ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

1. 49 км. Меньшие числа очевидно не годятся; бóльшие тоже не годятся: иначе на одной стороне некоторого столба написано число 49, а на другой — натуральное число (а сумма цифр любого натурального числа больше нуля).

2. Например, таковы число 1995, число 2 и 1993 единицы.

3. а) Не всегда. Если на всех 28 крайних клетках доски стоят фигуры, то оставить более 4 фигур нельзя.
б) Всегда. Каждую фигуру соединим с фигурами, находящимися с ней на одной вертикали или горизонтали. Получим ломаные, звенья которых параллельны сторонам доски (рис. 1). У любой такой ломаной чётное число вершин. Снимем с доски фигуры через одну по обходу каждой ломаной.

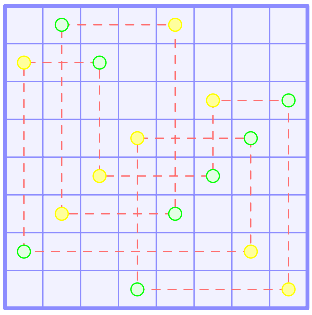


Рис. 1

4. Раскройте скобки.

5. Для любого натурального n число $(n+1)(n+2)\ldots(2n)$ делится на 2^n и не делится на 2^{n+1}. Это легко доказать по индукции, проверив базу и заметив, что

$$\frac{(n+2)(n+3)\ldots(2n)(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}=\frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1}=2(2n+1)$$

делится на 2 и не делится на 4.

Можно обойтись и без индукции:

$$\frac{(n+1)\ldots(2n-1)\cdot 2n}{2^n}=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n(n+1)\ldots(2n-1)\cdot 2n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot 2^n}=$$
$$=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-1)\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}=1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)$$

— нечётное число.

6. *Первый способ.* В произведении

$$N=1\cdot(1\cdot 2)\cdot(1\cdot 2\cdot 3)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5)\cdot\ldots\cdot(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 100)$$

множитель 1 участвует 100 раз, 2 — 99 раз, 3 — 98 раз, и так далее вплоть до единственного множителя 100. Значит,

$$N=2^{99}\cdot 3^{98}\cdot 4^{97}\cdot 5^{96}\cdot\ldots\cdot 99^2\cdot 100,$$

так что $N=a^2\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\cdot 98\cdot 100$, где $a=2^{49}\cdot 3^{49}\cdot 4^{48}\ldots 97^2\cdot 98\cdot 99$ — натуральное число. Вынесем из чётных чисел по двойке:

$$N=a^2\cdot 2^{50}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 49\cdot 50.$$

Следовательно, достаточно зачеркнуть $50!$.

Второй способ. Поскольку $(2k-1)!\cdot(2k)!=((2k-1)!)^2\cdot 2k$ для любого натурального k, то $N=\left(1!\cdot 3!\cdot 5!\cdot\ldots\cdot 97!\cdot 99!\cdot 2^{25}\right)^2\cdot 50!$.

7. Проведите прямую через центр прямоугольника и середину отрезка, соединяющего центры кругов.

8. Пусть a_1, a_2, $\ldots$, a_8 — номера горизонталей ладей, расположенных соответственно на первой, второй, ..., восьмой вертикалях. Равенство

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + 8a_8 = 8(9 - a_1) + 7(9 - a_2) + \ldots + 2(9 - a_7) + (9 - a_8)$$

равносильно равенству $9(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_8) = (8 + 7 + \ldots + 2 + 1) \cdot 9$.

9. Если в верхней строке стоят числа a, b, c, а в центре — d, то квадрат имеет вид, изображённый на рисунке 2. Магичность равносильна равенству $a+b+$ $+c=3d$. Осталось проверить тождество

$$a^2+b^2+(3d-a-b)^2=(a+b-d)^2+(2d-b)^2+(2d-a)^2.$$

a	b	c
$d+c-a$	d	$a-c+d$
$a+b-d$	$a+c-d$	$b+c-d$

Рис. 2

10. а), б) Если второй игрок будет делать ходы, центрально симметричные ходам противника, то в итоге симметричные клетки разделятся поровну между игроками, а центральная достанется второму игроку.

11. 12. Если Андрей заставил Борю взять x спичек, то в первой кучке не меньше 1 спички, во второй не менее $1+x$ спичек, в третьей не менее $1+2x$, в четвёртой не менее $1+3x$, в пятой не менее $1+4x$, а в шестой не менее $1+5x$. Следовательно, $1+(1+x)+(1+2x)+(1+3x)+(1+4x)+(1+5x) \leqslant 200$, откуда $x<13$. С другой стороны, $1+14+27+40+53+65=200$.

12. После каждой операции разрезания количество кусков увеличивается на 5 или на 11; после m разрезаний на 6 кусков и n разрезаний на 12 кусков имеем $1+5m+11n$ кусков.

а) Перебрав значения $m=0$, 1, 2 и 3, убеждаемся, что ни при каких целых неотрицательных m и n величина $1+5m+11n$ не равна 40.

б) Очевидно, $1+5\cdot 8+11\cdot 0=41$, $1+5\cdot 6+11\cdot 1=42$, $1+5\cdot 4+11\cdot 2=43$, $1+5\cdot 2+11\cdot 3=44$ и $1+5\cdot 0+11\cdot 4=45$. Поскольку $1+5(m+1)+11n=$ $=(1+5m+11n)+5$, любое большее 40 натуральное число можно получить, начав с одного из чисел 41, 42, 43, 44, 45 и прибавив нужное количество пятёрок.

13. Министры, которые живут не выше 5-го этажа, идут пешком; остальных министров лифтёр поднимает на 14-й этаж; сумма количеств неудовольствий равна $0+2(1+2+3+4)+8+7+6+5+4+3+2+1+0+2(1+2+3+4)=76$.

14. а) Нельзя. Иначе 13 клеток диагонали удалось бы разбить на пары.

б) Можно отметить все клетки, кроме клеток левого столбца. Или клетки второго, пятого и восьмого столбцов.

15. а) Один из маршрутов изображён на рисунке 3. Нетрудно доказать, что замкнутый маршрут невозможен.

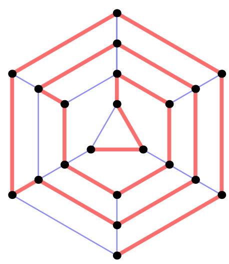


Рис. 3

б) Нет. Города можно разбить на две группы из 10 и 12 городов так, чтобы при любом обходе города из разных групп чередовались между собой (рис. 4).

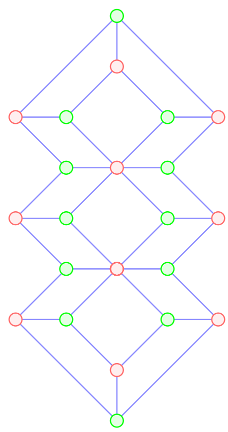


Рис. 4

16. Нельзя. Занумеровав лампы, начиная с горящей, по кругу числами от 1 до 12, видим, что среди ламп, номера которых не делятся на 3, количество горящих всегда нечётно.

17. Для любых трёх множеств A, B и C имеем:

$$B \triangle C = (A \triangle B) \triangle (A \triangle C) \subseteq (A \triangle B) \cup (A \triangle C).$$

18. Для любой расстановки скобок число 1 окажется в числителе, а 2 — в знаменателе. Число 7 имеет три представления:

$$7 = \frac{1 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9}.$$

Им соответствуют такие расстановки скобок:

$$\begin{aligned} 7 &= ((((1:2):3):4):5):((((6:7):8):9):10) = \\ &= 1:((2:(3:(((4:5):6):7))):((8:9):10)) = \\ &= 1:(((2):3):((4:((5:6):(7:8))):(9:10))). \end{aligned}$$

19. Степени двойки: 1, 2, 4, 8, ... Для любых натуральных чисел m и k верна формула

$$m + (m+1) + \ldots + (m+k) = \frac{(k+1)(2m+k)}{2}.$$

Сомножители в числителе разной чётности, поэтому один из них нечётен, причём больше 1. Поэтому сумма нескольких последовательных натуральных чисел не может быть степенью двойки.

Любое натуральное число n, не являющееся степенью двойки, представимо в виде $n = 2^r(2s+1)$, где r — целое неотрицательное число, а s — натуральное. При $2^r > s$ годятся $k = 2s$ и $m = 2^r - s$, а при $2^r \leqslant s$ можно взять $k = 2^{r+1} - 1$ и $m = s + 1 - 2^r$.

20. $1995 = 7 + 8 + 9 + \ldots + 63$.

21. $18n$.

22. $(10^n - 1)^2 = 10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1 = \underbrace{99\ldots9}_{n-1}800\ldots01$.

23. 1366. После первого вычёркивания остаются чётные числа 2, 4, 6, ..., 1994. После второго вычёрчивания получится последовательность 2, 6, 10, 14, ..., 1994. Это числа, которые при делении на 4 дают остаток 2, так что после второго вычёркивания на k-м месте стоит число $4k - 2$.

Априори, число может стать единственным как после чётного, так и после нечётного числа вычёркиваний. Но в любом случае можно считать, что было сделано чётное число вычёркиваний: если единственным число стало после нечётного числа вычёркиваний, то после следующего «вычёркивания» (при котором на самом деле ничего не вычёркивают) оно так и останется единственным.

Воспользуемся этими соображениями, чтобы найти остающееся последним число. В конце концов оно оказывается на первом месте. Значит, перед двумя последними вычёркиваниями оно стояло на $4 \cdot 1 - 2 = 2$ месте, за два вычёркивания до этого — на $4 \cdot 2 - 2 = 6$-м, ещё за два вычёркивания — на $4 \cdot 6 - 2 = 22$-м месте. Следующее продвижение даёт $4 \cdot 22 - 2 = 86$, затем $4 \cdot 86 - 2 = 342$ и, наконец, $4 \cdot 342 - 2 = 1366$.

24. а) Один из маршрутов — на рисунке 4.

б) Нет. Пусть угловые клетки — чёрные. Каждая из 16 чёрных клеток, расположенных на краю доски, должна быть связана с одной из 12 чёрных клеток, имеющих общие вершины с крайними. Но 16 более чем на 1 больше числа 12.

25. Воспользуйтесь тождеством а) $(b-3)(b-1)(b+1)(b+3)+16=(b^2-5)^2$; б) $(a-3)(a-2)(a-1)(a+1)(a+2)(a+3)+36=(a^3-7a)^2$; в) $c^2+c^2(c+1)^2+(c+1)^2=(c^2+c+1)^2$.

26. $a(a+2)^3-(a+1)(a-1)^3=(2a+1)^3$.

27. а) Обозначим $a_1 = a$ и $a_2 = b$. Тогда $a_3 = \frac{b+1}{a}$; $a_4 = \frac{\frac{b+1}{a}+1}{b} = \frac{a+b+1}{ab}$; $a_5 = \frac{\frac{a+b+1}{ab}+1}{\frac{b+1}{a}} = \frac{a+1}{b}$; $a_6 = \frac{\frac{a+1}{b}+1}{\frac{a+b+1}{ab}} = a$; $a_7 = \frac{a+1}{\frac{a+1}{b}} = b$. Последовательность периодическая с периодом 5; следовательно, $a_{1997} = a_2 = 1855$.
б) Последовательность периодическая с периодом 8.

28. Поскольку $1995 = 399 \cdot 5$, слово состоит из 399 пятибуквенных слов, а любое пятибуквенное слово, как легко убедиться, является палиндромом или может быть разбито на два палиндрома. Подробнее об этой задаче можно прочитать в статье А. Баабабова ««Пентиум» хорошо, а ум лучше», «Квант» №5 за 1999 год.

29. а) Занумеруем места числами от 1 до 12 подряд по часовой стрелке. Обозначим через a_m номер места, на которое сел дипломат, ранее сидевший на m-м стуле. Если остатки от деления разностей $a_m - m$, где $1 \leqslant m \leqslant 12$, на число 12 все разные, то среди них встречаются бы по одному разу все остатки от 0 до 11, так что

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant 12} (a_m - m) \equiv 0+1+2+\ldots+11 \pmod{12},$$

откуда

$$0 = \sum_{1 \leqslant m \leqslant 12} a_m - \sum_{1 \leqslant m \leqslant 12} m \equiv 66 \not\equiv 0 \pmod{12}.$$

б) Для каждого числа $m = 0, 1, \ldots, 11, 12$, пересадим дипломата, сидевшего в первый раз на m-м месте, на место номер $2m \bmod 13$, то есть на место номер $2m$, если $m \leqslant 6$, и на место номер $2m - 13$, если $7 \leqslant m \leqslant 12$.

30. Пусть $m = x+2y+5z+10t+20u+50v+100w$ и $n = x+y+z+t+u+v+w$. Умножив второе равенство на 100, получим $100n = 100x + 50 \cdot 2y + 20 \cdot 5z + 10 \cdot 10t + 5 \cdot 20u + 2 \cdot 50v + 1 \cdot 100w$, что вместе с первым равенством даёт требуемый результат.

31. Гусейну Гуслия достались кошельки с 5 и 7 таньга. Читайте статью А. Котовой «Награда калифа» в «Кванте» №2 за 2000 год.

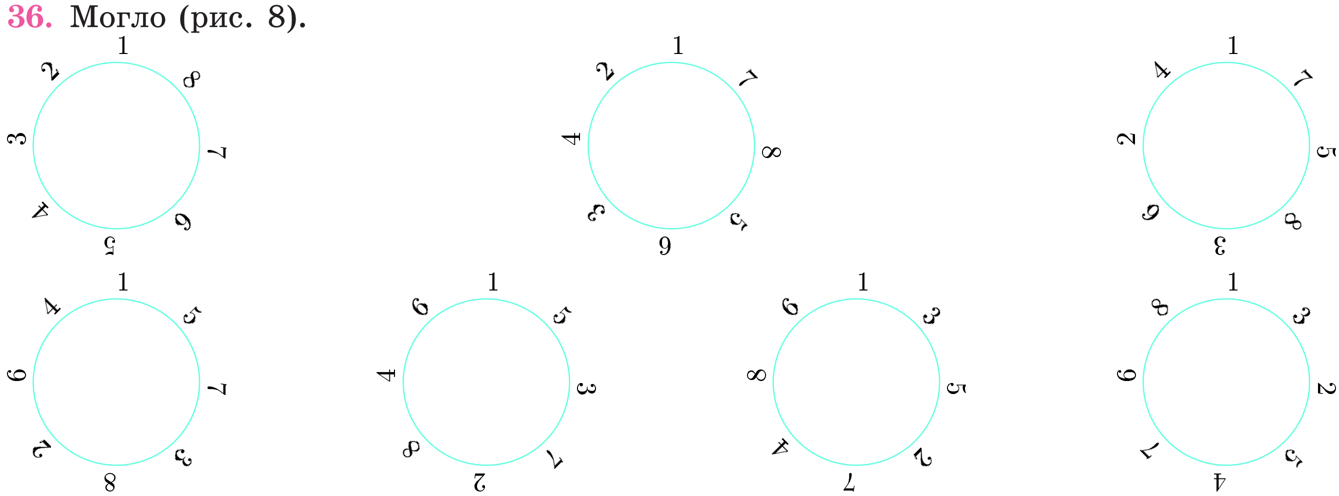
32. Бегемот — травоядное животное; он рыбу не ел. Пусть гавиал (разновидность крокодила) съел x рыб, а пеликан — y. Тогда кашалот съел $y \cdot \frac{y}{x} = y^2/x$ рыб. Из неравенства $37 > 3x$ получаем $x \leqslant 12$. Составив уравнение $x + y + \frac{y^2}{x} = 37$ и по очереди подставив в него значения $x = 1, 2, \ldots, 12$, находим ответ: гавиал съел 9 рыб, а пеликан — 12.

33. Поскольку сумма количеств проигрышей всех игроков равна сумме количеств выигрышей, то вничью должна закончиться треть всех игр.
а) Поскольку $C_{17}^2 = \frac{17\cdot 16}{2}$ не делится на 3, ответ отрицательный.
б) Расположите 16 команд вдоль окружности. Пусть каждая команда выиграла у следующих за ней по часовой стрелке пяти команд, со следующими пятью сыграла вничью, а остальным пяти проиграла.
в) Разбейте 15 команд на 5 троек по 3 команды в каждой и расположите эти тройки по кругу. В каждой тройке команд пусть первая и вторая команды сыграли между собой вничью и обе — обыграли третью команду. Во встречах команд из разных троек вничью сыграют первая с первой, вторая со второй и третья с третьей. Каждая команда выиграет у команд, входящих в две следующие за её тройкой по часовой стрелке тройки команд (кроме команд, с которыми ничьи).

34. Нет. $11 - 2 = 9$ нельзя представить в виде суммы двух неотрицательных целых чисел, разность которых кратна 11.

35. а) Раскрасим клетки таблицы в шахматном порядке и посчитаем сумму чисел чёрных клеток двумя способами (рис. 5 и 6). Из равенства $5s = 6s$ следует равенство $s = 0$.
б) Нет (рис. 7).

36. Могло (рис. 8).



37. а) Посмотрите на рисунки 9 и 10. б) Например, короли — на полях a1, a8, h1 и h8, ферзи — b3, d7, e2 и g6, слоны — a5, c5, f4 и h4 (рис. 11) или a5, c1, f8 и h4.

38. 959595.

39. 50 (рис. 12). Разобьём квадрат 10×10 на 25 квадратиков размером 2×2 каждый. Ни в одном из них не может быть более двух высокооплачиваемых чиновников.

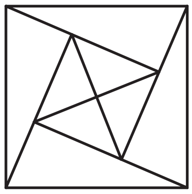
40. Каждая вершина 1000-угольника должна быть вершиной квадрата или хотя бы одного пятиугольника; но $199 \cdot 5 + 4 = 999 < 1000$.

41. 9.

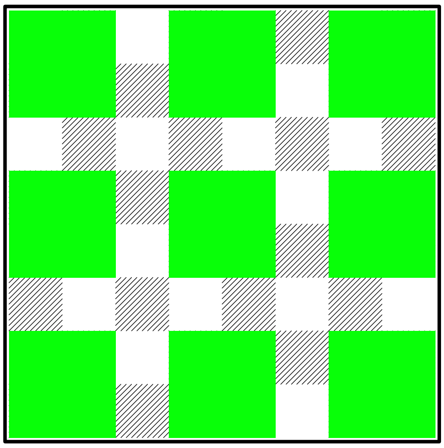
42. Наибольшее количество цветов — пять.

43. В 11 цветов.

44. Смотрите рисунок 13.



45. Рассмотрите 9 квадратов размером 2×2, закрашенных на рисунке 14.



