим графики двух данных трехчленов (рис.25). Из условия следует, что каждый из этих трехчленов при  $x = 1000$  принимает положительное значение. Следовательно, и их сумма в этой точке должна быть положительна.

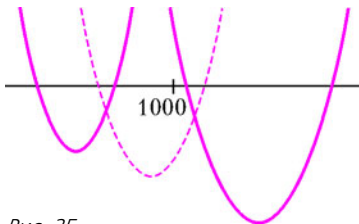


Рис. 25

График трехчлена, являющегося суммой данных, также располагается ветвями вверх. Пусть один из его корней больше тысячи, а другой – меньше тысячи. Тогда число 1000

располагается между корнями, т.е. значение трехчлена при  $x = 1000$  отрицательно (его график схематически изображен на рисунке 25 штриховой линией). Противоречие.

2. Нет, не может.

Пусть  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  – углы одного из данных треугольников. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma &= \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg}(\pi - (\alpha + \beta)) = \\ &= \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)(1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) - \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \\ &= -\operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что равенство  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$  верно для углов любого треугольника. Но в остроугольном треугольнике тангенс каждого угла положителен, поэтому их произведение положительно. В тупоугольном же треугольнике тангенс тупого угла отрицателен, а два других тангенса положительны, поэтому произведение трех тангенсов отрицательно.

3. Да.

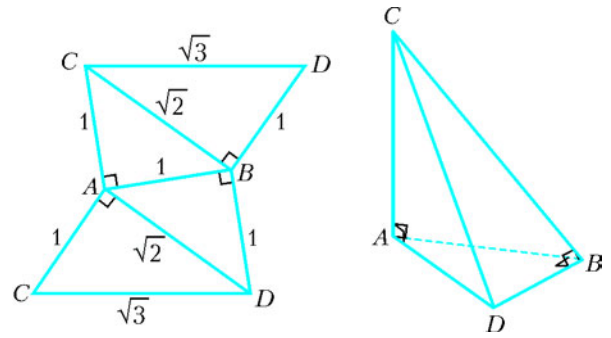


Рис. 26

Для этого надо взять тетраэдр  $ABCD$ , который вместе со своей разверткой показан на рисунке 26. Здесь  $CA = AB = BD$  и  $\angle CAB = \angle CAD = \angle ABD = \angle CBD = 90^\circ$ . Возможны несколько способов замощения пространства такими тетраэдрами.

*Первый способ.* Тетраэдр  $ABCD$  и симметричный ему относительно плоскости  $ADC$  образуют четырехугольную пирамиду с квадратным основанием, одно из боковых ребер которой перпендикулярно основанию и равно его стороне (рис.27). Из

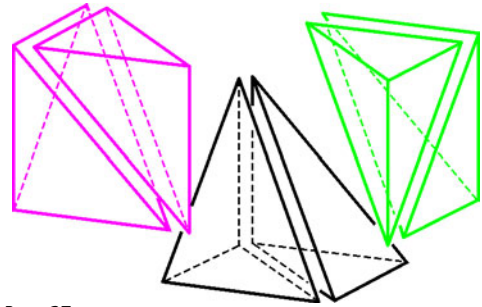


Рис. 27

трех таких пирамид можно составить куб, как показано на рисунке 28. Очевидно, что кубами пространство замостить можно.

*Второй способ.* Рассмотрим правильную четырехугольную пирамиду, образованную центром куба и его гранью. У нее есть четыре плоскости симметрии, разрезающие ее на 8 тетраэдров, подобных  $ABCD$ . Следовательно, куб можно разрезать на 48 таких тетраэдров.

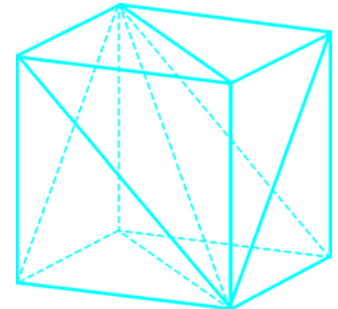


Рис. 28

*Третий способ.* Объединив тетраэдр  $ABCD$  и симметричный ему относительно плоскости  $ABC$ , получим тетраэдр, основанием которого является равнобедренный прямоугольный треугольник, а высотой – боковое ребро, проходящее через вершину прямого угла. Из двух таких тетраэдров, симметричных относительно общей боковой грани, составим тетраэдр с равнобедренным прямоугольным треугольником в основании и высотой, падающей в середину гипотенузы. Наконец, из двух таких тетраэдров можно составить тетраэдр, подобный  $ABCD$ . (Чтобы убедиться в этом, достаточно разрезать  $ABCD$  по плоскости, проходящей через  $A, B$  и середину  $CD$ .) Таким образом, из 8 тетраэдров, равных  $ABCD$ , можно составить подобный им тетраэдр вдвое большего размера. Повторяя этот процесс, получим искомое замощение пространства.

4. 11 коробок.

Ответ следует из общего факта: пусть количество карточек равно  $n$ , где  $2^{k-1} \leq n < 2^k$  ( $n, k$  – натуральные числа); тогда

требуется  $k$  пустых коробок. Сначала покажем следующее:  $k$  коробок достаточно, причем если  $n = 2^{k-1}$ , то не требуется использовать исходную коробку после того, как она освобождается. При  $k = 1$  утверждение тривиально. Пусть оно верно для некоторого натурального  $k$ .