46. 11. Сумма всех чисел таблицы равна сумме чисел закрашенной на рисунке 15 фигуры. Эта сумма не превосходит числа 11, поскольку сумма пяти чисел, образующих «уголок» (два таких уголка помечены на рисунке звёздочками) не превосходит числа 4. С другой стороны, нетрудно построить пример таблицы, где сумма равна 11 (рис. 16).

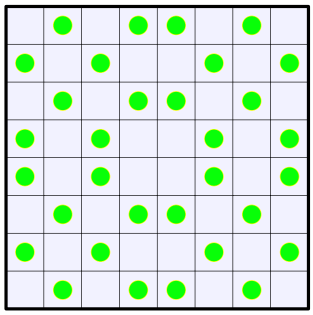
47. а) Например, $10! - 1$. б) Легко понять, что остаток от деления на 2 равен 1, на 4 — 3, на 8 — 7, на 3 — 2, на 6 — 5, а остаток от деления на 10 равен 9. Значит, число имеет вид $120k - 1$, где $k \in \mathbb{N}$. Перебором находим ответ: 599.

48. а) Рассмотрим вторую, четвёртую, шестую и восьмую горизонтали. Чтобы сумма номеров соответствующих ладей была максимальной, эти четыре ладьи должны стоять на четырёх правых вертикалях. Независимо от их расположения

в этом случае сумма их номеров равна 122. Аналогично, ладьи первой, третьей, пятой и седьмой горизонталей должны стоять на четырёх левых вертикалях, при этом сумма их номеров равна 154. Таким образом, максимальная сумма равна $122 + 154 = 276$.
б) Ферзей можно расставить так, чтобы сумма номеров равнялась 276 и ферзи не били друг друга (рис. 17).

Рисунок из номера 4 за 1996 год, страница 57

49. 32.



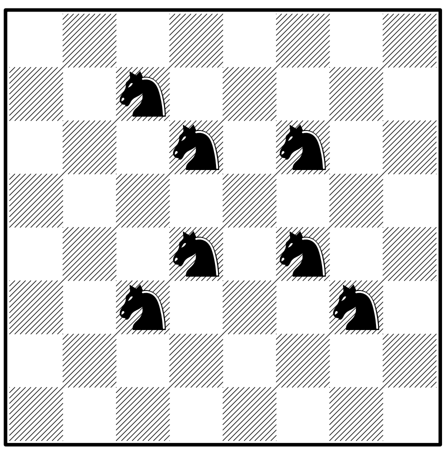
50. 95. Поскольку РОЩА $\leqslant 9876$, ДУБ $\geqslant 102$ и $9876 : 102 < 97$, то количество ДУБов не превосходит 96. Поскольку $96 \cdot 102 = 9792$, $96 \cdot 103 = 9888$, $96 \cdot 104 = 9984$ и $96 \cdot 105 > 9999$, то число 96 не подходит. А значение 95 подходит: $103 \cdot 95 = 9785$.

51. $111\,111 = 13 \cdot 8\,547$. Значит, можно взять А $= 1$ и СТУК $= 8\,547$. Докажем, что меньше 13 слагаемых быть не может. В самом деле, если слагаемых 12, то цифра А должна быть чётной, но $222\,222 : 12 > 10\,000$. Если же слагаемых 11 или меньше, то достаточно заметить, что $111\,111 : 11 = 10\,101$ — пятизначное (а, значит, слишком большое) число.

52. Углы при помощи параллельных переносов можно расположить так (рис. 18), что они вместе составят угол величиной 45°.

53. $a = -1$ и $b = 1$.

54. 7 (рис. 19).



55. Для любого.

56. Пусть m_1, m_2, ..., m_{10} — массы скульптур; тогда $|m_1 - m_2|$, $|m_2 - m_3|$, ..., $|m_{10} - m_1|$ — массы шаров. Рассмотрим тождество

$$(m_1 - m_2) + (m_2 - m_3) + \ldots + (m_9 - m_{10}) + (m_{10} - m_1) = 0.$$

Очевидно, сумма модулей положительных скобок равна сумме модулей неположительных скобок.

57. Если на трёх попарно смежных гранях написаны числа $a \leqslant b \leqslant c$, то $|c - a| = |c - b| + |b - a|$. Поскольку у куба есть четыре несоседние вершины, то все 12 пар смежных граней можно разбить на четыре тройки попарно смежных граней.

58. На две чаши весов можно разложить поровну не только все 100 гирек, но и любые 4 рядом стоящие гирьки.

59. Не может. Так как путь замкнут, начальным положением можно считать ситуацию, когда конь находится в нижнем горизонтальном ряду. Через несколько ходов он должен оказаться в верхнем горизонтальном ряду. Для этого он должен сместиться по вертикали на 7 клеток. Поскольку конь должен вернуться обратно, то сумма перемещений по вертикали не менее $7 + 7 = 14$ клеток. Аналогично, сумма перемещений по горизонтали не менее 14 клеток. Значит, сумма перемещений не менее 28 клеток. За каждый ход конь смещается на $2 = 1 = 3$ клетки; за 8 ходов — на $3 \cdot 8 = 24$ клетки. Но $24 < 28$.

60. На доске всего 60 перегородок между клетками, а сумма чисел, которые окажутся в клетках, равна количеству перегородок.

61. Посмотрите на рисунки 20 и 21.

Рис. 1

Рис. 2

62. 12.

63. 24.

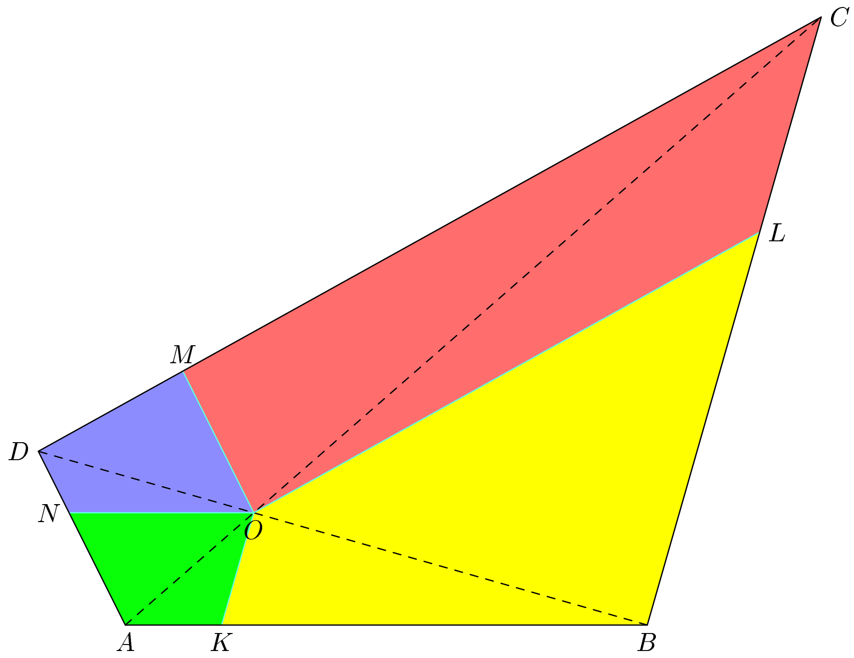
64. Могут.

65. а) Равенство $xy + (a - x)(b - y) = x(b - y) + (a - x)y$ равносильно равенству $(2x - a)(2y - a) = 0$.

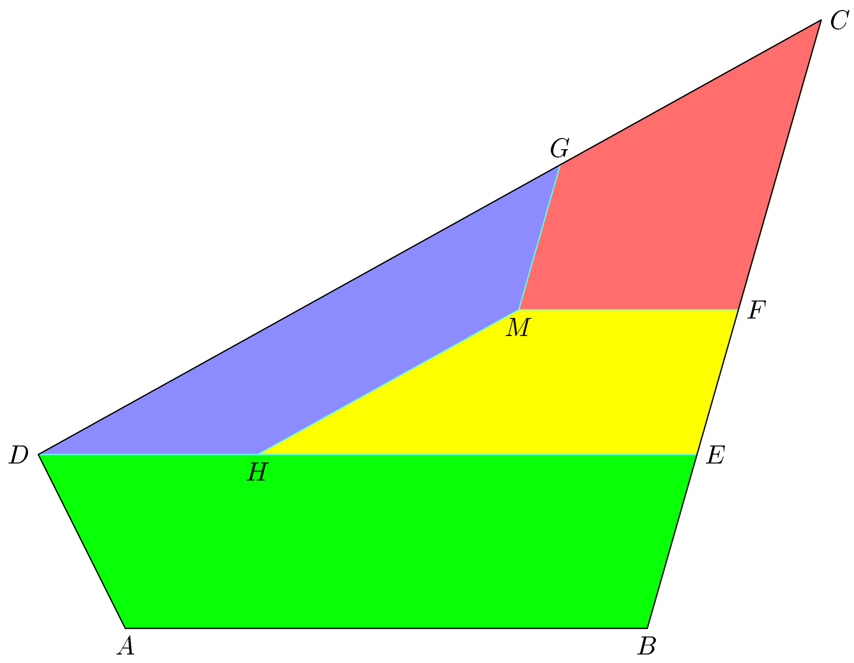
б) Переставим все чётные вертикальные полоски вправо, а нечётные влево (рис. 22), после чего все чётные горизонтальные полоски вниз, а нечётные вверх (рис. 23). Получим четыре прямоугольника: два чёрных и два белых. Докажите, что одна из прямых, проходящих по сторонам этих прямоугольников, делит площадь квадрата пополам; выведите отсюда утверждение задачи.

66. 11. Раскрасив клетки фигуры в шахматном порядке, заметьте, что в каждом из получающихся при разрезании прямоугольников разность числа чёрных и белых клеток не превосходит 1.

67. *Первый способ.* Если O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$, то на сторонах AB, BC, CD и DA можно взять такие точки K, L, M и N, что $OK \parallel BC$, $OL \parallel CD$, $OM \parallel DA$ и $ON \parallel AD$ (рис. 24).



Второй способ. Если исходный четырёхугольник — трапеция или параллелограмм, достаточно соединить середины его противоположных сторон. Если же точки B и C лежат на разных расстояниях от прямой AD, пусть для определённости C дальше, чем D. Проведём $DE \parallel AB$, выберем внутри треугольника CDE произвольную точку M и проведём отрезки $FM \parallel DE$, $GM \parallel BC$ и $HM \parallel CD$ (рис. 25).



68. 236. Если было x человек и $x+6$ марсиан, причём у каждого марсианина на руках y пальцев, то $(x+6)(10+y)+1=20x$, откуда $(x+6)(10+y)+121=(x+$ $+6)\cdot 20$, то есть $121=(x+6)(10-y)$, так что $x+6=121$ и $y=9$. Во встрече участвовали 115 человек и 121 марсиан.

69. а) Посмотрите на рисунок 26.

70. Если $v_1<v_2<v_3$ — скорости гонщиков, то $v_2:v_1=(a+k):a$, $v_3:v_2=(b+$ $+k):b$ и $v_3:v_1=(c+k):c$, где a, b, c — натуральные числа, взаимно простые с числом k. Поскольку $\frac{v_3}{v_1}=\frac{v_3}{v_2}\cdot\frac{v_2}{v_1}$, то

$$\frac{c+k}{c}=\frac{b+k}{b}\cdot\frac{a+k}{a},$$

откуда $ab=ac+bc+ck$. Если k чётно, то взаимно простые с ним числа a, b и c нечётны и в левой части равенства оказывается нечётное число, а в правой — сумма двух нечётных и чётного.

71. Нет. Если $a<b<c<d$ — числа, причём числа b и c кратны разности $d-a$, то $c-b$ делится на $d-a$, хотя $0<c-b<d-a$.

72. Можно. В фунте 20 шиллингов, в шиллинге 12 пенсов.

73. Нельзя. Сумма масс гирь равна 5050 г. Поэтому самая тяжёлая кучка весит не менее 505 г и, следовательно, состоит не менее чем из 6 гирь. Но $6+7+8=$ $=9+10+11+12+13+14+15=105>100$.

74. Пусть $n>1$. Меньшее из искомых чисел должно оканчиваться на несколько девяток, а следующее — на столько же нулей. Рассмотрим число $\underbrace{11\ldots11}_{n-2}\underbrace{99\ldots99}_{x}$

и следующее за ним число $\underbrace{11\ldots11}_{n-2}2\underbrace{00\ldots00}_{x}$. Их суммы цифр равны $n-1+9x$ и n соответственно.

Лемма. *Если n не делится на 3, то уравнение $9x-1=ny$ имеет решение в натуральных числах k и m.*

Доказательство. Если n при делении на 9 даёт остаток 1, 2, 4, 5, 7 или 8, то можно взять соответственно $y=8$, 4, 2, 7, 5 или 1.

75. Если существуют два непересекающихся красных отрезка, то любая расположенная между ними точка принадлежит всем синим отрезкам. Если же любые два красных отрезка пересекаются, то самый левый из правых концов красных отрезков принадлежит всем красным отрезкам.

76. Нет. Пример — число 300.

77. На рисунке 27 король сделал 49 диагональных ходов. Как доказать, что число 49 максимально возможное? Каждый диагональный ход проходит через один «узел» — общую точку 4 клеток шахматной доски. Всего узлов 49. Два раза пройти через один и тот же узел без самопересечения пути невозможно.

Этой и аналогичным задачам посвящена статья И. Акулича «Прогулки короля» в «Кванте» №3 за 2000 год.

78. а) Предположим, все последние цифры сумм — разные. Поскольку сумм столько же, сколько цифр, то все цифры должны встретиться по одному разу. Сложим их. Получится число $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$, оканчивающееся цифрой 5.

С другой стороны, если сложим все 10 сумм, о которых говорится в задаче, то получим число

$$(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)\cdot 2=110,$$

оканчивающееся на 0, а не на 5.
б) Для длин 51 отрезков есть 51 возможность. Чтобы все длины были разными, необходимо, чтобы среди длин встретились все возможности.

79. Поскольку запрещено красить соседние стороны в один цвет, стороны нечётноугольника нельзя раскрасить в два цвета. Трёх красок, как легко понять, хватит в любом случае. Теперь можно предложить выигрышную стратегию для второго игрока: в ответ на первый ход AB первого игрока он красит второй краской сторону CD, расположенную через одну от стороны AB (рис. 28). Если после этого первый игрок закрасит сторону BC, то он вынужден будет применить третью краску и утратит шансы на победу — не будет же второй игрок применять четвёртую краску, если можно ограничиться тремя! На любой другой ход первого игрока второй может отвечать симметричным образом (точнее говоря, второй игрок будет закрашивать другой краской сторону, симметричную только что закрашенной первым игроком стороне относительно прямой l — серединного перпендикуляра к BC).

80. Дословно — решение задачи 358 страниц 116–118 приложения к номеру 3 за 2003 год.

81. $a_{1998} = 1\,997\,001$. Докажем по индукции формулу $a_n = n(n+1)/2$. *База:* $1 \cdot (1+1)/2 = 1$. *Переход:* если $a_n = n(n+1)/2$, то из равенства $(a_{n+1} - a_n)^2 = a_{n+1} + a_n$ получаем квадратное уравнение

$$a_{n+1}^2 - (2a_n + 1)a_{n+1} + a_n^2 - a_n = 0.$$

Его дискриминант равен

$$(2a_n + 1)^2 - 4(a_n^2 - a_n) = 8a_n + 1 = 4n(n+1) + 1 = (2n+1)^2.$$

Значит, $a_{n+1} = \frac{2a_n+1\pm(2n+1)}{2}$. Поскольку $a_{n+1} > a_n$, надо брать знак плюс, а не минус; следовательно, $a_{n+1} = (n^2 + n + 1 + 2n + 1)/2 = (n+1)(n+2)/2$.

82. Нет. Поскольку треугольники ABD, BCE, CDA, DEB и EAC покрывают всю внутренность пятиугольника $ABCDE$, точка M лежит внутри одного из них. Пусть, для определённости, она находится внутри треугольника ABD. Тогда прямая MD пересекает сторону AB пятиугольника и разбивает его на два четырёхугольника.

83. Читайте статью И. Акулича «Кушай яблочко, мой свет!» в «Кванте» №4 за 2005 год.

84. Ладья, стоящая у края доски, не может быть под боем более чем трёх ладей. Пусть некоторая ладья L не стоит у края. Бить её со всех четырёх сторон ладьи не могут. Сдвинем в направлении, где нет ладей, ладью L на край доски. Одну за другой, все ладьи можно сдвинуть на край. Следовательно, существует расстановка с максимальным количеством ладей, в которой все они стоят у края; количество ладей не превосходит 28.

Расстановка, когда на 28 крайних клетках стоят ладьи, удовлетворяет условию задачи.

85. 240. Пусть $d_0 = 0$, d_k — количество дождливых дней с 1-го по k-е июня, где $k = 1, 2, \ldots, 30$. Тогда для любых k и j, $1 \leqslant k \leqslant j \leqslant 30$, количество дождливых дней в период с k-го по j-е июня есть $d_j - d_{k-1}$. Количество промежутков, в каждом из которых нечётное число дождливых дней, равно количеству пар чисел разной чётности среди чисел $d_0, d_1, \ldots, d_{30}$. Если n чисел этого набора четны, а остальные нечётны, то имеется ровно $n(31-n)$ пар чисел разной четности. Осталось заметить, что наибольшее значение выражения $n(31-n)$ равно $15 \cdot 16 = 240$. Это значение достигается, например, если 15 июня — дождливый день, остальные — солнечные.

86. Король, снятый с доски, мог бить не более 4 из оставшихся (иначе хотя бы два из них били бы друг друга). Поэтому число оставшихся королей не может превосходить числа снятых более чем в 4 раза, то есть не может быть больше 12. Пример изображён на рисунке 29: снимая с доски 4 чёрных короля, оставляем 12 белых, никакие два из которых не бьют друг друга.

87. Для каждого положения блохи измерим расстояние до начала дуги, на которой она находится. Если блоха перепрыгнет на соседнюю дугу, то расстояние уменьшится на сумму длин перепрыгнутых дуг. Когда рассматриваемое расстояние станет меньше длины самой короткой дуги, блоха будет скакать по всем дугам.

88. Нет. Раскрасим доску, как показано на рисунке 30. Заняв своим вторым ходом одно из полей, отмеченных крестиком, и затем перемещая свой квадрат только по этим полям, Миша будет следить только за тем, чтобы самому не перевернуть свой квадрат на Борин. Боря не сможет накрыть Мишин квадрат, поскольку после каждого хода Бори цвет полей, накрытых большим квадратом, не будет совпадать с цветом поля, на котором лежит маленький квадрат.

89. Передвиньте квадрат параллельно одной из его сторон так, чтобы одна из вершин оказалась на границе полосы (рис. 31). Проведя из этой вершины высоту полосы, рассмотрите полученные пары равных треугольников.

90. а) Заполним таблицу, написав в каждую клетку количество способов пройти в неё от буквы М (рис. 32). Искомое число — сумма чисел правого столбца: $51 + 76 + 69 + 44 + 20 + 6 + 1 = 267$.
б) Заполним ту же таблицу, поставив в каждой клетке количество способов дойти до конца слова (рис. 33). Если к некоторой букве от начала можно прийти m способами, а от неё к концу — n способами, то, изымая эту клетку, мы уменьшаем количество способов на mn. Заполним третью таблицу, поставив в каждую клетку произведение соответствующих чисел первой и второй таблиц (рис. 34). Чтобы получить 145 способов, следует изъять клетку с числом 122, то есть букву «Р» второй строки.

91. Пример укладки — на рисунке 35.

92. Рассмотрим правильные треугольники, стороны которых параллельны сторонам сетки. Количество таких треугольников со стороной длины k равно $(n-k+2)(n-k+1)/2$. Каждый из этих треугольников определяет k троек точек на своей границе, образующих равносторонний треугольник. Таким образом, общее число треугольников равно

$$\frac{1\cdot(n+1)n + 2\cdot n(n-1) + 3\cdot(n-1)(n-2) + \cdot + n\cdot 2\cdot 1}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24},$$

как легко доказать по индукции.

93. Поскольку $(1 + 2 + 3 + \ldots + 8)/2 = 18$, числа надо расставлять так, чтобы сумма на каждой грани равнялась 18. Можно разместить на одной грани кубика числа 1, 4, 7 и 6, а напротив них — числа 8, 5, 2 и 3 соответственно.

94. а) Не всегда: возможна ситуация, изображённая на рисунке 36. Княжества изображены точками, которые соединены отрезком в тех и только тех случаях, когда соответствующие княжества ещё не воевали.

95. Если начинающий сделает первый ход на 49-ю клетку и каждым следующим ходом будет ходить на клетку с максимально возможным номером, то он победит.

96. Расстановки изображены на рисунках 37 и 38.

97. Обозначим $d = \text{НОД}(a; b; c)$. Если $d = 0$, то $a = b = c = 0$. Если же $d \neq 0$, обозначим $x = a/d$, $y = b/d$ и $z = c/d$. Поскольку $x(x + y) = y(y + z)$, то x^2

делится на y. Аналогично, y^2 делится на z, а z^2 делится на x. Если бы число x делилось на некоторое простое число p, то z тоже делилось бы на p, а потому и y делилось бы на p, что противоречит равенству НОД$(x; y; z) = 1$. Значит, $|x| = 1$. Аналогично, $|y| = |z| = 1$. Перебором убеждаемся, что равенства задачи выполнены лишь при $x = y = z = 1$ и при $x = y = z = -1$.

98. Рассмотрим «крест» из 19 кнопок, который состоит из некоторой кнопки K и всех кнопок, находящихся с K в одном вертикальном или горизонтальном ряду. Нажатие любой из них, отличной от K, меняет состояние 10 кнопок, а нажатие любой кнопки, не входящей в крест, меняет состояние двух кнопок креста. Поэтому изменить чётность числа светящихся кнопок рассматриваемого креста невозможно, не нажав кнопку K.

С другой стороны, нажав по одному разу на каждую из 100 кнопок, мы изменим состояние каждой кнопки 19 раз и тем самым погасим все кнопки.

99. Может. Воспользуйтесь неравенством $2^{16} < 100\,000$.

100. Сумма равна $(1 + 2 + 3 + \ldots + 9)(1 + 2 + 3 + \ldots + 9)(1 + 2 + 3 + \ldots + 9) =$ $= 45^3 = 91\,125$.

101. *Первый способ* — индукция. При $n = 1$ годится любое число. Пусть для некоторого натурального n существуют такие натуральные числа a_1, a_2, ..., a_n, что произведение любых двух из них делится на их разность. Рассмотрим произведение $p = a_1 a_2 \ldots a_n$. Новый набор можно составить из чисел p, $p + a_1$, $p + a_2$, ..., $p + a_n$.

Второй способ. Годятся числа $n! : k$, где $k = 1, 2, \ldots, n$.

102. Возможно. Например, пусть игрок номер k играет с игроком номер $45^2 - k =$ $= 2025 - k$, если $29 \leqslant k \leqslant 1996$, номер $49 - k$, если $21 \leqslant k \leqslant 28$, номер $36 - k$, если $16 \leqslant k \leqslant 20$, наконец, $16 - k$, если $1 \leqslant k \leqslant 15$.

103. Не может: среди 100 последовательных натуральных чисел чисел, кратных 64, одно или два. В последнем случае одно из таких двух чисел кратно 128.

104. Могло.

105. 32 из 64 клеток доски покрасим, как показано на рисунке 39. У каждой доминошки осталась непокрашенной одна половина. Докрасив все доминошки, получим требуемую раскраску.

106. Пусть $A_1 A_2 \ldots A_{2n-1} A_{2n}$ — замкнутая ломаная, каждое звено которой имеет общую точку со звеном $A_1 A_2$. Тогда вершины A_3, ..., A_{2n-1} находятся по одну сторону от прямой $A_1 A_2$, а вершины A_4, ..., A_{2n} — по другую. Но тогда звенья $A_1 A_{2n}$ и $A_2 A_3$ не пересекаются.

107. 48.

108. Рассмотрим какие-нибудь три кнопки, образующие прямоугольник размером 3×1. Легко проверить, что, нажимая только эти клетки, можно погасить все светящиеся клетки рассматриваемого прямоугольника.

Рассмотрим квадрат 3×3. Пусть A, B и C — трёхклеточные столбики этого квадрата. Погасим сначала все клетки левого столбца A, затем — правого столбца C и после этого — среднего столбца B. Кнопки из A и C, которые останутся светящимся, будут расположены симметрично относительно столбца B. Погасим теперь все светящиеся клетки столбца A и — по той же схеме — все светящиеся клетки столбца C. Клетки в A и C все погашены, а клетки в B поменяли своё состояние чётное число раз и поэтому тоже погашены.

Аналогичная процедура позволяет погасить и все клетки прямоугольника 3×7: достаточно выделить два квадрата 3×3 по краям, столбик 1×3 в центре. А от прямоугольника 3×7 можно перейти к квадрату 7×7.

109. Разрежем прямоугольник, как показано на рисунке 40, и, перегнув бумагу, положим заштрихованные прямоугольники на незаштрихованные.

110. 9 дней. В невисокосном году это могут быть 1 февраля, 1 марта, 1, 3, 10, 17, 24, 31 мая и 1 ноября, а в високосном году — 1 января, 1 апреля, 1 июля, 1, 2, 9, 16, 23 и 30 сентября.

111. Любые три подряд идущих месяца, среди которых нет февраля, содержат в сумме не меньше $13 \cdot 7$ дней.

112. Это таблица рисунка 41.

113. Четыре. Числа 112, 113, 114, 211, 212, 213, 214, 311, 312, 313, 314, 411, 412, 413, 414 и 111 дают 16 разных остатков от деления на 16. Трёх цифр, как нетрудно проверить, не хватит.

114. Опустите перпендикуляры из центра ромба на его стороны.

115. *Первый способ.* Обозначив через x, y, и z расстояния от центра O окружности до сторон BC, CA и AB (рис. 42), треугольник ABC разобьём на треугольники ABO, BCO, CAO и, записав для каждого из них формулу площади, получили для площади S треугольника ABC формулу $S = \frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2}$, где $a = BC$, $b = CA$ и $c = AB$. Сравним её с формулой $S = r(a + b + c)/2$, выражающей площадь треугольника через радиус r вписанной окружности и полупериметр $(a + b + c)/2$. Поскольку радиус R окружности, пересекающей все стороны треугольника, больше каждой из величин x, y, z, то

$$ar + br + cr = 2S = ax + by + cz < aR + bR + cR,$$

откуда $r < R$.

Центр окружности может лежать вне треугольника ABC (рис. 43). Тогда

$$S = \frac{ax}{2} + \frac{by}{2} - \frac{cz}{2},$$

поскольку $\triangle ABC$ можно получить, отрезав от объединения треугольников BCO и CAO треугольник ABO.

А на рисунке 44 изображено ещё одно расположение треугольника и окружности. Именно ради обсуждения такого рода тонкостей и проводят матбои. Один математик сказал даже, что матбой — единственный способ заставить школьника внимательно слушать своего сверстника, когда тот рассказывает решение задачи.

Второй способ. Проведём касательные к окружности, параллельные сторонам исходного треугольника (рис. 45). Исходный треугольник подобен треугольнику, образованному касательными.

116. Рассмотрите треугольник с вершинами в точках касания и докажите, что проведённые прямые — его высоты.

117. Площадь треугольника C_1PB_1, равно как и площадь треугольника C_2PB_2, равна половине площади параллеграмма AB_2PC_1. Аналогично, $S_{B_1PA_1} = \frac{1}{2}S_{CA_2PB_1} = S_{B_2PA_2}$ и $S_{A_1PC_1} = \frac{1}{2}S_{BC_2PA_1} = S_{A_2PC_2}$.

118. Нет, не обязательно. Дабы построить контрпример, возьмём $CE \parallel AB$, а точку D — «очень близко» к отрезку CE (рис. 46). Площадь части пятиугольника, содержащей точку D, меньше площади четырёхугольника $OCDE$, которая составит лишь *ничтожную долю* площади пятиугольника $ABCDE$, если отрезок AB взять «очень длинным».

Чтобы решить задачу, выделенным словам надо было придать точный смысл (а перед этим — придумать сам контрпример!). Но для восьмиклассника (и тем более для шестиклассника) даже равенство площадей треугольников $CEO_1, \ldots, CEO_4$ рисунка 47, уже является непривычным и требующим осмысления фактом.

Задача могла быть решена и по-другому: достаточно сдвинуть вершины C, D, E выпуклого пятиугольника настолько очень близко, чтобы площадь любого куска, содержащего среднюю из них, была меньше $1/5$ общей площади. Но в любом случае задача требует привычки к рассмотрению «очень больших» и «очень малых» величин.

119. Рассмотрите а) четырёхугольник, вершины которого — четыре вершины правильного пятиугольника; б) семиугольник, вершины которого — семь вершин правильного восьмиугольника.

120. Да. Впишем в треугольник ABC окружность (рис. 48) и нарисуем окружности с центрами A, B и C, проходящие через соответствующие точки касания. Пусть P_1 — центр окружности, вписанной во внутренний криволинейный треугольник. Тогда её радиус можно посчитать любым из следующих способов: $P_1A - AL = P_1B - BM = P_1C - CK$. Следовательно,

$$P_1A - P_1B = AL - BM = (AL + LC) - (CK + KB) = AC - CB.$$

Аналогично, $P_1B - P_1C = BA - AC$. Одну точку нашли.

Вторая существует не для любого треугольника ABC: попарно касающиеся окружности с центрами A, B и C могут касаться изнутри некоторой окружности (пунктирной на рисунке 49), прямой (рис. 50), а могут (именно этот случай нам нужен!) касаться внешним образом окружности с центром $P_2 \neq P_1$ (рис. 51).

121. Например, два ромба с углами величин 45°, 135°, 45° и 135°, переходящие один в другой при повороте на 90° вокруг их общего центра (рис. 52).

122. Это точки средних линий квадрата, то есть отрезков, соединяющих середины противоположных сторон квадрата.

123. Если величина угла A треугольника ABC меньше 60°, то сторона BC короче хотя бы одной из сторон AB и AC. Поэтому ни в каком убитом не могут находиться более 6 пуль. Значит, убито не менее $\lceil \frac{50}{6} \rceil = 9$ гангстеров. Если убитых 9, то пятеро из них поражены 6 пулями каждый и четверо — пятью.

Ровно 6 пуль могут быть только в случае, когда убийцы расположены в вершинах правильного шестиугольника, а убитый — в центре (рис. 53). Убитый гангстер A и сам стрелял в некоторого гангстера B. При этом в B попало менее 5 пуль.

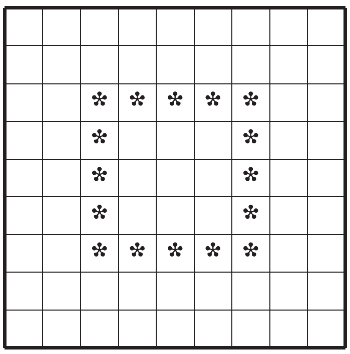
Итак, убито не менее 10 гангстеров. Разбив 50 гангстеров на 5 групп по 10 в каждой и в каждой группе устроив перестрелку, как показано на рисунке 54, получаем ответ: 10.

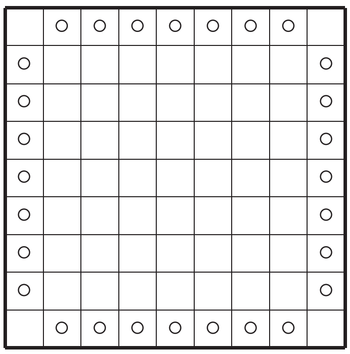
124. Вследствие равенств $\angle CAR = 60^\circ = \angle CPR$ и $\angle CQR = 60^\circ = \angle CBR$ четырёхугольники $APCR$ и $BQCR$ вписанные. Поэтому $\angle PAC = \angle PRC = 60^\circ - \angle CRQ = 60^\circ - \angle CBQ$ и, следовательно, $\angle PAB + \angle ABQ = (60^\circ + \angle PAC) + (60^\circ + \angle CBQ) = 120^\circ + \angle PAC + \angle CBQ = 180^\circ$.

125. Пусть города — вершины правильного 25-угольника, а самолеты летают вдоль описанной окружности. Нетрудно проверить, что если первая авиакомпания совершает рейсы длиной 1, 3, 4 и 10, вторая — рейсы длиной 2, 5, 6 и 11, третья — 7, 8, 9 и 12, то желание авиакомпаний будет выполнено.

126. Можно при помощи многоугольника рисунка 55 и его же, повёрнутого на 90°.

127. Рассмотрим 16 квадратов размером 5×5, центры которых отмечены на рисунке 56. Поскольку любые две клетки таблицы входят в разные наборы таких квадратов, положения всех чисел могут быть однозначно восстановлены.





Менее чем за 16 вопросов восстановить расстановку нельзя. В самом деле, на границе большого квадрата имеются 32 неугловые клетки. Пусть их числа «возьмутся за руки», как показано на рисунке 57. Любой из квадратов, о которых задаём вопрос, «разрушает» не более чем два из этих «рукопожатий». Поэтому вопросов должно быть не менее $32 : 2 = 16$ штук.

128. После $1995 \cdot 1995 + 1$ ходов на некотором поле фишка побывает более 1995 раз. Каждый раз она будет уходить с него на одно поле дальше, чем в предыдущий. Поэтому на каждое из 1995 полей с него был сделан хотя бы один ход.

129. Можно прокатить кубик по маршруту

$$A \to B \to C \to c \to d \to e \to E \to D \to C \to c \to b \to a \to A,$$

где сторона каждого из 10 квадратов равна по длине ребру куба (рис. 58). Есть и другой способ (рис. 59):

$$A \to B \to C \to D \to E \to F \to A \to G \to H \to I \to J \to K \to A.$$

130. Числа вида 10^m или $125 \cdot 10^m$, где m — целое неотрицательное число. Пусть $a_k = 10^n$. Тогда $a_{k-1} = 2^r \cdot 5^s$, где r и s — целые неотрицательные числа, причём $r \neq s$. Количество ненулевых цифр числа a_{k-1} не превосходит $|r - s|$, поэтому $2^r \cdot 5^s \cdot 9 \cdot |r - s| > 10^n$.

Если $r > s$, то $2^{r-s} \cdot 9 \cdot (r - s) > 10^{n-s}$, то есть $9(r - s) > 5^{r-s}$, что возможно только при $r = s + 1$ и $a_{k-1} = 200\ldots0$, а это противоречит равенству $a_k = 10^n$. Если же $r < s$, то $5^{s-r} \cdot 9 \cdot (s - r) > 10^{n-r}$, то есть $9(s - r) > 2^{s-r}$, откуда $r + 1 \leqslant s \leqslant r + 5$. Перебором устанавливаем, что подходят только числа вида $2^r \cdot 5^{r+3}$.

Каким может быть число a_{k-2}? Никаким! Сумма его цифр давала бы при делении на 9 тот же остаток, что и само a_{k-2}, а сумма цифр произведения числа a_{k-2} на его сумму цифр должна равняться 8. Но 8 — квадратичный невычет по модулю 9.

131. $1 + 1999 = 2000$. Поскольку при сложении двух чисел из любого разряда в следующий переносится не более чем 1, то цифра Е должна быть равна 9 — иначе не было бы переноса из разряда десятков в разряд сотен.

132. 50. Все химики должны ответить одинаково, и все алхимики — тоже. Если больше химиков, то среди 51 опрошенных хотя бы один — химик. Если больше алхимиков, то среди 51 опрошенных хотя бы один — алхимик, который должен соврать — сказать, что больше химиков. Значит, химиков и алхимиков поровну.

133. Обозначим через x количество учеников, участвовавших лишь в одной олимпиаде. Тогда ровно в двух олимпиадах участвовали $x/2$ школьников, а в трёх — $x/3$. Составим уравнение

$$100 + 50 + 48 = x + 2 \cdot \frac{x}{2} + 3 \cdot \frac{x}{3}$$

и решим его: $x = 198/3 = 66$. В олимпиадах участвовали $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 66 + 33 + 22 = 121$ школьников.

134. Пусть в короля попало x тухлых яиц и y кочанов гнилой капусты. Тогда $64 + x + y = 4x + 6y$, откуда $3x + 5y = 64$.

Это уравнение легко решить в целых неотрицательных числах: $(x; y) = (3; 11)$, $(8; 8)$, $(13; 5)$ или $(18; 2)$. Поскольку количество яиц кратно 3, а количество кочанов капусты чётно, из четырёх вариантов остаётся последний: $x = 18$ и $y = 2$. Значит, 64 зрителя метали в Дэвида Гаррика младшего и Эдмунда Кина старшего (см. Марк Твен, «Приключения Гекльберри Финна») дохлых кошек, $18 \cdot 5/3 = 30$ — тухлые яйца, а $2 \cdot 7/2 = 7$ — гнилую капусту. Итого: $64 + 30 + 7 = 101$.