Вначале пусть  $n = 2^k$ . Возьмем пустые коробки с номерами от 1 до  $k + 1$ . По предположению индукции можно перенести верхние  $2^{k-1}$  карточек в коробку номер  $k$ , используя коробки 1, ...,  $k$  и не используя исходную коробку, которая еще не пуста. Аналогично переносим нижние  $2^{k-1}$  карточек в коробку номер  $k + 1$ , используя коробки 1, ...,  $k - 1, k + 1$ . После этого подвергаем верхние карточки обратному переключиванию, заменив исходную коробку на  $(k + 1)$ -ю. В итоге все карточки будут переложены в коробку  $k + 1$ , причем мы не использовали исходную коробку после того, как она освободилась.

Пусть теперь  $2^k < n < 2^{k+1}$ . Вначале переложим, как описано выше,  $2^k$  карточек в коробку  $k + 1$ , используя коробки 1, ...,  $k + 1$ . Оставшиеся  $n - 2^k < 2^k$  карточек по предположению индукции можно переложить в коробку  $k$ , используя коробки 1, ...,  $k$ . Теперь подвергнем «верхние» карточки обратному переключиванию, заменив исходную коробку на  $k$ -ю. Для дальнейшего заметим, что если используется минимально возможное количество коробок, то все они окажутся одновременно занятыми не позже, чем мы освободим исходную коробку. Действительно, пусть это неверно. Отметим в начальный момент какую-то пустую коробку  $i$ . Пусть на некотором шаге мы кладем в нее карточку. Так как по предположению какая-то коробка будет после этого пуста, то можно заменить  $i$ -ю на эту коробку начиная с данного шага. Будем поступать так каждый раз, когда нужно класть карточку в коробку  $i$ . В итоге мы переложим нижнюю карточку в некоторую коробку  $j$ . После этого повторим все действия в обратном порядке, заменив исходную коробку на  $j$ -ю. Карточки будут переложены в коробку  $j$ , а коробка  $i$  использована не будет, т.е. количество коробок можно уменьшить.

Теперь покажем, что при  $2^{k-1} \leq n < 2^k$  потребуется не менее  $k$  коробок. При  $k = 1$ , 2 это тривиально. Пусть это верно для некоторого  $k \geq 2$  и пусть  $2^k \leq n < 2^{k+1}$ . Предположим, что можно обойтись  $k$  коробками. Разобьем исходную стопку карточек на верхнюю и нижнюю части, содержащие не менее чем по  $2^{k-1}$  карточек. В силу доказанного выше, в некоторый момент потребуется занять «нижними» карточками  $k$  коробок уже для того, чтобы освободить исходную. «Верхние» карточки не могут при этом находиться в исходной коробке (до этого шага она еще не пуста, а верхняя из «нижних» карточек уже снята). Значит, они находятся в некоторой другой коробке  $i$  на самой верхней из «нижних» карточек (обозначим ее  $a$ ). Так как «нижние» карточки занимают  $k > 1$  коробок, то карточка  $a$  еще должна быть переложена, чтобы все они оказались в одной коробке. Для этого потребуется в некоторый момент занять «верхними» карточками  $k$  других коробок. В них не могут находиться «нижние» карточки (так как непосредственно под «верхней» карточкой может находиться лишь карточка  $a$ , а она еще находится в коробке  $i$ ). Значит, все «нижние» карточки уже находятся в одной коробке – противоречие.

Таким образом, потребуется не менее  $k + 1$  коробок.

5. Пусть  $3n + 1 = a^2$ ,  $10n + 1 = b^2$ , где  $a, b \in \mathbf{N}$ , и пусть  $29n + 11$  равно простому числу  $p$ . Далее можно рассуждать разными способами. Вот один из них.

Перемножим указанные равенства, в результате получим  $30n^2 + 13n + 1 = (ab)^2$ . Вычитая из этого равенства верное равенство  $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ , получим  $29n^2 + 11n = (ab)^2 -$

$-(n + 1)^2$ . Отсюда  $np = (ab - n - 1)(ab + n + 1)$ . Хотя бы один из множителей в правой части делится на  $p$  и потому не меньше  $p$ . Во всяком случае,  $ab + n + 1 \geq p$ , откуда  $ab \geq 28n + 10$ . Возведем это неравенство в квадрат:  $(ab)^2 \geq 784n^2 + 560n + 100$ . С другой стороны,  $(ab)^2 = 30n^2 + 13n + 1$ , что противоречит предыдущему. Утверждение доказано.

Замечание. Условие задачи выполнено, например, при  $n = 8$ ,  $n = 96$ .

6. Пусть  $P'_a, P'_b$  и  $P'_c$  – проекции точки  $P$  на прямые, содержащие стороны треугольника (рис. 29; другие случаи расположения указанных точек рассматриваются аналогично). Докажем, что эти точки лежат на одной прямой. Действительно,  $\angle PP'_cP'_a = \angle PPB'_a = 180^\circ - \angle PBC = \angle PAC = 180^\circ - \angle PP'_cP'_b$ .

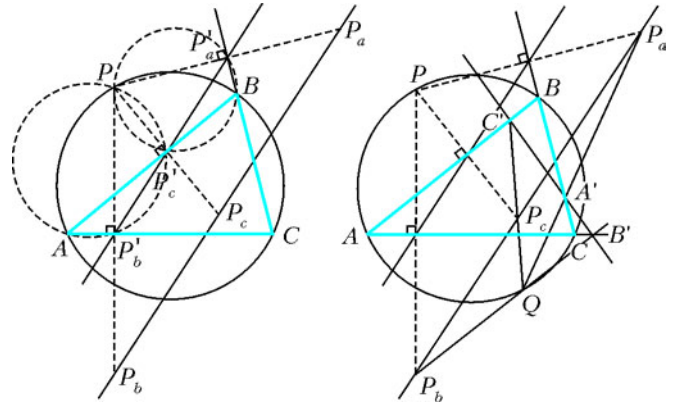


Рис. 29

Первое и последнее равенства верны в силу того, что четырехугольники  $PP'_aBP'_c$  и  $PP'_cP'_bA$  вписанные. Полученная прямая называется *прямой Симсона* точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$ . Следовательно, точки  $P_a, P_b$  и  $P_c$  также лежат на одной прямой, проходящей в два раза дальше от точки  $P$ , чем прямая Симсона. Аналогичное утверждение верно и для  $Q_a, Q_b$  и  $Q_c$  – точек, симметричных точке  $Q$  относительно сторон треугольника. Обозначим прямую, содержащую точки  $P_a, P_b$  и  $P_c$ , через  $l_p$ , а прямую, содержащую точки  $Q_a, Q_b$  и  $Q_c$ , – через  $l_q$ . Рассматриваемые в задаче точки  $A', B'$  и  $C'$  можно определить как точки пересечения пар прямых  $PQ_a$  и  $QP_a, PQ_b$  и  $QP_b, PQ_c$  и  $QP_c$ .

Пусть прямая, параллельная  $l_q$  и проходящая через  $P$ , пересекает  $l_p$  в точке  $X$  (рис. 30). Пересечение прямой, параллельной  $l_p$  и проходящей через  $Q$ , с прямой  $l_q$  обозначим через  $Y$ . Стороны треугольника  $PXP_a$  соответственно параллельны сторонам треугольника  $Q_aYQ$ , а значит, эти треугольники гомотетичны.

Прямые  $PQ_a, P_aQ$  и  $XY$  должны проходить через центр этой гомотетии, т.е. точку  $A'$ . Таким образом, точка  $A'$  лежит на прямой  $XY$ . Аналогично можно показать, что на этой прямой лежат точки  $B'$  и  $C'$ .

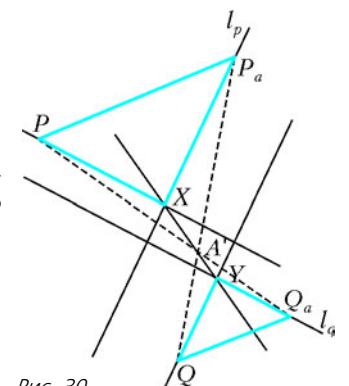


Рис. 30

11 класс

1.  $\pi/4$ .

Для искомой разности  $\delta$  возрастающей прогрессии

$$\alpha_1, \dots, \alpha_5 \in [0; 3\pi/2]$$

получаем  $\delta \in (0; \pi/2)$  и  $\cos \delta \neq 1$ . Рассмотрим следующие два случая, один из которых непременно имеет место:

•  $\alpha_3 \leq \pi$ , тогда  $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \leq \pi$  и  $\cos \alpha_1 > \cos \alpha_2 > \cos \alpha_3$ , откуда

$$2 \cos \alpha_2 = \cos \alpha_1 + \cos \alpha_3 = 2 \cos \frac{\alpha_3 + \alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2} = 2 \cos \alpha_2 \cos \delta,$$

поэтому  $\cos \alpha_2 = 0$  и  $\alpha_2 = \pi/2$  (а значит,  $\alpha_3 \geq \pi/2$ );

•  $\alpha_3 \geq \pi/2$ , тогда  $\pi/2 \leq \alpha_3 < \alpha_4 < \alpha_5 \leq 3\pi/2$  и  $\sin \alpha_3 > \sin \alpha_4 > \sin \alpha_5$ , откуда

$$2 \sin \alpha_4 = \sin \alpha_3 + \sin \alpha_5 = 2 \sin \frac{\alpha_3 + \alpha_5}{2} \cos \frac{\alpha_3 - \alpha_5}{2} = 2 \sin \alpha_4 \cos \delta,$$

поэтому  $\sin \alpha_4 = 0$  и  $\alpha_4 = \pi$  (а значит,  $\alpha_3 \leq \pi$ ).

Таким образом, оба случая имеют место, поэтому  $\alpha_2 = \pi/2$  и  $\alpha_4 = \pi$ , откуда  $\delta = \pi/4$ .

2.  $a = 5, b = 2$ .

Пусть натуральные числа  $a$  и  $b$  взаимно просты, а десятичная запись числа  $a$  имеет  $n$  знаков. Тогда условие задачи для них записывается в виде уравнения

$$a : b = \overline{b}, a \Leftrightarrow \frac{a}{b} = b + a \cdot 10^{-n} \Leftrightarrow 10^n (a - b^2) = a \cdot b,$$

из которого следует, в частности, что  $a > b$ . В силу взаимной простоты чисел  $a$  и  $b$ , числа  $a - b^2$  не имеет общих делителей ни с  $a$ , ни с  $b$ , следовательно, уравнение превращается в систему из двух уравнений

$$a - b^2 = 1, 10^n = a \cdot b.$$

В силу все той же взаимной простоты чисел  $a$  и  $b$  (с учетом неравенства  $a > b$ ), последнему уравнению удовлетворяют только пары чисел  $a = 10^n$  и  $b = 1$ , а также  $a = 5^n$  и  $b = 2^n$ . Первая пара при подстановке в первое уравнение дает для числа  $n$  уравнение  $10^n = 2$ , которое, очевидно, не имеет решений. Вторая пара чисел  $a$  и  $b$  при подстановке в первое уравнение дает для числа  $n$  уравнение

$$5^n - 4^n = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Так как его левая часть представляет собой возрастающую функцию от  $n$ , а правая – убывающую, то оно имеет не более одного корня, который угадывается:  $n = 1$ , откуда и находим единственную пару  $a = 5$  и  $b = 2$ .