135. а) Да. Ответ можно угадать, рассмотрев маленькие числа: $12 - 3 = 9 = 3^2$, $1122 - 33 = 1089 = 33^2$, $111\,222 - 333 = 110\,889 = 333^2$. «Очевидно»,

$$11\,111\,112\,222\,222 - 3\,333\,333 = 11\,111\,108\,888\,889 = 3\,333\,333^2.$$

Жюри не верило школьникам, когда они предлагали это в качестве решения, а требовало доказательства. Будь участники турнира постарше, они, вероятно, действовали бы следующим образом:

$$11\,111\,112\,222\,222 - 3\,333\,333 = 1\,111\,111 \cdot (10\,000\,002 - 3) = 1\,111\,111 \cdot 9\,999\,999 = \\ = 1\,111\,111 \cdot 9 \cdot 1\,111\,111 = 3\,333\,333^2.$$

А в действительности они записывали искомое равенство в виде

$$11\,111\,112\,222\,222 = 3\,333\,333^2 + 3\,333\,333 = 3\,333\,334 \cdot 3\,333\,333,$$

а затем умножали «в столбик» $3\,333\,334$ на $3\,333\,333$. (Экономя место, покажу менее громоздкий пример:

$$\begin{array}{r} \times \quad 334 \\ 333 \\ \hline 1002 \\ +\ 1002 \\ 1002 \\ \hline 111222 \end{array}.$$

Просто и красиво, не правда ли?)

Некоторые школьники, не желая задумываться по пустякам, умножали «в столбик» семизначное число $3\,333\,333$ само на себя. Жюри вынуждено было соглашаться и с таким способом, старательно выискивая все описки.

Несколько человек действовали так: умножали сначала $1\,111\,111$ само на себя, получая ответ

$$1\,111\,111^2 = 1\,234\,567\,654\,321$$

(между прочим, $11^2 = 121$, $111^2 = 12321$ и так далее вплоть до $111\,111\,111^2 = 12\,345\,678\,987\,654\,321$), а затем умножали $1\,234\,567\,654\,321$ на $3^2 = 9$, получая требуемое:

$$1\,234\,567\,654\,321 \cdot 9 = 11\,111\,108\,888\,889.$$

в) $\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9 = 9 + 8 \cdot 10 + 8 \cdot 10^2 + \ldots + 8 \cdot 10^{n-1} + 4 \cdot 10^n + 4 \cdot 10^{n+1} + \ldots + 4 \cdot 10^{2n-1}$, откуда, представив девятку в виде $1 + 4 + 4$, а каждую восьмёрку — в виде $4 + 4$, получаем число

$$1 + 4(1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1}) + 4(1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{2n-1}) = \\ = 1 + 4 \cdot \frac{10^n - 1}{9} + 4 \cdot \frac{10^{2n} - 1}{9} = \frac{4 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1}{9} = \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}\right)^2.$$

136. Мухи не перегоняют одна другую. Поэтому никакая муха не может обогнать никакую другую более чем на один оборот. Следовательно, количества оборотов, сделанных мухами, отличаются не более чем на 1. Часовая стрелка делает за 12 часов один оборот, минутная — 12, секундная — 720; три мухи вместе делают $1 + 12 + 720 = 733$ оборота. Осталось представить число 733 в виде суммы трёх натуральных чисел, отличающихся не более чем на единицу: $733 = 244 + 244 + 245$. Это и есть ответ: мухи, начавшие свой путь на часовой и минутной стрелках, сделали по 244 оборота, а третья муха — 245.

137. При любом n выигрышная стратегия есть у начинающего игру. Если n чётно, начинающий игрок первым ходом может сорвать один лист пары, а если n нечётно, он может сорвать верхний лист. В обоих случаях на ветке останется чётное число пар и чётное число одиночных листьев. Второй игрок вынужден сделать нечётным либо число одиночных листьев, либо число пар листьев. Первый игрок может всё время восстанавливать чётность, повторяя ход соперника.

Эта игра — частный случай игры ним (n кучек по 2 камня в каждой и ещё один отдельный камень).

138. Занумеруем окопы слева направо числами от 1 до 1000. Предположим сначала, что к началу обстрела пехотинец сидит в окопе с чётным номером. Выстрелим во второй окоп. Если не попали, пехотинец перебежит в окоп с нечётным номером. Выстрелим в третий окоп. Если не попали, то пехотинец перебежит в окоп с четным номером, не меньшим 4. Выстрелим в окоп номер 4, затем в окоп номер 5 и так далее, оттесняя пехотинца. Во время выстрела в 998-й окоп он будет в 1000-м окопе и вынужден будет перейти из него в 999-й окоп под очередной выстрел.

Если же вначале пехотинец находился в окопе с нечётным номером, то после 998 выстрелов он вновь — в окопе с нечётным номером. Повторно стреляем в 999-й, 998-й, 997-й, ... , 2-й окопы. Всего 1996 выстрелов.

Теорема. Для цепочки из n окопов необходимы $2n - 4$ выстрела.

Доказательство. Если выстрелов $2n - 5$, то чётных (по номеру выстрела, а не окопа) среди них $n - 3$. Следовательно, минимум в 3 окопа чётные выстрелы не попадали. Среди этих окопов есть хотя бы один не крайний окоп A. Пехотинец может пережидать чётные выстрелы в A, а любой нечётный выстрел — в том из соседних с A окопов, куда этот выстрел не направлен.

139. Игра не может закончиться вничью: либо карточки с числами 10, 20, ... , 90, 100 разделились не поровну — и тогда у кого-то игроков таких карточек не менее шести, и его произведение кратно 10^6; либо эти десять карточек разделились поровну — и тогда у владельца карточки с числом 100 произведение кратно миллиону.

Игра заканчивается за конечное число ходов, значит, у кого-то из игроков есть выигрышная стратегия. Предположим, второй игрок умеет обыгрывать первого. Спросим его, как он ответил бы первому, если бы тот взял только одну карточку,— и пусть именно эти карточки (и ещё, разумеется, карточку с числом 1) возьмёт первый игрок своим первым ходом. После этого первый игрок сможет применять (выигрышную, по нашему предположению!) стратегию второго игрока против самого этого второго игрока.

Итак, предположив, что у второго игрока есть выигрышная стратегия, мы доказали, что у него её быть не может. Значит, при правильной игре победит первый игрок. (А как играть правильно, мы так и не узнали.)

140. Длина гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами 15 см и 20 см равна 25 см, а длина опущенной на неё высоты — $(20\cdot 15):25 = 12$ см.

141. Поскольку трапеции $CMNP$ и $CQMN$ равнобокие, вокруг каждой из них можно описать окружность. Их описанные окружности имеют три общие точки (C, M и N) и поэтому совпадают.

Интересно, что если вписать в прямоугольный треугольник ABC окружность и спроецировать её на гипотенузу и катеты (рис. 60), то образующиеся при этом точки Q, M, N, P и вершина C прямого угла лежат на одной окружности.

Дело в том, что точки, из которых данная окружность видна под углом 90° (рис. 61), лежат на окружности с тем же центром и в $\sqrt{2}$ раз большим радиусом. Прямоугольность треугольника ни при чем: если вписанную окружность некоторого треугольника спроецировать на стороны этого треугольника, то все шесть (а если треугольник прямоугольный, все пять) концов проекций — точки окружности, центр которой совпадает с центром вписанной окружности, а радиус в $\sqrt{2}$ раз больше.

142. Не обязательно. Проведём высоту CH неравнобедренного прямоугольного треугольника ABC и опустим перпендикуляры HK и HL на стороны AC и BC соответственно (рис. 62). Треугольник ABC окажется разбит на подобные треугольники AHK, HLB, HKL и KLC, не все из которых равны между собой.

143. Сначала докажем, что если в треугольнике ABC длины сторон AB и BC не равны, то $m_a > l_a$, где m_a и l_a — соответственно, длины медианы и биссектрисы, проведённых из вершины A. Рассмотрим точку L пересечения биссектрисы угла A с описанной окружностью (рис. 63). Поскольку дуги BL и LC равны, то перпендикуляр, опущенный из точки L на отрезок BC, падает в середину M отрезка BC. Теперь для длин $AH = h_a$, l_a и $m_a = AM$ высоты, биссектрисы и медианы, проведённых из вершины A, очевидны неравенства

$$h_a \leqslant l_a \leqslant m_a,$$

которые обращаются в равенства лишь при условии $AB = AC$. Складывая неравенства $l_a \leqslant m_a$, $l_b \leqslant m_b$ и $l_c \leqslant m_c$, получаем неравенство

$$l_a + l_b + l_c \leqslant m_a + m_b + m_c,$$

которое обращается в равенство лишь если треугольник равносторонний.

144. Равносторонние. Если в треугольнике есть две неравные стороны, то вблизи их общей вершины есть плохая точка. Для любой точки M, расположенной внутри равностороннего треугольника ABC, имеем $AM + BM > AB > CM$.

145. Случай, когда четыре точки лежат на одной прямой, очевиден: $\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} = \frac{\frac{a+c}{2}+\frac{b+d}{2}}{2}$.

Середины сторон любого четырёхугольника — вершины параллелограмма (рис. 64), а диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам. Пусть вершины четырёхугольника — точки первого поколения; тогда середины сторон (и диагоналей тоже, но не в этом дело) — точки второго поколения; центр параллелограмма — точка третьего поколения, полученная двумя разными способами (даже тремя, если учесть, что она является серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей исходного четырёхугольника). Итак, если изначально было хотя бы четыре точки, то уже в третьем поколении некоторые точки совпадут.

Если в первом поколении было меньше трёх точек, то в третьем поколении не будет ни одной. Наконец, осталось разобрать случай, когда в первом поколении было три точки (рис. 65). Тогда в каждом следующем поколении — тоже три точки. (Строго говоря, надо ещё разобрать случай, когда точки лежат на прямой. Если впервые совпали середины отрезков AB и AC, где A, B, C — три точки некоторого поколения, то должны совпадать уже точки B и C, а это противоречит тому, что рассматриваемое совпадение — первое.)

146. *Первый способ.* Пусть AB — данный отрезок, C — произвольная точка вне прямой AB (рис. 66). При помощи линейки и прибора строим среднюю линию DE треугольника ABC, параллельную AB. При помощи прибора делим отрезок DE сначала пополам, а затем — на четыре равные части. Через точку F, разбивающую DE в отношении $3:1$, проведём прямую BF и обозначим буквой G точку пересечения этой прямой с отрезком AC. Середина H отрезка DE делит отрезок DF в отношении $2:1$, поэтому луч GH делит отрезок AB в том же отношении $2:1$. (Аналогичный способ позволяет делить отрезок AB на любое количество равных частей.)

Второй способ. Отметим середину D отрезка AC и середину N отрезка BD (рис. 67). Луч CN пересечёт отрезок AB в некоторой точке L. Отметив середину K отрезка AL, получим искомое разбиение. Действительно, средняя линия DK треугольника ACL параллельна отрезку CL. Поэтому по теореме Фалеса из равенства $DN = NB$ следует равенство $KL = BL$.

147. На рисунке 68 изображена развёртка куба и на ней — закрывающий половину каждой грани параллелограмм, который очень легко перекроить в прямоугольник.

148. а) На рисунке 69 показаны два способа. Попытайтесь их проверить — скорее всего воображение откажет и придётся резать бумагу, складывать кубик! (Кстати, можете сказать, это по сути разные способы или одинаковые?)

А теперь — посмотрите на авторское решение (рис. 70) и догадайтесь, как завернуть в такую развёртку куб $2\times2\times2$.

149. На рисунке 71 показан случай, когда невозможно расположить седьмой прямоугольник. Докажем, что шестой ход всегда возможен. На рисунке 72 размещены 16 непересекающихся прямоугольников размером 1×6. Если шестой ход был невозможен, то в каждом из них должна быть закрашена хотя бы одна клетка. Но $1+2+3+4+5=15<16$.

150. Сумму цифр числа n будем обозначать $s(n)$. Применим индукцию по количеству цифр числа n. Для одно- или двузначных чисел утверждение легко проверить полным перебором. Пусть для некоторого $k \geqslant 2$ неравенство выполнено для любого k-значного числа. Рассмотрим произвольное $(k+1)$-значное число b, которое получается из k-значного числа a приписыванием справа одной цифры. Очевидно, $s(b) \leqslant s(a)+9$ и $10a \leqslant b$. Следовательно,

$$2^{s(b)} \leqslant 2^{9+s(a)} = 512 \cdot 2^{s(a)} < 1000 \cdot a^3 = (10a)^3 \leqslant b^3.$$

151. Воспользуйтесь тождеством $x(a-y)+y(a-z)+z(a-x) = (a-x)y+(a-y)z+(a-z)x$.

152. Внутрь правильного пятиугольника построим на каждой стороне как на гипотенузе равнобедренный прямоугольный треугольник (рис. 73). Продолжим катеты внутрь до пересечений с продолжениями катетов соседних треугольников. 10 отрезков, полученных из катетов, составляют искомую ломаную.

153. а) Пусть n нечётно: $n = 2k+1$. Заминируем клетки главной диагонали через одну двумя способами: в первом заминировано k клеток (рис. 74), во втором — на одну больше (рис. 75). Различить их невозможно!

При любом чётном n количество чёрных заминированных клеток можно узнать при помощи разбиения доски на «диагональные полосы» (рис. 76). Отмеченные клетки рисунка 77 показывают, как можно узнать количество чёрных заминированных клеток при $n = 8$; отражая доску относительно её вертикальной оси симметрии, получаем способ узнать общее количество заминированных клеток (рис. 78).

154. Пример с 49 распилами показан на рисунке 79. Назовем долькой либо целую клетку, либо часть клетки, полученную после распила. Дольки соединены между собой только по сторонам клеток доски. Всего таких соединений 112. С их помощью можно соединить не более 113 долек так, чтобы доска не распалась на отдельные части. Изначально было 64 дольки, следовательно, мы можем добавить не более $113-64 = 49$ долек. Каждый распил увеличивает количество долек не менее чем на 1. Поэтому количество распилов не может превзойти 49.

155. Если после установки очередного ферзя ни один из ранее поставленных ферзей не попадает под удар, то ферзей на доске становится на 1 больше; если же хоть один из ранее поставленных ферзей попадает под удар, то его или другого битого ферзя надо снять с доски, и в результате число ферзей на доске не меняется.

Пусть к некоторому моменту число ферзей на доске достигло максимального возможного значения. Тогда можно считать (отбросив все последние ходы, сопровождавшиеся снятием битого ферзя с доски), что последний ферзь не бьёт никаких других ферзей. Наименьшее количество полей, атакуемых одним ферзем,— 21 (когда ферзь стоит у края доски). Значит, более $64-21 = 43$ ферзей установить нельзя.

43 ферзя расставить можно. Сначала ставим ферзя на поле h7. Затем добавляем ферзя на поле h6 в три приёма:

- ставим ферзя на a1;
- ставим ферзя на h1 и снимаем с a1;

- ставим ферзя на h6 и снимаем с h1.

Аналогично ставим других ферзей рисунка 80; последним ходом ставим ферзя на поле a1.

156. 6. Если никакое государство не граничит более чем с двумя другими государствами, то их можно красить одно за другим. Следовательно, если количество государств равно 4, то достаточно рассмотреть случай, когда одно государство граничит с тремя другими. Очевидно, из этих трёх государств есть два, не граничащие друг с другом. Их окрасим в первый цвет, а оставшиеся два — во второй и третий цвета.

Пусть государств 5 штук. Если некоторое из них граничит с четырьмя остальными, то они расположены по кругу вокруг данного и могут через одно быть окрашены двумя красками, а «центральное» государство — третьей краской.

Если хотя бы одно из пяти граничит менее чем с тремя другими, то мы сначала раскрасим остальную часть карты (случай 4 государств уже разобран), а затем покрасим это государство.

Случай, когда каждое государство граничит ровно с тремя другими, невозможен, поскольку число $(3 \cdot 5) : 2$ не целое.

Если государства граничат так, как показано на рисунке 81, то трёх красок не хватит.

157. Например, если один динар — это 60 топаров и есть монеты достоинством 1, 2, 3, 4, 5, 15, 30 топаров, то каждой такой монетой можно набрать динар и все семь этих монет в сумме дают один динар. Иначе говоря,

$$\frac{1}{60}+\frac{2}{60}+\frac{3}{60}+\frac{4}{60}+\frac{5}{60}+\frac{15}{60}+\frac{30}{60}=1.$$

158. 36 минут — с 19 : 58 до 20 : 34. Два последовательных часа записываются четырьмя разными цифрами только в одном случае: 19 и 20; в остальных случаях мультфильм длится больше часа. Значит, четыре цифры (0, 1, 2 и 9) уже заняты.

Минимальное показание минут без занятых цифр — 34, следовательно, после 20 : 00 прошло не менее 34 минут. Максимальное показание минут без четырёх занятых цифр — 58.

159. Будем выписывать удачные числа не слева направо, а справа налево. Последняя цифра обязательно 0, перед ней — то ли 0, то ли 1. Перед предпоследней цифрой должна стоять либо последняя цифра, либо цифра, на единицу большая. Значит, для последних трёх цифр есть четыре варианта: 000, 100, 110 или 210. Для четырёх последних цифр уже восемь вариантов: 000 превратится в 0000 или 1000, 100 — в 1100 или 2100, 110 — в 1110 или 2110, 210 — в 2210 или 3210. И так далее: каждая следующая (при движении справа налево) цифра либо равна предыдущей, либо на единицу больше; количество вариантов каждый раз удваивается.

Поскольку число не должно начинаться на цифру ноль, то правильный ответ — не $2^9 = 512$, а $512 - 1 = 511$.

160. *Первый способ.* Числа x, y, НОК$[x;y]$ и НОД$(x;y)$ кратны числу НОД$(x;y)$; поэтому число 1999 должно быть кратно числу НОД$(x;y)$. Значит, либо НОД$(x;y) = 1999$, что невозможно; либо НОД$(x;y) = 1$, тогда НОК$[x;y] = xy$, уравнение принимает вид $1+xy+x+y = 1999$, откуда $(1+x)(1+y) = 1999$, что противоречит простоте числа 1999.

Второй способ. Сумма НОД$(x;y)$ + НОК$[x;y] + x + y$ не может быть нечётной. (Доказательство — разбор случаев: либо числа x, y нечётны, и тогда все четыре слагаемых нечётны; либо одно из чисел x, y чётно, а другое нечётно, и тогда НОД$(x;y)$ нечётен, а НОК$[x;y]$ чётно; либо же числа x и y чётны, и тогда все слагаемые чётны.)

161. *Указание.* Если $x > 1$ и $y > 1$, то $x!$ и $y!$ — чётные числа, так что левая часть нечётна, а правая — чётна.

162. Нет. *Указание.* Для любых двух взаимно простых натуральных чисел a и b и любого целого числа c существуют такие целые числа x и y, что $ax - by = c$.

163. Объединим все такие числа в группы следующим образом: вместе с числом $\overline{abcdef}$ поместим в группу числа $\overline{bcdefa}$, $\overline{cdefab}$, $\overline{defabc}$, $\overline{efabcd}$ и $\overline{fabcde}$ (к некоторым числам при этом придётся приписать спереди нули). Сумма шести чисел одной группы равна $111\,111(a+b+c+d+e+f)$ и, следовательно, кратна 17.

В некоторых группах числа повторяются, так что различных чисел в группе не 6, а 2 или 3. Рассмотрите такие группы отдельно — всё будет хорошо!

164. Каждое произведение $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}$ сложим с произведением $\frac{1}{1999-a} \cdot \frac{1}{1999-b} \cdot \frac{1}{1999-c}$. Получим дробь

$$\frac{(1999-a)(1999-b)(1999-c)+abc}{abc(1999-a)(1999-b)(1999-c)},$$

числитель которой делится на (простое!) число 1999, а знаменатель — не делится. Сумма таких дробей обладает тем же свойством.

165. Ограничение грузоподъёмности 200 каратами означает, что за одно взвешивание можно определить сумму масс двух бриллиантов или массу одного бриллианта.

Положим на весы два самых лёгких камня: 90 и 91 каратов. Сумму масс 181 каратов могут показать только эти два камня. Затем взвесим вместе камни весом 90 и 92 каратов (182 карата могут дать только эти два камня). Бриллиант массой 90 каратов побывал на весах дважды. Значит, его можно определить, а тем самым проявятся камни массой 91 и 92 каратов. Отложим эти три камня в сторону и аналогичным образом следующими двумя взвешиваниями определим камни в 93, 94 и 95 каратов. Ещё два взвешивания — 96, 97 и 98 каратов. Оставшийся камень весит 99 каратов.

Пусть мы обошлись пятью взвешиваниями. Из десяти бриллиантов невзвешенным мог остаться самое большее один: ведь если не были взвешены два (или более) бриллианта, то невозможно определить, правильно они лежат или поменялись местами.

Значит, на весах побывали не менее 9 бриллиантов. Взвешиваний, в которых на весы клали два бриллианта, было не менее четырёх. Рассмотрим любую пару бриллиантов, взвешенных вместе. Чтобы их различить, хотя бы один из них должен был участвовать ещё в каком-то взвешивании.

Остались три взвешивания на 6 остальных взвешенных бриллиантов. Это возможно только при их разбиении на три пары; но при этом невозможно различить бриллианты внутри пар. Следовательно, пяти взвешиваний недостаточно.

166. *Первый способ.* Пусть в числе не менее 512 цифр. Если хотя бы одна из них нуль, помогают знаки умножения. А если все цифры не нули, объединим первые 512 цифр в пары: первую со второй, третью с четвертой, и так далее. В каждой паре из большей цифры вычтем меньшую. Каждая такая разность не будет превышать 8.

Если хотя бы одна из разностей равна 0, воспользуемся знаками умножения. Если все они отличны от 0, объединим полученные 256 разностей в пары и вычтем в каждой паре из большей разности меньшую. Результат не будет превышать 7. Продолжая в таком духе, мы рано или поздно получим разность, равную 0. (Для этого потребуется не более 9 операций, а значит, не более $2^9 = 512$ цифр). Если перед первой цифрой при этом оказался минус, то изменим все знаки на противоположные. Осталось заключить «желанный ноль» в скобки и умножить его на остальные цифры.

Второй способ. Пусть в числе не менее 19 цифр. Поставим после первой цифры знак «$-$», а далее так: если результат после k-й цифры равен 0, то заключаем его в скобки и дальше ставим только знаки умножения; если результат отрицателен, ставим знак «$+$»; если результат положителен, ставим «$-$». Выражение будет принимать значения от -8 до 9, по принципу Дирихле какое-то значение повторится.

Пусть значения после k-й и j-й цифр равны. Тогда значение выражения от $(k+1)$-й цифры до j-й равно 0. Заключим эту сумму в скобки, а в остальных местах поставим знаки умножения.

167. Идея такова: делим ленту пополам, определяем, на какой из половин искомый момент, делим эту половину опять пополам, определяем, на какой из четвертушек искомый момент, и так 6 раз. (Заметьте: часть «подозрительного» участка может быть нами уже прослушана, но это пока не важно).

Назовём длиной участка время его прослушивания в минутах (длина всей ленты $h = 60$). Конкретизируем действия: после мысленного деления участка перематываем ленту, останавливаем за $1/4$ минуты до середины, слушаем полминуты и останавливаем на $1/4$ минуты дальше середины.

Оценим общую длину перемотанных участков: в первый раз $h - \frac{1}{4}$, а далее каждый раз перематываем половину оставшегося участка плюс-минус полминуты (плюс — когда мотаем вперед, минус — когда назад). Тогда при наибольшем невезении (5 раз мотаем назад) длина перемотки будет равна

$$\frac{h}{2} + \frac{h}{4} + \frac{h}{8} + \frac{h}{16} + \frac{h}{32} + \frac{h}{64} - \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{2} = h - \frac{h}{64} + \frac{9}{4}.$$

Теперь выкинем из подозрительного участка $1/4$ минуты только что прослушанного куска, перемотаем ленту в начало подозрительного участка (в наихудшем случае длина перемотки $\frac{h}{64} + \frac{1}{4}$) и прослушаем его целиком. Общее время прослушивания составит $6 \cdot 0{,}5 + \frac{h}{64} - \frac{1}{4}$, а общее время перемотки — максимум $0{,}1(h + \frac{10}{4})$, итого не более $\frac{h}{10} + 3 + \frac{h}{64} = 6 + 3 + \frac{60}{64} < 10$ минут.

168. Начиная со второго выстрела, ковбой может узнать, с какой стороны находится центр мишени от любой прямой (точнее, любой, не проходящей через точку, в которую был направлен последний выстрел). Для этого ему достаточно выстрелить в точку, симметричную последнему выстрелу относительно этой прямой. Таким образом, за три выстрела он может ограничить место возможного расположения центра мишени до квадрата со стороной 1 м. За каждые два последующих выстрела сторона этого квадрата уменьшается в 2 раза (рис. 82). После 11 выстрелов она становится равной 6,25 см. Последний, двенадцатый выстрел достаточно произвести в центр этого квадрата, так как центр мишени находится внутри этого квадрата и расстояние до него в этом случае не превзойдёт половины диагонали. Мишень будет поражена.

169. а) Пусть у лучшей команды рейтинг 1, тогда команды с рейтингами 2, 3, 4, 5 назовём группой II, а команды с рейтингами 6, 7, 8, 9 — группой III. Предположим, что все матчи интересные. Команда 1 сыграла в четырёх турах с командами 2, 3, 4, 5 (не обязательно именно в таком порядке), выбила их из розыгрыша, значит, между собой эти четыре команды не играли.

Одна из этих четырёх команд до встречи с первой сыграла 0 матчей, другая — 1 матч, ещё одна — 2, наконец, последняя — 3 матча. Значит, они успели сыграть с шестью командами. Но интересные матчи могли быть только с четырьмя командами III группы. Следовательно, без неинтересных игр не обойтись.

Пример турнира, в котором только одна игра (финал) неинтересная, предъявить легко: в первом туре играют 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6, ..., 15 и 16; во втором туре — 1 и 3, 5 и 7, 9 и 11, 13 и 15; в третьем — 1 и 5, 9 и 13; в финале — 1 и 9.

170. Для определённости, пусть сплетник A поссорился со сплетником B, с которым он общался по утрам. Рассмотрим множество сплетников, информация от которых по-прежнему доходит до A (возможно, через посредников). Предположим, что B не принадлежит этому множеству. Тогда в этом множестве нечётное число человек (ибо люди, обменивающиеся сплетнями по утрам, разбивались на пары). Но заметьте: за обедом сплетники тоже разбивались на пары, а без участия B это невозможно.

171. На прямой AB возьмём точку O и отложим в одну полуплоскость углы AOC и BOD величиной 10° каждый. Построим OM — луч внутри угла AOC. В той же полуплоскости проведём луч $ON \perp OM$. Первые 999 лучей проведём из точки O внутри угла BOD; следующие 999 лучей проведём внутри угла AOC, причём одним из них будет луч OM, а другие расположим поровну (по 499 штук) с разных сторон от прямой OM. Последний, 1999-й луч — это луч ON (рисунок 83 иллюстрирует конструкцию, только лучей на нём не 1999, а 11).

Никакие два луча не образуют развёрнутый угол, так как все они расположены в одной полуплоскости относительно прямой AB. Любые два луча из одной группы образуют острый угол. Всего пар лучей в одной группе $C_{999}^2 = (999 \cdot 998) : 2$. Значит, лучи в группах образуют ровно $999 \cdot 998$ острых углов. Любые два луча из разных групп образуют тупой угол — всего таких углов $999 \cdot 999$. Осталось рассмотреть углы со стороной ON. Луч ON с любым из 999 лучей первой группы образует острый угол, с 499 лучами второй группы — также острый угол, а с 499 другими лучами второй группы — тупой угол.

Значит, острых углов всего $999 \cdot 998 + 999 + 499$, а тупых углов $999 \cdot 999 + 499$, то есть столько же!

172. Обозначим $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Тогда $AM = c - a$ и $BN = c - b$. Следовательно, $MN = c - AM - BN = a + b - c$ и осталось, раскрыв скобки и применив теорему Пифагора, проверить равенство

$$(a + b - c)^2 = 2(c - a)(c - b).$$

173. Если диагонали четырёхугольника $ABCF$ перпендикулярны, то суммы квадратов его противоположных сторон равны: $AB^2 + CF^2 = AF^2 + BC^2$. В самом деле, обозначив точку пересечения прямых AC и BF буквой G, по теореме Пифагора имеем

$$\begin{aligned} AB^2 &= AG^2 + GB^2, \\ CF^2 &= CG^2 + GF^2, \\ AF^2 &= AG^2 + GF^2, \\ BC^2 &= BG^2 + GC^2, \end{aligned}$$

откуда

$$AB^2 + CF^2 = AG^2 + GB^2 + CG^2 + GF^2 = AF^2 + BC^2.$$

Поскольку прямые CE и DF тоже перпендикулярны, аналогично $DE^2 + CF^2 = CD^2 + FE^2$. Следовательно,

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2 + (AF^2 - FE^2),$$

так что равенство $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2$ выполнено тогда и только тогда, когда $AF = FE$.

174. 999, 1000, ... , 1498.

175. Занумеруем гири в порядке возрастания масс. Произведём первое взвешивание: на первую чашку весов положим гири №3 и №4, а на вторую — №7. Рассмотрим три возможных результата.

1) Если первая чашка весов тяжелее, то потерянной может быть гирька 1 г, 2 г или 3 г. Для второго взвешивания на первую чашку положим гири №1 и №2, а на вторую — №3. Если перетянет первая чашка, то потеряна гиря 1 г; если весы показали равенство — 2 г; если перевесила вторая чашка весов — потеряли гирю 3 г.

2) Если весы во время первого взвешивания показали равенство, то потеряли гирьку 4 г или 8 г. Тогда на одну чашку весов положим гирьки №1 и №3, а на вторую — №4. Первая чашка перевесить не может. Если перевесит вторая чашка, то потеряли гирьку 4 г; если равенство — 8 г.

3) Если при первом взвешивании перевесила вторая чашка, то потеряна гирька 5 г, 6 г или 7 г. На первую чашку положим гирьки №4 и №7, на вторую — №5 и №6. Если перевесит первая чашка, то потеряли гирьку 7 г; если весы в равновесии — 6 г; а если перевесит вторая чашка — 5 г.

176. Множество различных четвёрок остатков от деления на 11 конечно, поэтому какая-то четвёрка повторится. Поскольку последовательность однозначно строится «вперёд», то она периодическая.

Далее, последовательность однозначно восстанавливается «назад». Действительно, пусть перед четвёркой чисел a, b, c, d могут стоять числа x и y. Тогда числа $x(abc)$ и $y(abc)$ дают один и тот же остаток при делении на 11, потому $(x-y)abc$ кратно 11, то есть $x-y$ кратно 11, откуда $x=y$ (ибо x и y — остатки от деления на 11).

Следовательно, в последовательности повторится четвёрка 9, 9, 9, 9. Непосредственно перед этими девятками стоит 3, перед этим — три девятки, а перед ними – единица. Значит, четвёрка 1, 9, 9, 9 обязательно встретится, и даже бесконечно много раз.

177. Если p и q — соседние простые числа, то q^2 получается из p^2 за $2(p-q)$ шагов, а именно, p^2, $p(p+1)$, ..., pq, $(p+1)q$, ..., q^2.

Если простые числа p и q не соседние, то верна та же формула. В самом деле, если $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ — простые числа, расположенные между p и q, то $2(p_1-p)+2(p_2-p_1)+\ldots+2(q-p_k)=2(q-p)$ шагов.

Поэтому 1999^2 получится из 2^2 за $2(1999-2)=3994$ шага, то есть 3997-й член последовательности равен 1999^2, а 3999-й, следовательно, равен $1999(1999+ +2)=(2000-1)(2000+1)=3\,999\,999$.

178. Выпишем n пар соседних чисел и в каждой паре вычтем из большего числа меньшее. Сложим эти разности. С одной стороны, эта сумма равна n, так как каждая разность равна 1. С другой стороны, каждое значительное число войдёт в две разности со знаками «+», каждое незначительное — оба раза со знаками «−», а все остальные — с разными знаками. Следовательно, $n=2M-2m$.

179.

Дословно — решение задачи 2, стр. 55 «Кванта» №1 за 2000 г.

Номера рисунков 84, 85 и 86 — вместо 1, 2 и 3.

Рисунки 1, 2 и 3 страницы 55 «Кванта» №1 за 2000 г.

180. Доска состоит из 1999 четырёхклеточных прямоугольников. Второй игрок может отвечать на каждый ход первого ходом в тот же прямоугольник, но через клетку. Другими словами, если занумеровать клетки каждого прямоугольника цифрами 1, 2, 3 и 4, то на ход первого в клетку с (не)чётным номером второй систематически отвечает ходом в другую клетку с (не)чётным номером.

181.

Решение задачи 12, стр. 60 «Кванта» №3 за 2000 г.

Номер рисунка 87 — вместо 2.

Рисунок 2 страницы 60 «Кванта» №3 за 2000 г.

182. а) Сумма всех незачёркнутых чисел есть сумма всевозможных произведений номеров невычеркнутых столбцов на номера невычеркнутых строк. Поэтому она равна произведению суммы номеров невычеркнутых столбцов на сумму номеров невычеркнутых строк. Так как каждая из этих сумма не меньше 2, то произведение не может быть простым числом.

б) Если зачеркнуть числа строки с номером 3 и столбца с номером 5, то сумма вычеркнутых чисел $6+9+12+15+18+21+24+27+10+20+25+30+35+40+45$ равна простому числу 337.

183. Поскольку $k=\frac{y(x^2-1)}{x(y^2-1)}$ и $\text{НОД}(x^2-1;x)=1=\text{НОД}(y^2-1;y)$, то y должно делиться на x, а x^2-1 должно делиться на y^2-1. Ситуации $y=0$ или ±1 невозможны, поскольку делить на ноль нельзя. Значит, $|y|>1$. Вследствие делимости x^2-1 на y^2-1 имеем $x^2-1\geqslant y^2-1$, а вследствие делимости y на x имеем $|y|\geqslant|x|$. Следовательно, в рассматриваемом случае $|x|=|y|$ и $k=\pm1$.

Осталось убедиться, что k может принимать значения 0 (например, при $x=1$ и $y=2$), 1 (при $x=y=2$) и -1 (при $x=2$ и $y=-2$).

184.

Решение задачи 3, стр. 55 «Кванта» №1 за 2000 г.

Нужно слова «Первое решение», «Второе решение» заменить на «Первый способ», «Второй способ».

185. Можно (рис. 88).

Рисунок 2, стр. 58 «Кванта» №4 за 2000 г.

186.

Решение задачи 17, стр. 58 «Кванта» №4 за 2000 г.

187. Воспользуйтесь равенством

$$\begin{aligned}a^4b^3+b^4c^3+c^4a^3-a^3b^4-b^3c^4-c^3a^4&=\\&=(a-b)(b-c)(c-a)\bigl(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+abc(a+b+c)\bigr)=\\&=\frac{1}{2}(a-b)(b-c)(c-a)\bigl(a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2\bigr).\end{aligned}$$

188. В параллелограмме $ABCD$ проведём хорду $PQ\parallel AD$ (рис. 89), а затем хорды $QM\parallel BD$ и $QN\parallel AC$. Точки MPN — три вершины искомого параллелограмма.

Рисунок 4 страницы 55 «Кванта» №4 за 2000 г.

189.

Решение задачи 1, стр. 55 «Кванта» №1 за 2000 г.

Нужно убрать слово «Ответ» и написать просто: «Нельзя.»

190. Проведём высоту CH. Треугольники ACH и BCH содержатся в кругах с диаметрами AC и BC соответственно. Первый из этих кругов покрыт кругами радиуса $b/\sqrt{2}$ с центрами A и C, а второй — кругами радиуса $a/\sqrt{2}$ с центрами B и C.

191. Число $2\sqrt[3]{a}$ иррациональное, поэтому число $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=2\sqrt[3]{a}-(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})$ также иррационально (как разность иррационального и рационального чисел). Рассмотрим равенство

$$\bigl(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\bigr)^3=a+3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})+b.$$

Обе части равенства — рациональные числа. Значит, число $\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})$ рациональное. Предположим, что $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\neq 0$. Тогда $\sqrt[3]{ab}$ — рациональное число. Рассмотрим равенство

$$a-b=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})\cdot\left((\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^2-\sqrt[3]{ab}\right).$$

Первый множитель правой части – иррациональное число, а второй множитель — рациональное число. Приходим к противоречию: число $a-b$ оказалось иррациональным. Следовательно, $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=0$, откуда $a=-b$.

192. 2000.

194.

Решение задачи 15, стр. 60 «Кванта» №3 за 2000 г.

195. Отразив точку C симметрично относительно прямой AD, получим такую точку E (рис. 90), что $\angle BAE=\angle BAD+\angle DAE=\angle BAD+\angle DAC=90^\circ$ и $\angle BDE==\angle BDA+\angle ADE=\angle BDA+\angle ADC=90^\circ$. Вокруг четырёхугольника $ABDE$ можно описать окружность. Соединяя её центр O с серединой N хорды AD, имеем $ON\perp AD\perp CE$. Средняя линия MO треугольника BCE параллельна его стороне CE.

Рисунок 3 стр. 58 «Кванта» №4 за 2000 г.

Надо заменить C_1 на E на рисунке.

196.

Решение задачи 19, стр. 58 «Кванта» №3 за 2000 г.

197. Для $n=1$ или 2 утверждение верно ввиду равенств $1!=1\cdot 1$ и $2!=1\cdot 2$. Предположим, что утверждение верно для некоторого натурального n, то есть $n!==a\cdot b$, где $a\leqslant b\leqslant 2a$. Тогда разложение на множители $(n+2)!=a(n+2)\cdot b(n+1)$ удовлетворяет условию задачи. Действительно, $a(n+2)\leqslant b(n+2)<2b(n+1)$ и $b(n+1)\leqslant 2a(n+1)<2a(n+2)$.