3. Нет.

Разрежем конус по какой-либо образующей и изобразим на плоскости его развертку, представляющую собой плоский угол  $A_0OA_1$  величины  $\alpha$  (рис.31). След ленты на ней, изображающей первый виток, будет выглядеть как полоса с параллельными краями, проходящая от стороны  $OA_0$  к стороне

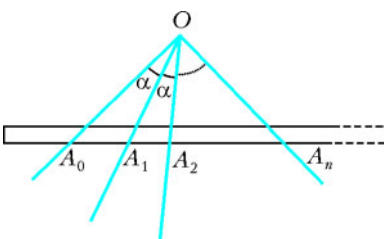


Рис. 31

$OA_1$ . Приложим к этому углу еще одну развертку конуса – угол  $A_1OA_2$  той же величины  $\alpha$ . Перейдя через сторону  $OA_1$  нового угла, след ленты продолжит ту же полосу на второй развертке, пока не дойдет до стороны  $OA_2$ , изобразив второй виток, и т.д. Если лента делает  $n$  витков, причем  $n > \pi/\alpha$ , то полоса (по условию, не проходящая через точку  $O$ ) пересекает лучи  $OA_0, OA_1, \dots, OA_n$ , что невозможно, так как тогда  $\pi > \angle A_0OA_n = n\alpha > \pi$ . Поэтому число  $n$  витков ленты не превышает  $\pi/\alpha$ , а значит, заведомо конечно.

4. Алиса.

Пусть Алиса независимо от действий Базилио берет первым

ходом 1 монету, вторым – 2, третьим – 3 и т.д., увеличивая каждый раз количество взятых монет на 1. Это не противоречит правилам, так как при такой игре Алисы Базилио сможет первым ходом взять 1 или 2 монеты, вторым – 2 или 3 и т.д. Тогда после  $k$ -го хода Алисы игроки возьмут монет не менее  $(1 + 2 + \dots + k) + (1 + 2 + \dots + (k - 1)) = k^2$

и не более

$$(1 + 2 + \dots + k) + (2 + 3 + \dots + k) = k(k + 1) - 1.$$

Так как  $1331 = 36 \cdot 37 - 1$ , то монет в любом случае хватит на 36-й ход Алисы. А так как  $36^2 = 1296$  и  $1331 - 1296 = 35$ , то монет в любом случае не хватит на 36-й ход Базилио. Таким образом, Алиса выиграет.

5. Искомое ГМТ – биссектриса угла без его вершины и фиксированной точки, а также отрезок, соединяющий основания перпендикуляров, опущенных из фиксированной точки на стороны угла (без концов). На рисунке 32 это луч  $AO$  без точек  $A$  и  $O$  и отрезок  $KL$  без точек  $K$  и  $L$ .

Пусть  $A$  – вершина данного угла,  $O$  – фиксированная точка на биссектрисе,  $OBC$  – рассматриваемый равнобедренный треугольник ( $OB = OC$ ) и  $M$  – середина стороны  $BC$ . Треугольник  $OBC$  может располагаться так, что  $AB = AC$ . При этом точка  $M$  лежит на биссектрисе  $AO$ , причем для любой точки  $M$  на биссектрисе  $AO$ , кроме точек  $A$  и  $O$ , можно построить равнобедренный треугольник  $OBC$  так, что  $M$  будет серединой отрезка  $BC$ . Таким образом, весь луч  $AO$ , кроме точек  $A$  и  $O$ , входит в искомое ГМТ.

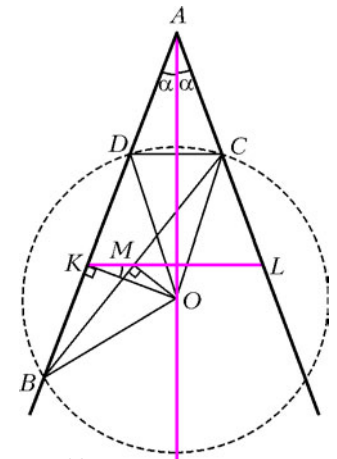


Рис. 32

Пусть теперь  $AB \neq AC$  (см. рис.32) и пусть  $D$  – точка, симметричная точке  $C$  относительно биссектрисы  $AO$ . Тогда  $D$  лежит на луче  $AB$  и  $OD = OC = OB$ . Опустим перпендикуляр  $OK$  на  $BD$ . Так как  $OB = OD$ , то  $BK = KD$  и, следовательно,  $KM$  – средняя линия в треугольнике  $BDC$ . Поэтому  $KM \parallel DC$  и  $KM \perp AO$ . Таким образом, в этом случае точка  $M$  обязана лежать на отрезке  $KL$  таком, что  $L$  и  $C$  принадлежат одной стороне угла,  $OK \perp AB$  и  $KL \perp AO$ .