198. 4 часа. Петя с $12:00$ до $14:00$ проехал некоторое расстояние b вместе с велосипедистом и прошёл расстояние a пешком. Поэтому за вдвое большее время он успеет пройти пешком расстояние $b+2a$ — а это и есть расстояние от Сосновки до Клещёвки.

199. Начинающий может победить при любом начальном положении короля. Суть стратегии в следующем. Подсчитаем число вертикальных ходов, которыми король может с исходного поля дойти до нижней (первой) горизонтали, а также количество вертикальных ходов, которыми король может дойти до верхней (восьмой) горизонтали. Поскольку сумма этих чисел равна $8-1=7$, то одно из них нечётно.

Пусть, для определённости, надо сделать нечётное число ходов, чтобы дойти до нижней горизонтали (рис. 91). Тогда первый игрок может пойти прямо вниз; номер горизонтали уменьшится на 1 и из чётного станет нечетным. Что делать второму? Если он сделает горизонтальный ход или вернётся диагональным ходом на исходную горизонталь (пойдет на одну из закрашенных клеток рисунка), то первый игрок сразу сможет выиграть. Поэтому второй игрок будет вынужден сделать вертикальный или диагональный ход, спустившись ещё ниже.

В ответ первый игрок опять может пойти вертикально вниз. Второму, чтобы не проиграть, опять придётся опустить короля ниже, и так будет продолжаться до того, как после очередного хода первого игрока король попадёт на нижнюю горизонталь. Тогда второму игроку придётся сделать горизонтальный ход или поднять короля по диагонали вверх, после чего первый игрок побеждает, ставя короля на ранее пройденное поле.

Между прочим, если бы размеры доски были иными — например, 9×9, — то не каждое исходное положение короля приносило бы выигрыш тому, кто делает первый ход: 16 полей (подумайте, какие именно) были бы выигрышными для второго игрока.

200. Разобьём шахматную доску на «доминошки» — прямоугольники, состоящие из двух клеток. (Это можно сделать многими разными способами.) Первым своим ходом начинающий может поставить короля на клетку, парную с той, на которой король находился изначально (то есть на вторую клетку того же прямоугольника). Затем в ответ на каждый ход противника он может ставить короля на клетку, парную той, на которой король в тот момент находится. Таким образом, после каждого хода второго игрока и ответа на него очередной прямоугольник окажется «полностью использован». Ясно, что рано или поздно второй игрок будет вынужден поставить короля на клетку, принадлежащую уже использованному прямоугольнику.

201. б) Само множество M должно быть выбрано, так как не содержится ни в каком другом своём подмножестве. Выбранным должно быть и любое множество, получаемое из M выбрасыванием одного элемента. (Таких множеств столько же, сколько и элементов в M, то есть n штук). Легко понять, что указанные $n+1$ подмножеств удовлетворяют условию задачи: если некоторое невыбранное подмножество A отличается от M тем, что не содержит элементы m_1, m_2, ..., m_k, то A является пересечением k выбранных подмножеств, одно из которых не содержит m_1, второе не содержит m_2, ..., наконец, k-е подмножество не содержит m_k. *Ответ:* $n+1$ подмножество.

202. Пусть, когда Том Сойер проснулся, часовая стрелка образовывала со стрелкой будильника угол α (рис. 92), а когда встал — угол β (рис. 93). Поскольку минутная стрелка поворачивается каждую минуту на 6°, а часовая — на $0,5^\circ$, то за 3 минуты минутная стрелка повернется на 18°, а часовая — на $1,5^\circ$. Следовательно, $2\alpha + \beta = 18^\circ$ и $\alpha - \beta = 1,5^\circ$, откуда $\alpha = 6,5^\circ$ и $\beta = 5^\circ$.

С момента, как Том встал, и до момента, как будильник зазвенел, часовая стрелка повернулась на 5°. За это время минутная стрелка повернулась в 12 раз больше — на 60°. Значит, когда будильник зазвенел, минутная и часовая стрелки образовывали угол 65°.

Найдем все такие моменты с целым числом минут. К x часам y минутам часовая стрелка поворачивается на угол $(30x + 0,5y)^\circ$, а минутная стрелка делает x полных оборотов и ещё поворачивается от положения, которое она занимала в полночь, на $6y^\circ$. Значит,

$$6y - (30x + 0,5y) = 65 \quad \text{или} \quad 6y + 360 - (30x + 0,5y) = 65.$$

Решим первое из этих двух уравнений: $11y - 60x = 130$. Так как x и y — целые числа, то y кратно 10. Обозначим $y = 10k$. Тогда

$$11k = 13 + 6x.$$

Поскольку $0 \leqslant y < 60$, то $0 \leqslant k \leqslant 5$. Перебором значений k можно найти единственное решение: $k = 5$, $x = 7$ и $y = 50$.

Второе уравнение можно привести к виду $60x = 590 + 11y$, а затем заменой $y = 10k$ — к виду $6x = 59 + 11k$. Поскольку $x \leqslant 11$, решений нет. Будильник был заведен на 7 часов 50 минут.

203. Пусть в искомый момент времени на часах горят цифры $ab : cd$. Тогда

$$60(10a + b) + 10c + d = 100(a + b + c + d).$$

Чтобы удовлетворять этому уравнению, d должно делиться на 10. Значит, $d = 0$. Уравнение можно записать в виде

$$50a = 4b + 9c.$$

Учитывая, что $a \in \{0, 1, 2\}$ и что b, c — цифры, легко находим ответ: $00 : 00$ или $18 : 20$.

204. а) Складывая суммы для клеток α и β (рис. 94) и вычитая из результата суммы для клеток γ и δ, получим число в центральной клетке. Чтобы доказать, что число ни в какой другой клетке определить нельзя, сравните рисунки 95 и 96: все интересующие нас суммы равны нулю, а для любой нецентральной клетки числа в рассматриваемых таблицах — разные.

б) Рассмотрим рисунки 97 и 98. Все суммы, о которых идёт речь в задаче, для этих таблиц равны 2. Но почти во всех клетках — точнее, во всех, кроме клеток c3, c6, f3 и f6,— числа в этих таблицах разные. Значит, если содержимое какой-то клетки можно восстановить по суммам, то это — одна из клеток c3, c6, f3, f6.

Теперь научимся по суммам определять содержимое клетки $c3$. Для этого сравним рисунки 99 и 100. Первый позволяет найти сумму всех чисел доски, а второй — сумму всех чисел, кроме числа клетки c3. Вот и всё: вычитая из одной суммы другую, находим число клетки c3! Аналогично можно найти числа клеток c6, f3 и f6.

Таково авторское решение пункта б). Интересно, как он мог такое придумать? Ну ладно, изобрести рисунки 99 и 100 хоть и трудно, но при определённом усердии можно. Но как можно придумать расстановки чисел, запечатленные на рисунках 97 и 98?

Задумавшись над этим, я сумел заметить лишь то, что эти два рисунка симметричны один другому относительно вертикали, так что достаточно сотворить лишь одну из этих двух расстановок чисел, вторая получится при помощи симметрии.

Ну и что дальше? Что нам делать? Учить это единственное расположение наизусть и петь гимны о неведомых непостижимых тайнах?

Нет, лучше без тайн! Посмотрите на (гораздо проще устроенный) рисунок 101. Все суммы, о которых идёт речь в задаче, для этой расстановки чисел равны нулю. Поскольку равны нулю все суммы и для таблицы, состоящей сплошь из нулей, то невозможно определить числа ни в одной из клеток, где в таблице рисунка 101 стоят ненулевые числа. Аналогично, нельзя определить числа ни в одной из клеток, в которых на рисунке 102 стоят ненулевые числа.

Итак, если содержимое клетки поддаётся восстановлению, то эта клетка должна благодаря рисунку 101 лежать на одной из вертикалей c или f, а благодаря рисунку 102 — на третьей или шестой горизонталях. Пересечение этих вертикалей и горизонталей — как раз клетки c3, c6, f3, f6.

205. Нет. Как в цифрах любого дня, так и в цифрах любого месяца есть хотя бы одна из цифр 0, 1 и 2. Следовательно, цифры 0, 1 и 2 составляют не менее 2/6 всех цифр, использованных в записи дат, а должны составлять 3/10. Но $\frac{2}{6} > \frac{3}{10}$.

206. $897 \cdot 897 = 804\,609$.1. В решении ребуса мы сначала оперируем неравенствами в стиле вытягивающего себя за волосы барона Мюнхгаузена, а уж только затем — перебираем несколько вариантов.

Так как самое маленькое шестизначное число равно 100 000, то СЕКРЕТ $>$ $> 100\,000$, откуда СТО $> \sqrt{100\,000} > 300$ и, значит, С $\geqslant 3$. Следовательно, СЕКРЕТ $> 300\,000$, откуда СТО $> \sqrt{300\,000} > 500$ и С $\geqslant 5$. Поэтому СЕКРЕТ $>$ $> 500\,000$, откуда СТО $> \sqrt{500\,000} > 700$ и С $\geqslant 7$. Наконец, СЕКРЕТ $> 700\,000$, откуда СТО $> \sqrt{700\,000} > 800$ и С $\geqslant 8$.

Теперь обратим внимание не на первые, а на последние цифры чисел СТО и СЕКРЕТ: произведение О $\cdot$ О кончается на Т. Вспомнив таблицу умножения, мы понимаем, что (О; Т) — это (2; 4), (3; 9), (4; 6), (7; 9), (8; 4) или (9; 1). Осталось к каждому из чисел ТО $= 42$, 93, 64, 97, 48, 19 приписать слева цифру 8 или 9, возвести в квадрат и посмотреть, получилось или нет.

207. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что наибольшим из чисел a, b, c является число a. По условию, $a \geqslant \frac{a^2}{b}$. Значит, $a = b$. Далее, $a \geqslant \frac{b^2}{c} = \frac{a^2}{c}$, откуда $c \geqslant a$. Следовательно, $a = b = c$.

208. Пусть первая программа содержала k клипов. Тогда вторая программа содержала $1{,}5 \cdot k$ клипов, а Бивису понравилось $k : 5$ клипов первой программы и $(1{,}5 \cdot k) : 2 = \frac{3}{4}k$ клипов второй программы. Отсюда следует, что k кратно и 5, и 4, то есть делится на 20. Тогда пусть $k = 20m$, где m — натуральное число. Тогда вторая программа содержала $1{,}5 \cdot 20m = 30m$ клипов, а третья — все остальные клипы, то есть $200 - 20m - 30m = 200 - 50m$ клипов. Значит, $200 - 50m > 0$, откуда $m < 4$.

Далее, Бивису понравилось всего $\frac{20m}{5} + \frac{30m}{2} = 19m$ клипов. Батт-Хеду понравилось столько же клипов, причем в это число входили все клипы третьей программы. Поэтому $19m \geqslant 200 - 50m$, откуда $m \geqslant \frac{200}{69}$. Значит, $2 < m < 43$, так что $m = 3$.

Теперь легко найти ответ: первая программа содержала $20 \cdot 3 = 60$ клипов, вторая — $1{,}5 \cdot 60 = 90$, а третья состояла из $200 - 60 - 90 = 50$ клипов. Бивису понравилось $\frac{60}{5} + \frac{90}{2} = 57$ клипов, Батт-Хеду — столько же. А не понравилось каждому из них $200 - 57 = 143$ клипа.

209. Докажем, что если ломаная проходит через вершину куба, то существует соединяющая те же точки (и, разумеется, лежащая на поверхности куба) ломаная меньшей длины. Если отрезки XB и BY ломаной лежат на рёбрах AB и BC куба (рис. 103), то эти два звена ломаной можно заменить на отрезок XY. А в общем случае можно развернуть на плоскость грани куба, на которых лежат отрезки XB и BY (рис. 104). Проведя на развёртке отрезок XY, мы укоротим ломаную.

Аналогично можно доказать общий факт: если две точки поверхности выпуклого многогранника, отличные от его вершин, соединены ломаной наименьшей длины, звенья которой лежат на поверхности многогранника, то ломаная не проходит через вершины многогранника.

210. 28 клеток закрасить можно (рис. 105). Докажем, что более 28 клеток окрасить нельзя. При окрашивании одной клетки периметр неокрашенной части листа (или сумма периметров, если таких частей несколько) увеличивается на 2. Пусть n клеток Вася уже покрасил. Тогда сумма периметров неокрашенных частей равна $28 + 2n$ (так как периметр первоначального квадрата равен 28). С другой стороны, остались неокрашенными $49 - n$ клеток, так что сумма периметров неокрашенных частей не превышает $4(49 - n)$. Следовательно,

$$28 + 2n \leqslant 4(49 - n),$$

откуда $n \leqslant 28$.

211. Завхозу следует выбрать грубые весы, ибо с их помощью можно обойтись всего 99 взвешиваниями, а с помощью точных весов 99 взвешиваниями не обойтись.

Рассмотрим случай, когда завхоз использует грубые весы. Пусть он расставил банки в порядке возрастания их масс. Вначале можно выбрать банки с номерами 1, 3, 5, ..., 101 и за 50 взвешиваний сравнить первую с третьей, третью с пятой, ..., 99-ю со 101-й. Если каждый раз весы будут подтверждать предположения о весе банок, то третья банка тяжелее первой не менее чем на 2 г, пятая тяжелее третьей также не менее чем на 2 г, и так далее. Тогда 101-я банка тяжелее первой не менее чем на 100 г. Но наибольшая разность масс банок равна 100 г, значит, при каждом взвешивании разность масс была ровно 2 грамма, что подтверждает веса банок с нечетными номерами. Значит достаточно подтвердить вес 50-ти банок с четными номерами. Это можно сделать за 49 взвешиваний аналогичным методом.

Рассмотрим случай использования точных весов. Между расставленными банками есть 100 промежутков. Каждому соответствует пара банок, отличающихся на 1 г. Значит, после 99 взвешиваний найдется пара банок, которые между собой не сравнили. Если бы они стояли в другом порядке, то результаты взвешиваний не изменились бы. Значит, нет гарантии, что эти банки не перепутаны.

212. Обозначим массы гирек через k, $k+1$, $k+2$, ..., $k+6$, где k — натуральное число, не превосходящее 7. Сначала сравним число k с числом 4. Для этого на одну чашу весов положим гирьки массами k и $k+1$, а на другую чашу — гирьку массой $k+5$.

- Если $k + (k+1) < k+5$, то $k < 4$. Вторым взвешиванием сравним гирьки массами k и $k+1$ с гирькой массой $k+3$. Если $k + (k+1) = k+3$, то $k = 2$. Если $k + (k+1) > k+3$, то $k = 3$. Если же $k + (k+1) < k+3$, то $k = 1$.

- Если $k + (k+1) = k+5$, то $k = 4$.

- Если же $k > 4$, то вторым взвешиванием сравним две гирьки с массами $k+5$ и $k+6$ с тремя гирьками: k, $k+2$ и $k+3$. Равенство $(k+5)+(k+6) = k+(k+2)+(k+3)$ выполнено при $k=6$. Если две гирьки перевесят, то $k=5$. Если же перевесят три гирьки, то $k=7$.

213. Треугольники BPM и CQM — равнобедренные. Поэтому $\angle PBM = \angle PMB$ и $\angle QCM = \angle QMC$. Поскольку сумма углов четырёхугольника $ABMC$ равна 360° и поскольку величина угла M этого четырёхугольника равна $360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$, то

$$\angle PMB + \angle QMC = 360^\circ - 40^\circ - 250^\circ = 70^\circ.$$

Следовательно, $\angle PMB + \angle BMC + \angle CMQ = \angle PBM + 110^\circ + \angle QCM = 110^\circ + 70^\circ = 180^\circ$, что и требовалось доказать.

214. Нет. Если серединный перпендикуляр к биссектрисе BL пересекает прямые AB и BC в точках P и Q соответственно, то $BPLQ$ — параллелограмм (и даже ромб, но сейчас это не важно). Отрезок AC проходит через вершину L этого параллелограмма, так что точки A и C лежат с той стороны от серединного перпендикуляра, где нет точки B.

215. Никто. Коля может расставить 12 кораблей (рис. 106), а Петя *не может* расставить более 12 кораблей.

Чтобы доказать последнее утверждение, рассмотрим 12 квадратов размером 2×2, закрашенных на рисунке 107. Очевидно, любой трехклеточный корабль содержит хотя бы одну закрашенную клетку, причём никакие два корабля не могут содержать закрашенные клетки из одного и того же квадрата 2×2 (иначе они бы соприкоснулись). Значит, количество кораблей не превосходит количества закрашенных квадратов размером 2×2, то есть не превосходит числа 12. Морской бой закончится вничью.

216. Искомое множество изображено на рисунке 108. Рассмотрим два случая. Пусть сначала углы AMC и BMC лежат по одну сторону от прямой MC. Тогда равенство $\angle AMC = \angle BMC$ означает, что точки A и B лежат на одном луче, выходящем из точки M. Другими словами, точка M должна принадлежать прямой AB, но не лежать на отрезке AB.

Теперь рассмотрим более трудный случай, когда углы AMC и BMC лежат по разные стороны от прямой MC. Обозначим буквой D образ точки B при симметрии относительно прямой MC. Так как $CA = CB = CD$, то возможны два случая: либо $D = A$, либо ACD — равнобедренный треугольник (рис. 109). В первом случае CM — биссектриса угла ACB (внутренняя или внешняя), причем искомыми являются все точки обеих биссектрис, кроме точки C (для нее углы AMC и CMB не определены).

Во втором случае сумма величин углов CAD и CDM равна 180°. Следовательно, $\angle CAM + \angle CMB = 180^\circ$, четырехугольник $CAMB$ вписанный и точка M лежит на описанной окружности треугольника ACB. Условию задачи удовлетворяют не все точки окружности, а только точки не содержащей точку C дуги AB (за исключением ее концов).

217. Формулировка задачи не лишена лукавства (не сказано, какая именно из трёх средних линий имеется в виду), и можно пойти по ложному следу — безуспешно доказывать, что линия, показанная на рисунке 110 пунктиром, является средней линией. Опытные «математические бойцы», рисуя разные треугольники (в том числе и такой «узкий», как на рисунке 111), догадывались, что нужно доказывать параллельность прямых PD и BC.

При симметрии относительно биссектрисы угла C лучи CD и CF меняются местами, а окружность переходит сама в себя (рис. 112). Поскольку прямые EF и AC параллельны, то прямые PD и BC, получающиеся из них осевой симметрией, тоже параллельны.

218. Существуют. Например, $a = (1+2)(1+2^2)\ldots(1+2^{19})$ и $b = 2a$.

219. Возьмём любые 1999 членов последовательности. Вычислим их сумму s. Добавим к ним $(s-1)$-й член последовательности. Он не совпадает ни с одним из взятых ранее чисел, поскольку больше суммы всех их вместе взятых. Осталось заметить, что $s + (s-1)s = s^2$.

220. Пусть среди 2000 чисел есть как чётное, так и нечётное. Тогда какие-то два числа разной четности стоят рядом, и их сумма не будет делиться на 2, что противоречит условию.

Если все 2000 чисел чётные, то их сумма не меньше суммы 2000 наименьших четных натуральных чисел.

Очевидно, $4\,000\,000 = 1+3+5+\ldots+3999 < 2+4+6+\ldots+4000$. Докажем, что числа 1, 3, 5, ..., 3999 удовлетворяют условию, то есть что для любого $k \leqslant 2000$ сумма k чисел, записанных подряд, делится на k. Сумма чисел n, $n+2$, $n+4$, ..., $n+2k-2$ равна произведению количества этих чисел на полусумму первого и последнего, то есть $k \cdot \frac{n+n+2k-2}{2} = k(n+k-1) \vdots k$.

221. а), б). Сторож может пройти по пути, показанному на рисунке 113 а), б), щелкнув по одному разу по всем попавшимся на пути выключателям. При этом он побывает в каждом узле сетки ровно один раз и в каждом коридоре один раз включит свет и один раз — выключит. По окончанию пути весь объект будет неосвещен.

Эти пути не кратчайшие: двигаясь вдоль диагонали a1-h8 и тратя на обход каждой клетки 6 отрезочков пути, можно по коридорам пройти из левого нижнего угла в правый верхний, погасив за собой весь свет и пройдя путь длиной лишь 48 единичных отрезочков.

в) Раскрасим вершины в шахматном порядке. Сторож может перебраться в вершины того же цвета, что и левый нижний угол, а ни в какую другую не сможет.

В самом деле, сторож может «пройти по диагонали», то есть перебраться в единичном квадратике $ABCD$ из A в противоположную вершину C. Для этого достаточно пройти по пути $ABCDABC$, щёлкая всеми встречающимися выключателями, кроме D. (Проверьте!) Умея «проходить по диагонали», сторож сможет пройти в любую вершину того же цвета, что и левый нижний угол.

Осталось доказать, что сторож не может перебраться в вершины другого цвета. Для этого докажем, что если сторожу удалось погасить весь свет, то он сделал четное число переходов по единичным коридорам. (Этого достаточно: так как каждый переход меняет цвет вершины, то после четного числа переходов цвет возвращается к первоначальному.)

Будем считать, что каждый переключатель может находиться в положениях ВВЕРХ или ВНИЗ и что вначале все переключатели были ВНИЗ. Заметим, что на концах освещенного коридора положения переключателей различны. Сторож может выполнять элементарные действия двух видов: щелкать выключателем и переходить от выключателя к соседнему выключателю по освещенному коридору. После любого из таких действий он оказывается у противоположно направленного переключателя.*)

В полностью неосвещенном объекте все выключатели будут одинаково ориентированы: все ВВЕРХ или все ВНИЗ. Разберем оба случая. Если в конце все выключатели ВНИЗ, то сторож в сумме совершил четное число действий, так как начал и закончил у выключателя ВНИЗ. Поскольку он щелкнул каждым выключателем четное число раз, то общее число щелчков тоже четно. Значит, четно и число переходов.

Если же в конце все выключатели ВВЕРХ, то сторож сделал в сумме нечетное число действий. Но так как всего выключателей 81 (нечетное число!), причём каждым сторож щелкнул нечетное число раз, то общее число щелчков тоже нечетно. Значит, число переходов и в этом случае четно.

222. Прямые из разных красивых троек не параллельны, иначе на одной из них была бы отмеченная точка, не лежащая на прямых другой тройки. Рассмотрим две красивые тройки. Они пересекаются в девяти точках, при этом отмеченными могут быть только эти точки. Небольшим перебором можно показать, что если убрать только одну точку из девяти (оставив восемь точек), то невозможно указать третью красивую тройку прямых. Но если оставить 7 точек — середины сторон параллелограмма, две противоположные вершины и центр — то три тройки найдутся.

223. Один из способов показан на рисунке 114 (каждая из видимых граней оклеена двумя прямоугольниками, а каждую из невидимых на рисунке граней оклеиваем так же, как и противоположную ей видимая грань).

224. 40 ладей расставить легко (рис. 115). Докажем, что при любой расстановке ладей, удовлетворяющей условию задачи, свободными останутся не менее 24 клеток.

Разберём сначала случай, когда на каждой вертикали стоит хотя бы одна ладья. Над верхней и под нижней горизонталями доски напишем строки из 8 чисел по следующим правилам: если на вертикали стоит не менее двух ладей, то над (под) вертикалью запишем число пустых полей над (под) самой верхней (нижней) ладьей этой вертикали; если же на вертикали не более одной ладьи, то над и под вертикалью запишем тройки.

Итак, над и под доской выписаны две строки по 8 чисел. Докажем, что в верхней†) строке каждое из чисел 0, 1 или 2 встретится не более двух раз. В самом

*)Это ключевое наблюдение: если проследить за положениями выключателей возле сторожа, то положение *после* любого из таких действий противоположно положению *до действия*.

†)Да в нижней тоже, поскольку она ничем не хуже верхней строки.

деле, если бы, например, в верхней строке присутствовали три единицы, то средняя из трёх соответствующих ладей била бы трёх (нечетное число!) ладей.

Таким образом, сумма выписанных чисел не меньше $2(0+0+1+1+2+2+3+3)=24$. Поскольку сумма выписанных над и под любой вертикалью чисел не меньше общего числа пустых полей этой вертикали, то сумма всех выписанных чисел не меньше числа всех пустых полей. Значит, число пустых полей не менее 24.

Случай, когда на всех вертикалях есть хотя бы по одной ладье, разобран. Осталось разобрать случай, когда на доске есть свободные от ладей вертикаль и горизонталь. (Догадайтесь, почему!) Вычеркнув одну свободную от ладей горизонталь и одну свободную вертикаль, мы получим доску размером 7×7, рассуждение для которой аналогично тому, что приведено выше для доски размером 8×8.

Аналогично, наибольшее число ладей, которые можно расставить на доске размером $n\times n$ так, чтобы каждая из них била четное число других, равно $[(n^2+2n)/2]$.

225. Занумеруем кусочки в порядке возрастания масс. Налево положим первый, третий, пятый и седьмой кусочки, а направо — второй, четвёртый, шестой и восьмой. Перевесит правая чаша. Если затем налево добавить девятый кусочек, то перевесит левая чаша. Следовательно, достаточно разрезать девятый кусочек.

226. Разложим куски сыра вдоль оси абсцисс, чтобы между кусками сыра не было пустых промежутков. Для всех достаточно малых x можно найти такое число $f(x)>x$, что между точками x и $f(x)$ расположена ровно половина массы сыра. (Слова «достаточно малых» относятся к тому, что при некотором $x=c$ величина $f(x)$ окажется равна точке b, правее которой сыра уже нет. Дальнейшее увеличение величины x привело бы к ситуации $f(x)<x$, а это для наших целей не нужно.) Значит, если a — левый край сыра, то на отрезке $[a;c]$ можно рассмотреть (непрерывную!) функцию $g(x)$ — стоимость сыра, расположенного между x и $f(x)$. Поскольку $g(a)+g(c)$ — это стоимость всего сыра, то по теореме о промежуточном значении непрерывной функции существует такое число $x\in[a;c]$, что $g(x)$ — это половина стоимости всего сыра. Проводя разрезы в точках x и $g(x)$, мы добиваемся своей цели — делим сыр на две части, равные и по массе, и по стоимости.

227. Да. Система уравнений

$$\begin{cases} nx+(n+1)y=n+2, \\ (n+3)x+(n+4)y=n+5 \end{cases}$$

при любом n имеет решение $x=-1$, $y=2$.

228. $a=0$, $b=1$ и $c=2$ или $a=-2$, $b=-1$ и $c=0$. Если все числа a, b, c отличны от нуля, то все три уравнения — квадратные, а дискриминант одного из них равен 0. Подставив $b=a+1$ и $c=a+2$, находим дискриминанты уравнений: $b^2-4ac=-3a^2-6a+1$, $c^2-4ba=-3a^2+4$ и $a^2-4cb=-3a^2-12a-8$. Решив три квадратных уравнения, убеждаемся, что никакой дискриминант не равен нулю ни при каком целом a.

Осталось рассмотреть три случая: 1) $a=0$; 2) $b=0$; 3) $c=0$. Первый и третий подходят (в каждом из них получается линейное уравнение с одним корнем и квадратные уравнения, одно из которых имеет два корня, а другое — ни одного).

Во втором случае получаем уравнения $-x^2+1=0$, $x-1=0$ и $x^2-x=0$, два из которых имеют по два корня.

229. Треугольники BME и CMD подобны, поэтому $BE:CD=BM:CM=2$. В треугольнике BDF отрезок FO — медиана. Поскольку он делит отрезок BC в отношении $2:1$, считая от вершины, то отрезок BC — тоже медиана треугольника BDF. Итак, $DF=2CD=BE$ и, значит, $BEFD$ — параллелограмм.

230. Пусть в процессе игры из автомата выпало $К$ красных, $Б$ белых и $С$ синих фишек. Тогда всего автомат выбросил $К+Б+С$ фишек. С другой стороны, первый раз автомат включился в самом начале игры, а все последующие разы — после опускания в щель синей фишки. Поэтому всего автомат включался $С+1$ раз (это значение и требуется определить). При каждом включении автомат выбрасывает 10 фишек, поэтому общее число фишек равно $10(С+1)$. Таким образом,

$$К+Б+С=10(С+1),$$

откуда $С=(К+Б-10):9$. Всего после обмена фишек на деньги игрок получил $К+300Б$ долларов. Так как он не оказался ни в выигрыше, ни в проигрыше, то

$$К+300Б=2000,$$

откуда $К=2000-300Б$. Следовательно,

$$С=\frac{1990-299Б}{9}=221-33Б-\frac{2Б-1}{9},$$

так что $2Б-1$ делится на 9. Поскольку количество белых фишек не превышает $2000:300<7$ (иначе игрок после обмена белых фишек на доллары остался бы в выигрыше), то $Б\leqslant 6$. Среди всех целых неотрицательных $Б$, не превышающих 6, лишь для $Б=5$ значение $2Б-1$ делится на 9. Поэтому $Б=5$ и $С=\frac{1990-299\cdot 5}{9}=$ $=55$. Автомат включался $55+1=56$ раз.

231. Пронумеруем вершины куба числами 1, 2, ..., 8 и обозначим число в k-й вершине через a_k, а среднее арифметическое его соседей через s_k. Поскольку треть каждого числа входит в три средних арифметических для соседних вершин, то сумма $a_1+a_2+\ldots+a_8$ равна сумме $s_1+s_2+\ldots+s_8$. Пусть для определённости $a_1=s_1+1, \ldots, a_7=s_7+1$. Тогда $(s_1+1)+\ldots+(s_7+1)+a_8=s_1+\ldots+s_7+s_8$ и, следовательно, $s_8=a_8+7$. Значит, оставшееся число отличается от среднего арифметического своих соседей на 7.

232. а) Рассмотрим для данного круга другой круг, в котором все лжецы станут рыцарями, а все рыцари — лжецами. В новом круге путешественник услышит в точности то, что в старом, ибо изменились моральные принципы не только каждого жителя, но и соседа. Поскольку путешественник сумел на основании полученных ответов определить долю правдивых жителей, эта доля в обоих случаях одинакова. Следовательно, она равна $1/2$.

б) Предположим, что все лжецы племени на вопрос, кто самый старший, показывают на самого младшего. Пусть путешественник считает, что некоторая система вопросов позволила ему узнать самого старшего. Тогда если ночью все лжецы станут рыцарями, а все рыцари — лжецами, то утром та же самая система вопросов укажет на самого младшего в племени. Значит, путешественник ни при какой системе вопросов не может утверждать, что он действительно нашел самого старшего.

233. Если бы в Дурляндии жили только одни дураки или же дураки и один умный, считающий себя умным, то все отвечали бы единообразно, и установить, кто есть кто, было бы невозможно. Если же в Дурляндии есть хотя бы двое умных, то они укажут друг на друга и тем самым докажут, что они действительно умные. Спрашивая их, можно выяснить, кто умный, а кто нет.

234. Пусть x и y — искомые числа. Тогда $x > y$ и x делится на y. Пусть $x = ky$, где k — натуральное число, большее 1. Далее, обозначим $x + y = a!$ и $x - y = b!$. Тогда $a > b$ и, следовательно, $a!$ делится на $b!$. Значит, $x + y$ кратно числу $x - y$. Но

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{ky+y}{ky-y} = \frac{k+1}{k-1} = 1 + \frac{2}{k-1}.$$

Поэтому, $k - 1 = 1$ или 2, то есть $k = 2$ или 3. Число k — факториал, следовательно, $k = 2$. Из равенства $a! : b! = 3$ следуют равенства $a = 3$ и $b = 2$. Значит, $x = 4$ и $y = 2$.

235. Пусть длина стороны треугольника равна 1. Точкой старта может быть любая точка на стороне треугольника, удаленная от вершины этой стороны на расстояние, равное $m/2^n$, где m, n — натуральные числа.

236. Данное уравнение преобразуется к виду

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-2)^2(x+1) + (y-2)^2(y+1) + (z-2)^2(z+1) = 0.$$

Так как $x + 1 > 0$, $y + 1 > 0$ и $z + 1 > 0$, то все слагаемые неотрицательны и поэтому равны нулю. Это возможно только при $x = y = z = 2$.

237. Разобьем гирьки на пары: две самые тяжелые, две следующие и так далее. Каждым ходом первый должен класть на весы одну из двух самых тяжелых гирь, так, чтобы второй был вынужден положить вторую гирю пары. А именно, первый кладет более легкую, если разность чашек меньше 2 г, и более тяжелую гирьку — если разность равна 2 г. В частности, первые ходы: 49 г, 50 г, 47 г, 48 г, 46 г, 45 г, и так далее. После каждой пары ходов первого игрока разность между массами чаш весов будет равна 2 г. Тогда после 24-х ходов первого игрока в его распоряжении останутся гирьки 1 г и 2 г, а чаша соперника будет перевешивать на 2 г. То есть у первого игрока не будет возможности сделать ход, поэтому он выиграет.

238. а) Вот два расположения: 100, 1, 2, 3, ..., 98, 99 и 2, 3, 4, ..., 99, 100, 1.

б) 301 место. Решение начинаем с того, что каждый пассажир включен в один из циклов вида $P_1 P_2 \ldots P_m$, где P_1, P_2, ..., P_m — некоторые пассажиры, причем P_i-й пассажир, где $i = 1, 2, \ldots, m-1$, имеет билет на место, которое занимает P_{i+1}-й пассажир, а P_m-й пассажир — на место, которое занимает P_1-й пассажир. Если в таком цикле 100 пассажиров или менее, то они составляют группу, для которой среднее арифметическое номеров занимаемых ими мест равно среднему арифметическому номеров мест, указанных в их билетах, что противоречит условию. Поэтому $m \geqslant 101$. Значит, если число циклов не меньше 3, то в аэробусе не менее 303 пассажиров.

Далее, если P_k, P_{k+1}, ..., P_{k+r} — цепочка пассажиров, последовательно включенных в некоторый цикл, причем номера мест в билетах пассажиров P_k и P_{k+r} отличаются на 1, то $r \geqslant 101$. Рассматривая цепочку P_{k+r}, P_{k+r+1}, ..., P_m, P_1, ..., P_k, получим неравенство $m-(k+r)+k \geqslant 101$. Следовательно, $m \geqslant 101+r \geqslant 202$, и поэтому число мест в аэробусе может быть меньшим, чем 303, только если выполнено одно из следующих условий:

1) все пассажиры включены в один цикл;

2) число циклов равно 2, причем любые два билета на соседние (по номерам) места принадлежат пассажирам из разных циклов.

Пусть выполнено первое условие. Рассмотрим пассажиров A_n, A_{n+1} и A_{n+2} с билетами на n-е, $(n+1)$-е и $(n+2)$-е места соответственно. Между A_n-м и A_{n+1}-м пассажирами в кратчайшей из цепочек, их соединяющих, имеется не менее 100 пассажиров, между A_{n+1}-м и $An+2$-м — также не менее 100 пассажиров, а между A_{n+2}-м и A_n-м либо нет ни одного пассажира, либо имеется не менее 100. Значит, если общее число мест меньше 303, то либо A_n сидит на $(n+2)$-м месте, либо A_{n+2} сидит на n-м месте. Ввиду произвольности номера n имеем (с точностью до направления) цикл $A_1A_3A_5\ldots A_NA_2A_4\ldots A_{N'}$, где N и N' — наибольший нечетный и наибольший четный номера соответственно, а A_i — пассажир, занимающий i-е место, $i=1, 2, \ldots, \max(N, N')$. Пассажиры, сидящие на местах N, 2, 4, ..., 198, имеют билеты на места 2, 4, 6, ..., 200, а разность соответствующих средних равна $(N-200):100$. Так как эта разность больше 1, то $N \geqslant 301$. Нетрудно убедиться, что цикл $A_1A_3A_5\ldots A_{301}A_2A_4\ldots A_{300}$ удовлетворяет условиям задачи.

Пусть теперь выполнено второе условие, то есть имеются два цикла, каждый из которых включает всех пассажиров с билетами на места одной четности. Если в каком-нибудь из этих циклов пассажир A_n сидит не на $(n+2)$-м месте, а A_{n+2} — не на n-м месте, то в цикле не менее 202 пассажиров, а в аэробусе — не менее 403 мест. В противном же случае имеем (с точностью до направления) цикл $A_1A_3A_5\ldots A_N$, где пассажиры с билетами на места 1, 3, 5, ..., 199 сидят на местах N, 1, 3, ..., 197; разность соответствующих средних арифметических $(N-199):100$ больше 1, откуда $N \geqslant 301$.

239. а) Пусть точки L и K симметричны точке M относительно прямых OX и OY соответственно. Тогда точки K, P и N лежат на одной прямой и $NK = NP + PK = NP + PM$. Аналогично, на одной прямой лежат точки N, Q и L, причём $NL = NQ + QL = NQ + QM$. Осталось доказать равенство треугольников KON и LON (по двум сторонам и углу между ними).

240. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, которые пересекаются в точке O (рис. 116). По теореме Пифагора

$$AB^2 = AO^2 + BO^2,$$
$$BC^2 = BO^2 + CO^2,$$
$$CD^2 = CO^2 + DO^2,$$
$$DA^2 = DO^2 + AO^2,$$

откуда $AB^2+CD^2=BC^2+DA^2$. Палочки длин AB и CD сделаем катетами одного прямоугольного треугольника, а палочки длин BC и DA — другого. Совместив эти треугольники по гипотенузам, получим четырехугольник с двумя прямыми углами.