Обратно, пусть  $M$  – любая точка указанного отрезка  $KL$ , не лежащая на биссектрисе и отличная от точек  $K$  и  $L$ . Проведем через  $M$  прямую, перпендикулярную  $OM$ . Пусть она пересекает стороны угла в точках  $B$  и  $C$  и пусть  $\angle BAO = \angle OAC = \alpha$ . Так как  $OK \perp AB$  и  $KM \perp AO$ , то  $\angle OKM = \angle BAO = \alpha$ . Поскольку  $\angle BKO = \angle BMO = 90^\circ$ , то точки  $B, K, M, O$  лежат на одной окружности. Отсюда  $\angle OBM = \angle OKM = \alpha$  (как вписанные). Тогда  $\angle OBC = \alpha = \angle OAC$  и, следовательно, точки  $A, C, O, B$  лежат на одной окружности. Так как  $\angle BAO = \angle OAC = \alpha$ , то равны хорды  $BO$  и  $OC$ . Таким образом, треугольник  $OBC$  равнобедренный и  $BM = MC$ , т.е.  $M$  входит в искомое ГМТ.

6. а) За 4, 7 и 10 у.е.;

б) за  $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil, \left\lceil \frac{2n}{k} \right\rceil, \dots, \left\lceil \frac{(k-1)n}{k} \right\rceil$  и  $\left\lceil \frac{kn}{k} \right\rceil = n$  у.е., где через  $\lceil x \rceil$

обозначено наименьшее целое число, не меньше  $x$ .

Пусть  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  – массы конфет в коробках стоимостью в 1, 2, ...,  $n$  у.е. соответственно, а  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$  – номера тех коробок, которые нужно купить.

1°. Докажем, что для искомого набора номеров должны быть



выполнены неравенства

$$n_j \geq \frac{jn}{k} \equiv m_j, \quad j = 1, \dots, k, \quad (*)$$

которые при  $n = 10$  и  $k = 3$  превращаются в оценки

$$n_1 \geq \frac{10}{3} = 3,3\dots, \quad n_2 \geq \frac{20}{3} = 6,6\dots, \quad n_3 \geq \frac{30}{3} = 10.$$

Действительно, предположим, что для некоторого  $j$  выполнено противоположное неравенство  $n_j < m_j$ . Тогда, например, в случае

$$a_1 = \dots = a_{n_j} = \frac{n_j}{n} < a_{n_{j+1}} = \dots = a_n = 1 + \frac{n_j}{n}$$

получаем

$$a_1 + \dots + a_n = n_j \frac{n_j}{n} + (n - n_j) \left(1 + \frac{n_j}{n}\right) = n,$$

$$\begin{aligned} a_{n_1} + \dots + a_{n_k} &= (k - j) \left(1 + \frac{n_j}{n}\right) + j \frac{n_j}{n} = \\ &= k - j + \frac{k}{n} n_j < k - j + \frac{k}{n} jn = k, \end{aligned}$$

т.е. нарушено требование задачи, а именно:

$$a_{n_1} + \dots + a_{n_k} < \frac{k}{n} (a_1 + \dots + a_n).$$

2°. Пусть теперь все неравенства (\*) верны. Докажем, что тогда требование задачи выполнено. Действительно, при  $n = 10$  и  $k = 3$  имеем

$$\begin{aligned} a_4 + a_7 + a_{10} &\geq \frac{a_2 + a_3 + a_4}{3} + \frac{a_5 + a_6 + a_7}{3} + \frac{a_8 + a_9 + a_{10}}{3} = \\ &= \frac{(9+1)a_2 + \dots + (9+1)a_{10}}{30} \geq \frac{9a_1 + 9a_2 + \dots + 9a_{10}}{30} = \\ &= \frac{3}{10} (a_1 + \dots + a_{10}), \end{aligned}$$

а в общем случае, обозначив  $n_j - m_j = \varepsilon_j \in [0; 1]$  и  $n_0 = m_0 = a_0 = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} a_{n_1} + \dots + a_{n_k} &\geq \\ &\geq \frac{a_1 + \dots + a_{n_1}}{n_1 - n_0} + \frac{a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}}{n_2 - n_1} + \dots + \frac{a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k}}{n_k - n_{k-1}} \geq \\ &\geq \frac{\varepsilon_0 a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + (1 - \varepsilon_1) a_{n_1}}{m_1 - m_0} + \\ &+ \frac{\varepsilon_1 a_{n_1} + a_{n_1+1} + \dots + (1 - \varepsilon_2) a_{n_2}}{m_2 - m_1} + \dots \\ &\dots + \frac{\varepsilon_{k-1} a_{n_{k-1}} + a_{n_{k-1}+1} + \dots + (1 - \varepsilon_k) a_{n_k}}{m_k - m_{k-1}} = \frac{k}{n} (a_1 + \dots + a_n), \end{aligned}$$

так как при каждом  $j$  справедливо равенство  $m_j - m_{j-1} = \frac{n}{k}$  и неравенство

$$\frac{a_{n_{j-1}+1} + \dots + a_{n_j}}{n_j - n_{j-1}} \geq \frac{\varepsilon_{j-1} a_{n_{j-1}} + a_{n_{j-1}+1} + \dots + (1 - \varepsilon_j) a_{n_j}}{m_j - m_{j-1}},$$

означающее, что *среднее значение функции* на промежутке уменьшается, когда этот промежуток меняют так, что к функции добавляются значения, меньшие ее среднего, и убавляются — большие: речь идет о ступенчатой функции  $f$ , задаваемой равенствами  $f(x) = a_j$  при  $j-1 < x \leq j$ , а под средним значением понимается ее интеграл по заданному промежутку, деленный на его длину, причем промежуток усреднения  $(n_{j-1}; n_j]$  заменяется промежутком  $(m_{j-1}; m_j]$ . Формально же

последнее неравенство выводится, например, из цепочки

$$\begin{aligned} (n_{j-1} - m_{j-1})(a_{n_{j-1}+1} + \dots + a_{n_j}) - \varepsilon_{j-1}(n_j - n_{j-1})a_{n_{j-1}} &= \\ = \varepsilon_{j-1} \left( (a_{n_{j-1}+1} - a_{n_{j-1}}) + \dots + (a_{n_j} - a_{n_{j-1}}) \right) &\geq 0 \geq \\ \geq \varepsilon_j \left( (a_{n_{j-1}+1} - a_{n_j}) + \dots + (a_{n_j} - a_{n_j}) \right) &= \\ = (n_j - m_j)(a_{n_{j-1}+1} + \dots + a_{n_j}) - \varepsilon_j(n_j - n_{j-1})a_{n_j}. \end{aligned}$$

Итак, стоимость набора из  $k$  коробок, удовлетворяющего требованию задачи, будет наименьшей для наименьших целых чисел  $n_j$ , удовлетворяющих неравенствам (\*).

## ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ МОСКОВСКОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

Первый теоретический тур

### 7 класс

- $p = \frac{\rho g R_3}{2} \approx 1,6 \cdot 10^{11}$  Па = 1,6 млн атм.
- $v_{\text{ср}} = v_1 = 70$  км/ч;  $t = \frac{s(v_3 - v_1)}{v_3(v_1 - v_2)} = 16$  мин.
- $x = \frac{m + \rho_l h S}{(\rho_v - \rho_l) S} = 1$  м.
- $h = \frac{T}{8\rho_c g a^2} \approx 0,32$  м.

### 8 класс

- На чашку с бутылкой нужно положить груз массой 2,6 г.
- $m_1 = \frac{cm(t_{\text{пл}} - t)}{\lambda} \approx 5,1$  г;  $t_{\text{уст}} = t_{\text{пл}} = 29,8^\circ\text{C}$ .

### 9 класс

- $m = \frac{M \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$ .
- $\tau = \frac{\lambda \rho_l \pi^2 d^2 (D^2 - d^2)}{16\rho l^2} \approx 19$  мин.
- $R_3 = \frac{R_1 R_4}{R_2} = 40$  Ом;  $R_{AB} = \frac{(R_1 + R_2) R_4}{R_2 + R_4} \approx 33$  Ом.
- $\alpha = \frac{\pi - \varphi}{2}$ , этот угол не зависит от угла падения солнечного света на зеркала.

### 10 класс

- $v(t) = v_0 \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin \varphi} + gt \operatorname{ctg} \varphi$ ,  $0 < t < \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$ .
- При  $\omega^2 R > \mu g$  шайба начнет скользить по доске при  $\alpha = 0$ ; при  $\omega^2 R \leq \mu g < g$  шайба начнет скользить при  $\alpha > \arctg \mu + \arcsin \frac{\omega^2 R}{g\sqrt{\mu^2 + 1}}$ .
- $l_2 = l_1 \frac{v_1^2}{v_2^2}$ .

### 11 класс

- Ускорение равно  $a = \omega^2 r \sqrt{2}$  и направлено к точке  $O$  под углом  $45^\circ$  к отрезку  $AO'$ .
- $a = 0$  при  $\min(\mu_1, \mu_2) > \operatorname{tg} \alpha$  и  $a = g(\sin \alpha - \min(\mu_1, \mu_2) \cos \alpha)$  при  $\min(\mu_1, \mu_2) < \operatorname{tg} \alpha$ .
- $v_1 = \frac{\hbar \omega}{(m_1 + m_2)c}$ ;  $v_2 = 0$ ;  $\Delta L = \frac{\hbar \omega}{c^2} \frac{L}{m_1 + m_2}$ ;  $\Delta m = \frac{\hbar \omega}{c^2}$ .

Второй теоретический тур

### 8 класс

- $\rho_n = \rho_0 \lambda^2$ .
- В первом случае установится температура  $0^\circ\text{C}$ , а во втором – температура

$$t = \frac{rm_{\text{II}} - \lambda m_{\text{I1}} + t_{\text{II}} c_{\text{II}} m_{\text{I1}} + t_{\text{II}} c_{\text{B}} m_{\text{II}}}{c_{\text{B}} (m_{\text{II}} + m_{\text{I1}})} \approx 28^\circ\text{C}.$$

$$3. N = \frac{1}{2} M g v \left( 1 - \frac{r}{R} \right).$$

### 9 класс

- $\mu = -\text{ctg}(\alpha + \beta) \approx 0,17$ .
- При  $m_3 \geq \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ .
- $S_2 = S_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ ;  $b_2 = \frac{V \alpha_2 (1 - \alpha_2)}{S_1 \alpha_1 + \alpha_2}$ ;  $k = \rho g S_1 \frac{\alpha_1 \alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_2 (1 - \alpha_2)}$ .
- $32,7 \text{ Ом} < R_1 < 38,6 \text{ Ом}$ .

### 10 класс

- $v_1 = v_0 \frac{R_0}{R_1}$ ;  $\alpha_1 = \alpha_0$ .
- а)  $T_{\text{max}} = T_{\text{min}} + \frac{Q_1}{(3/2)vR}$ ;  
б)  $Q_{3\text{отд}} = Q_1$ ,  $Q_{4\text{отд}} = Q_2 \frac{(3/2)vRT_{\text{min}}}{(3/2)vRT_{\text{min}} + Q_1}$ ;  
в)  $A_1 = A_3 = 0$ ,  $A_2 = Q_2$ ,  $A_4 = -Q_2 \frac{(3/2)vRT_{\text{min}}}{(3/2)vRT_{\text{min}} + Q_1}$ ;  
г)  $\eta = \frac{Q_1 Q_2}{(Q_1 + Q_2)((3/2)vRT_{\text{min}} + Q_1)}$ .
- $R = \frac{1}{4} \left( R_1 + R_2 + R_3 + \frac{1}{(1/R_1) + (1/R_2) + (1/R_3)} \right)$ .

### 11 класс

- Ускорение равно

$$a = g \frac{\sqrt{(2m_1 m_3)^2 + (m_2 (m_3 - m_1) - m_1^2)^2}}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_3) + m_1 m_3}$$

и направлено под углом  $\varphi = \text{arctg} \frac{m_2 (m_3 - m_1) - m_1^2}{2m_1 m_3}$  к горизонтали.

$$2. \tau_0 \approx \lambda \frac{\rho_{\text{г}}}{\rho_{\text{ж}}} \approx 10^{-10} \text{ м}, \quad m_0 \approx \frac{\lambda^3 \rho_{\text{г}}^3}{\rho_{\text{ж}}^2} \approx 10^{-27} \text{ кг}.$$

$$3. \text{ а) } U = \frac{rU_0 + R(\mathcal{E} - U_0)}{r + R} = 2,6 \text{ В};$$

б) на резисторе и на правом диоде выделится одно и то же количество теплоты

$$Q = \frac{CR^2}{2} \left( \left( \frac{\mathcal{E} - 2U_0}{r + R} \right)^2 + \frac{I_0 U_0}{R} \right) = 1,68 \cdot 10^{-4} \text{ Дж},$$

на левом диоде тепло выделяться не будет.

$$4. \omega = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}};$$

$$I_1(t) = \frac{L_1 I_1^0 - L_2 I_2^0}{L_1 + L_2} + \frac{L_2 (I_1^0 + I_2^0)}{L_1 + L_2} \cos \omega t,$$

$$I_2(t) = \frac{L_2 I_2^0 - L_1 I_1^0}{L_1 + L_2} + \frac{L_1 (I_1^0 + I_2^0)}{L_1 + L_2} \cos \omega t;$$

$$Q(t) = \frac{I_1^0 + I_2^0}{\omega} \sin \omega t.$$

### ТОЧКА ВНЕ ОКРУЖНОСТИ

(см. «Квант» №3)

1. 5.
2.  $\arcsin \frac{a}{b}$ .
3. 5.
4. 9.
5.  $\sqrt{ab}$ .
6.  $7 + 4\sqrt{3}$ .
7.  $\frac{a-r}{a+r}$ .
8. 13.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»

kvant.info

Московский центр непрерывного математического образования

kvant.mcsme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»

math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»

seemat.ru

журнал ©  
**Квант**

### НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**А.А.Егоров, С.П.Коновалов,  
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

### НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк,  
А.Е.Пацхверия, В.М.Хлебникова**

### ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

### КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева**

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ  
по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»;

тел.: 930-56-48;

e-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info,

phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени

«Чеховский полиграфический комбинат»

142300 г.Чехов Московской области

Тел./факс: (501) 443-92-17, (272) 6-25-36

E-mail: marketing@chpk.ru

## ШАХМАТЫ ФИШЕРА

Хотя Роберт Фишер уже более трех десятилетий не совершал открытий за шахматной доской, ему принадлежат два весьма ценных изобретения: часы Фишера и шахматы Фишера. О первом из них у нас уже шла речь, теперь обратимся к фишерским шахматам.

В «Кванте» не раз рассказывалось о различных играх с участием необычных фигур, досок и правил. Однако получить новую игру можно совсем просто: достаточно в исходной позиции переставить некоторые фигуры. В результате классическая теория дебютов полностью теряет свое значение. Пешки обычно остаются на своих местах, а фигуры тем или иным способом размещаются за лешечным чстоколом. Всего начальных позиций такого рода существует более 25 миллионов.

Гроссмейстер Давид Бронштейн лет тридцать назад предложил поступать так: белые и черные фигуры ставятся за пешками, но с одним ограничением — слоны у каждой стороны должны быть разноцветные. В такие шахматы еще в 1978 году Бронштейн сыграл матч с американским гроссмейстером Бисгайером и победил 3,5 : 0,5.

Вот, наконец, мы и подошли к фишерским шахматам, главная особенность которых заключается в нестандартной начальной позиции. Пешки стоят на обычных местах, а расположение фигур за ними определяется жребием. При этом должны выполняться три условия: 1) слоны разноцветные, 2) ладьи находятся по разные стороны от короля, 3) белые и черные фигуры симметричны. Как показывает подсчет, всего расстановок, удовлетворяющих этим условиям, существует 960. Поэтому фишерские шахматы имеют и другие названия — рэндом («random» можно перевести с английского как «выбранный наугад») или рэндом-960.

Идея таких шахмат не оригинальна — только что мы упомянули подобное изобретение Бронштейна, правда, у него не требуется соблюдать второе и третье условия. Однако благодаря авторитету Фишера именно его шахматы приобрели популярность в мире, в том числе среди гроссмейстеров. Дело дошло до того, что теперь каждый год проходит матч на первенство мира по фишерским шахматам. Но об этом чуть ниже.

Смысл игры заключается в том, чтобы, сохраняя основные принципы шахмат, избавиться от плавания в бесконечном море дебютных вариантов и от изнурительной домашней подготовки,

связанной прежде всего с применением компьютеров. И правда, в современных шахматах собственное творчество начинается после 30 ходов, а то и позже.

Чтобы игра стала состязанием интеллектов, а не голый памяти, Фишер и предложил свой вариант. В нем классическая дебютная теория полностью отпадает, и самостоятельная борьба начинается с первых ходов. А если компьютер когда-нибудь просчитает классическую игру до конца, то шахматисты смогут воспользоваться «запасным аэродромом». Можно сказать, что Фишер позаботился о будущем шахмата! Правда, не факт, что в рэндоме человеку будет легче сражаться с компьютерами, чем в классике...

Хотя все позиционные и комбинационные принципы в фишерских шахматах сохраняются, мигельшиль тоже часто протекает нестандартно. А вот в эндшпиле уже невозможно определить, из какой игры он возник. Судя по всему, обычная начальная позиция (частный случай рэндома) наиболее содержательна, недаром она создана древним мудрецом и выдержала испытания многовековой историей.

В рэндом-турнирах исходную расстановку предлагает компьютер — перед каждым туром на мониторе высвечивается одна из 960 возможных позиций, с которой начинаются все сегодняшние партии. Исходное положение часто неизвестно игрокам до тех пор, пока они не сядут за доску.

Можно, кстати, использовать не все 960 позиций, а сократить их число до 20–30, ведь многие режут глаз, лишены гармонии.

Перед тем как перейти к партиям, надо обсудить правило рокировки в фишерских шахматах. Поскольку король и ладья часто занимают нестандартные исходные места, сначала предлагалось вообще отказаться от рокировок. Все же этот старинный элемент игры решено было сохранить.

В конце концов был принят следующий вариант. При рокировках — и короткой, и длинной — независимо от начального расположения короля и ладьи обе фигуры занимают те же места, что и в классических шахматах. При короткой рокировке (участвует ладья, которая стоит справа от короля) белый король попадает на g1, ладья на f1; соответственно, черный король — на g8, ладья на f8. При длинной рокировке (участвует ладья, которая стоит слева от короля) белый король попадает на c1, ладья на d1; черный король — на c8, ладья на d8. Конечно, предполагается, что все необходимые поля свободны и после рокировки ко-

роль не попадает под шах (а ладья не запрещено встать под удар).

Надо признать, что рокировки в рэндоме довольно необычны, и на первых порах игрокам, даже гроссмейстерам, трудно к ним привыкнуть. Пусть, например, в исходной позиции белый король стоит на b1 между ладьями a1 и c1. Черные ведут наступление на ферзевом фланге, а тот благодаря короткой рокировке неожиданно перебегает с b1 на ...g1, ладья c1 подтягивается к нему на f1.

На гроссмейстерском уровне фишерские шахматы впервые были опробованы в конце XX века. Одним из тех, кто активно поддерживал их, был, конечно, Давид Бронштейн. На рубеже веков был сыгран ряд показательных партий, в которых за доску сидели известные шахматисты. А летом 2001 года в немецком городе Майнце в рамках шахматного фестиваля впервые состоялся серьезный матч — венгр Петер Лекко в трудной борьбе выиграл у англичанина Майкла Адамса.

Адамс — Лекко

Майнц, 2001



1. c4. В данной начальной позиции такой ход ведет к ослаблению боевой короля. 1...g6. Завбавно, что слон оказывается на большой дороге, не двигаясь с места 2. d3 f5 3. ♘c3 e5 4. f4 d6 5. fe de 6. g4 ♘c6 7. ♘:c6 ♗:c6 8. gf g f 9. e3 ♗ge7 10. ♗e1 ♗e6 11. ♗c2 0-0-0 (король на c8, ферзевая ладья на d8). 12. 0-0-0 (король на c1, ферзевая ладья на d1). 12... ♗g6 13. b3 ♗f6 14. e3 f4 15. ef ♗:f4 16. ♗e4. Плохо и 16. ♗:f4 из-за ответа 16... ♗g5.

16... ♗g5 17. ♗b1 ♗g6 18. ♗:g6 hg 19. d4 ed 20. ♗:d4 ♗:d4 21. ♗:d4. Позиция приобрела знакомые очертания, и тут Лекко наносит решающий удар. 21... ♗d5! 22. ♗:f8 ♗:c3+ 23. ♗c2 ♗:f8 24. ♗g4. Не меняет дела 24. ♗:c3 ♗f6 24... ♗f6 25. a3 ♗e5 26. ♗:g6 e4 27. b4 ♗f2+ 28. ♗d3 ♗c5+ 29. ♗c3 ♗a2 30. ♗f3 ♗a1 31. h5 ♗:a3 32. h6 ♗:b3+-. Белые сдались.

Е.Гук

## Физики и математики на монетах мира



В настоящее время техникой для создания голограмм обладают тысячи лабораторий мира. Одна из голограмм – с инициалами ДЕННИСА ГАБОРА (1900 – 1979) – представлена на юбилейной венгерской монете достоинством в 3000 форинтов, выпущенной в 2000 году к столетию со дня рождения великого изобретателя. На оборотной стороне монеты представлен портрет Денниса Габора и факсимильное воспроизведение его подписи.  
(Подробнее о голографии и ее изобретателе – внутри журнала.)