241. Так как угол A в треугольнике ABC наименьший, то $BC<AC$ и на стороне AC найдется такая точка M, что $CM=CB$. Биссектриса CO угла C равнобедренного треугольника BMC пересекает основание BM в его середине — точке N (рис. 117). Докажем, что средняя линия FN треугольника ABM и радиус окружности EO параллельны отрезку AC. Докажем равенство $FN=EO$ — тем самым мы докажем, что $NOEF$ — параллелограмм и, следовательно, $OC \parallel EF$.

Радиус EO окружности, вписанной в прямоугольный треугольник BCD, вычисляем по формуле

$$EO=\frac{BD+CD-BC}{2}.$$

Осталось заметить, что

$$AM=AD+CD-CM=BD+CD-BC,$$

откуда

$$FN=\frac{AM}{2}=\frac{BD+CD-BC}{2}=EO.$$

242. Предположим, что у коротышек не менее чем по 13 друзей. Зарегистрируем какого-то одного коротышку вместе со всеми его друзьями, друзьями его друзей и друзьями друзей его друзей. Очевидно, всего будет зарегистрировано не менее $1+13+13\cdot 12+13\cdot 12\cdot 12=2042>2000$ коротышек.

243. Мысленно уберем из стопки первого игрока самую старшую бубновую карту Т. Возможны два случая.

1) Пусть среди оставшихся бубновых карт найдется убывающая пара карт, то есть такие карты К и Д (не обязательно король и дама), так что К старше Д и лежит выше Д. Тогда второй выигрывает, выкладывая в своей стопке Т пик на место К бубен у первого, К пик на место Д бубен, Д пик на место Т бубен, и карты равного достоинства на остальные места.

2) Если среди оставшихся бубновых карт нет убывающих пар, то все бубны идут по возрастанию. Выберем из них четыре карты, скажем 10, В, Д и К. Тогда второй выиграет, выкладывая в своей стопке пиковых Д, 10, К и В соответственно на места бубновых 10, В, Д и К у первого, и карты равного достоинства на остальные места.

244. Читайте статью А. Спивака «Цепи и антицепи» в «Кванте» №5 за 2003 год.

245. а) 10; б) 16. Пусть на доске стоят x ладей, каждая из которых угрожает n другим ладьям, где $n=1$ в пункте а) и $n=2$ в пункте б). Любая ладья «ведёт обстрел» по четырём направлениям: влево, вправо, вверх и вниз от поля, которое она занимает. В n направлениях ладья «стреляет» в других ладей, а в остальных $4-n$ направлениях попадает в отрезки внешней границы доски. Этих отрезков всего 32. Поэтому $x\leqslant \frac{3}{2}4-n$, то есть $x\leqslant 10$ при $n=1$ и $x\leqslant 16$ при $n=2$. Рисунки 118 и 119 доказывают, что эти оценки достижимы.

$\boxed{\text{Рисунок 118 — это средний рисунок рисунка 1 страницы 56.}}$

$\boxed{\text{«Квант» номер 2 за 2001 год. Вместо кружочков — ладьи!}}$

$\boxed{\text{Рисунок 119 — это правый рисунок рисунка 1 страницы 56.}}$

246. $(n^2+3n+3)n+1=(n+1)^3$.

248. а) $\{\{a;b\};\{x;y\}\}=\{\{1;5\};\{2;3\}\}$ или $a=b=x=y=2$. Пусть сначала хотя бы одно из чисел a, b, x и y равно 1; предположим для определённости, что $y=1$. Тогда $ab=x+1=(a+b)+1$, откуда $ab-a-b+1=2$, то есть $(a-1)(b-1)=2$ и, значит, $(a;b)=(2;3)$ или $(3;2)$; при этом $x=a+b=5$.

Если же числа a, b, x и y не меньше 2, то $ab=x+y=xy+1-1+x+$ $+y-xy=xy+1-(x-1)(y-1)\leqslant xy=a+b=ab+1-1+a+b-ab=$ $=ab+1-(a-1)(b-1)\leqslant ab$. Цепочка неравенств началась с числа ab и им же кончилась. Следовательно, в ней не может быть ни одного строгого неравенства, то есть $a=b=x=y=2$.

249.

$\boxed{\text{Решение задачи номер 20 страницы 57 «Кванта» 4 за 2001 г.}}$

250.

$\boxed{\text{Решение задачи номер 1 страницы 53 «Кванта» 1 за 2001 г.}}$

251. Поскольку $(a+b)^2\geqslant a^2+b^2$ и $(c+d)^2=2c^2+2d^2-2(c-d)^2\leqslant 2(c^2+d^2)$, то

$$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}\leqslant\frac{(a+b)^2}{2(c+d)^2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2<\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}.$$

252. Если a, b, c и d — натуральные числа, произведение любых трёх из которых являетсяч квадратом, то квадратом является и произведение $(acd)(abd)(abc)=$ $=a^3\cdot(bcd)^2$. Поэтому квадратом натурального числа является и число a^3, а значит и само a.

253. Пусть биссектрисы внешних углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке D его описанной окружности; I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Поскольку $\angle IBD=90^\circ=\angle ICD$, то точки I, B, D и C лежат на одной окружности. Она пересекается в трёх точках (B, D и C) с описанной окружностью треугольника ABC; поэтому она совпадает с этой окружностью; но точка I не лежит на этой окружности.

254. Поскольку из двух наклонных проведённых из одной точки O длиннее та, у которой проекция больше, то из неравенства $DP\leqslant PA$ следует неравенство $OD\leqslant OA$. Аналогично, $OA\leqslant OB\leqslant OC\leqslant OD$. Цепочка неравенств началась и закончилась одной и той же величиной OD. Следовательно, $OA=OB=OC=OD$.

255.

$\boxed{\text{Решение задачи номер 18 страниц 56–57 «Кванта» 4 за 2001 г.}}$

256.

$\boxed{\text{Решение задачи номер 19 страницы 57 «Кванта» 4 за 2001 г.}}$

258.

$\boxed{\text{Решение задачи 12 стр. 63, «Квант» 3 за 2001 г.}}$

259. а) Каждый пост контролирует не более 7 перекрёстков; $155 : 7 > 23$.

б) Если установлено n колонок, то количество улиц, выходящих из перекрёстков, на которых установлены колонки, не меньше $4n$. Из неравенства $4n \leqslant 162$ следует неравенство $n \leqslant 40$.

260.

$\boxed{\text{Решение задачи 14 стр. 63, «Квант» 3 за 2001 г.}}$

262. На рисунке 120 пунктиром показано, какие точки и отрезки лежат на одной прямой. Симпатично и решение в виде «кораблика» (рис. 121).

263. *Первый способ.* Рассмотрим жуков, у которых на исходной доске было по 4 соседа, то есть жуков, занимавших «внутреннюю» часть доски. Их $15 \times 29 = 435$ штук. На новой доске у каждого такого жука опять-таки должно быть не меньше 4 соседей, поэтому все они должны попасть внутрь новой доски. Но $14 \cdot 31 = 434 < 435$.

Второй способ. Каждым двум жукам-соседям сопоставим «перегородку» — общую сторону клеток, в которых они сидят. Количество перегородок не должно уменьшиться. Но $15 \cdot 30 + 29 \cdot 16 = 914 > 913 = 14 \cdot 32 + 31 \cdot 15$.

264. Не может. Из делимости числа *ДЕВЯНОСТО* на 90 следует, что буква *О* означает цифру 0. Поскольку в условии встретились 10 различных букв, то использованы все 10 цифр. Их сумма $1 + 2 + \ldots + 8 + 9 = 45$ делится на 9. Поскольку суммы $Д+Е+В+Я+Н+С+Т$ и $Д+Е+В+Я+Т+К+А$ делятся на 9, то $К+А$ и $Н+С$ делятся на 9.

Пусть *СОТКА* делится на 9. Тогда $С+Т+К+А$ делится на 9. Мы помним, что $К+А$ делится на 9. Значит, и $С+Т$ делится на 9. Итак, $Н+С$ и $Т+С$ делятся на 9, так что $Н$ и $Т$ дают одинаковые остатки при делении на 9, что невозможно.

265. а) Первые 8 натуральных чисел можно расставить по кругу так, чтобы каждое делилось на разность своих соседей (рис. 122). Для каких ещё чисел такая расстановка возможна, я не знаю.

б) При требуемой расстановке у каждого нечётного числа соседи должны быть разной чётности (поскольку их разность, будучи делителем нечётного числа, нечётна). Значит, нечётные числа должны быть разбиты на пары, окружённые чётными числами. Но количество нечётных чисел среди первых 2001 натуральных чисел равно 1001, а это число нечётно.

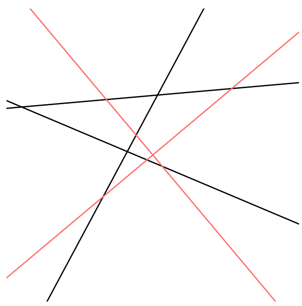
266. Сначала научимся получать числа от 2 до 210. Из числа 1 можно получить 2, увеличив на 100%. Из 2 можно получить 3 и 4, увеличив на 50% и 100% соответственно. Из 4 можно получить 5. Из 5 можно получить любое число от 6 до 10. Из 10 — любое число от 11 до 20. Из 20 — любое число от 21 до 25. Из 25 — от 26 до 50. Из 50 — от 51 до 100. Из 100 — от 101 до 200. Из 200 — любое из чисел 202, 204, 206, 208 и 210. Числа 201 и 207 — это увеличенные на 50% числа 134 и 138 соответственно. Число 203 получаем, увеличивая 140 на 45%. Наконец, 209 — это увеличенное на 10% число 190.

Докажем, что простое число 211 получить нельзя. В самом деле, если 211 получено из числа m увеличением на n процентов, то

$$211 = m + \frac{mn}{100},$$

откуда $21100 = m(100 + n)$, что невозможно из-за простоты числа 211.

267. Ось абсцисс направлена влево вниз (рис. 123). В самом деле, решив уравнения $ax + b = bx + c$, $bx + c = cx + a$ и $cx + a = ax + b$, находим абсциссы точек пересечения пунктирных прямых — числа $\frac{c-b}{a-b}$, $\frac{a-c}{b-c}$ и $\frac{b-a}{c-a}$. Их произведение равно -1. Все три абсциссы отрицательными быть не могут: если, например, a — наименьшее из чисел a, b и c, то $\frac{b-a}{c-a} > 0$. Итак, среди найденных абсцисс ровно одна — отрицательная. Это и позволяет выбрать один из четырёх априори возможных вариантов ответа.



268. Предположим, что каждые двое сыграли между собой ровно один раз. Всего было $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ игр. Если некоторый игрок проиграл k раз, то он между своими семью играми наблюдал, стоя в очереди, $6k$ игр. Поскольку никто не мог кончить турнир раньше 22-й партии, то

$$22 \leqslant 7 + 6k \leqslant 28,$$

откуда $k = 3$. Итак, каждый игрок проиграл 3 игры и всего было $8 \cdot 3 \neq 28$ проигрышей.

269. Поскольку $(x + y)^3 - 4(x^3 + y^3) = -3(x + y)(x - y)^2$, искомое множество состоит из двух прямых, заданных уравнениями $y = \pm x$.

270. Обозначим числа в таблице буквами, как показано на рисунке 124.

a	k	b
n	z	l
d	m	c

Поскольку

$$\begin{aligned}4s = (a + k + n + z) + (k + b + z + l) + (n + z + d + m) + (z + l + m + c) =\\ = a + b + c + d + k + l + m + n + z + (k + l + m + n + 3z) =\\ = 1 + 2 + \ldots + 8 + 9 + (k + l + m + n + 3z) =\\ = 45 + (k + l + m + n + 3z)\end{aligned}$$

и

$$2+3+4+5+3\cdot 1 \leqslant k+l+m+n+3z \leqslant 5+6+7+8+3\cdot 9,$$

то

$$45+17 \leqslant 4s \leqslant 45+26+27,$$

откуда $15 < s < 25$.

Осталось привести примеры для $s = 16, 17 \ldots, 24$. Впрочем, пример для $s = 20$ уже дан в условии задачи. Остальные — на рисунке 125. (Заметьте: замена каждого числа x таблицы на число $10 - x$ переводят таблицу, соответствующую числу s, в таблицу, соответствующую числу $40 - s$. Поэтому придумывать пришлось только первую половину этих таблиц.)

5	3	8
7	1	4
6	2	9

6	7	5
1	3	2
9	4	8

4	9	5
2	3	1
7	6	8

1	7	4
8	3	5
6	2	9

9	3	6
2	7	5
4	8	1

6	1	5
8	7	9
3	4	2

4	3	5
9	7	8
1	6	2

5	7	2
3	9	6
4	8	1

271. Например,

$$A = (11\cdot 10^{33}+1)^3 = 1331\cdot 10^{96} + 363\cdot 10^{64} + 33\cdot 10^{32} + 1,$$
$$B = (10^{32}+11)^3 = 10^{99} + 33\cdot 10^{66} + 363\cdot 10^{33} + 1331.$$

272. Не может. Предположим, что каждая из сторон четырехугольника может пересекаться какой-либо биссектрисой в точке, отличной от вершины. Сторон четыре и биссектрис столько же. Проведем диагонали четырехугольника и отметим их точку пересечения буквой O. Биссектриса угла A пересекает или сторону BC, или сторону CD. Если она пересекает сторону CD, то она пересекает и отрезок OD. Тогда сторону BC и отрезок OC пересекает биссектриса угла D, сторону AB и отрезок OB — биссектриса угла C, а сторону AD и отрезок OA — биссектриса угла B. Обозначим точки пересечения биссектрис с диагоналями буквами A', B', C' и D' (рис. 126).

Поскольку $\frac{AB}{BC} = \frac{AB'}{B'C} < \frac{AD'}{D'C} = \frac{AD}{CD}$, то $\frac{AB}{CD} < \frac{BC}{AD}$. Вместе с тем $\frac{AB}{AD} = \frac{A'B}{A'D} > \frac{C'B}{C'D} = \frac{BC}{CD}$, то есть $\frac{AB}{CD} > \frac{BC}{AD}$. Противоречие.

273. Больше трёхчленов, не имеющих корней.

274. Самый большой делитель числа $n-1$ равен $n-1$, но тогда сумма остальных двух делителей должна быть равна 1, что невозможно. Поэтому число $n-1$ не может входить в указанную сумму. Из оставшихся делителей числа $n-1$ самый большой, очевидно, не превышает $(n-1)/2$, следующий по величине не превышает $(n-1)/3$, следующий — $(n-1)/4$, и так далее. Теперь ясно, что делитель, равный $(n-1)/2$, непременно должен входить в сумму (иначе сумма трех делителей будет меньше n).

По той же причине в сумму обязано обязано входить и слагаемое $(n-1)/3$, а третье слагаемое не может быть меньше $(n-1)/5$. Поэтому третье слагаемое равно $(n-1)/4$ или $(n-1)/5$. Осталось составить линейные уравнения и найти ответ: $n = 13$ или 31.

275. Вообразите, что мы разработали способ, который для любого исходного количества монет позволяет выделить и оставить у нас меньшее число монет, причем среди оставшихся настоящих опять больше, чем фальшивых. Тогда мы рано или поздно дойдем до того, что монет останется одна или две, а настоящих среди них будет больше, чем фальшивых, то все они будут настоящие.

Осталось придумать такой способ уменьшения числа монет. Разберём два случая.

Число монет четно. Разобьем их на пары и взвесим. Если весы при каком-то взвешивании показали равенство, то монеты либо обе настоящие, либо обе фальшивые. Равенств настоящих монет должно быть больше, чем равенств среди фальшивых (ибо настоящих монет было больше). В следующий этап проходят по одной монете из каждого такого равенства (которые останутся после того, как заберёт плату хозяин весов).

Число монет нечетно. Разобьем их на несколько пар и ещё одну монету. Произведя взвешивание в каждой паре, подсчитаем число возникших равенств. Если их оказалось нечетное число, то отберем, как и прежде, по одной монете из каждого равенства, так как равенств среди настоящих монет не может быть меньше, чем равенств среди фальшивых. Если же равенств четное число, то возьмём оставленные нам хозяином весов монеты из равенств и добавим к ним оставленную ранее в стороне монету. Настоящих монет опять больше, чем фальшивых. (Подумайте, почему!)

276. Соединим центр каждой грани с её вершинами и по проведённым отрезкам проведём разрезы. Получим 6 конгруэнтных ромбов с острым углом при вершине величиной 60° (ромбы будут перегнуты, но это можно расправить). Разрезав каждый такой ромб по короткой диагонали, получим требуемое.

278. На рисунке 127 проведены 36 диагоналей. Докажем, что больше 36 не бывает — рассмотрим отмеченные кружочками точки рисунка 128. Один из концов любой диагонали — отмеченный. Поэтому диагоналей не больше, чем кружочков, то есть не больше 36.

Интересно, какое наименьшее число диагоналей можно провести так, чтобы никакие две из них не имели ни одной общей точки и нельзя было провести ни одной другой диагонали с соблюдением этого условия? На рисунке 129 вы видите 23 диагонали. Можно ли меньше?

279. Продлим стороны AF, BC и DE в обе стороны до пересечения и поставим точки K, L и M (рис. 130). Тогда треугольники AKB, CLD и EMF равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Значит, $AK = CL = EM$ и $KB = DL = MF$. Но и углы AKB, CLD и EMF равны, то есть в треугольнике KML все углы равны, и он равносторонний. Тогда $MK = KL = LM$ и $BC = KL - KB - CL$. Аналогичные равенства можно записать для отрезков DE и FA. Сравнивая выражения, легко установить, что $BC = DE = FA$.

280. 72°.

281. $x = y = z = 1$. Все неизвестные — неотрицательные числа. Если $x > 1$. Тогда $y < 1$, откуда $z > 1$ и, следовательно, $x < 1$. Противоречие. Случай $x < 1$ аналогичен рассмотренному.

282. Пусть из спичек сложен прямоугольник высотой m и шириной n спичек. Тогда горизонтально расположенных спичек $n(m+1)$, а вертикально расположенных — $m(n+1)$. Уравнение

$$mn + n + mn + m = 1000$$

можно преобразовать, домножив обе его части на 2 и прибавив по 1, к уравнению

$$(2m+1)(2n+1) = 2001.$$

Поскольку $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$, по сути осталось рассмотреть три случая: $(2m+1; 2n+1) = (3; 667)$, $(23; 87)$ или $(29; 69)$. Им соответствуют значения $(m; n) = (1; 333)$, $(11; 44)$, $(14; 34)$.

283. Рассмотрим куб $ABCDA'B'C'D'$. Первоначально поместим по точке во все 8 вершин куба, кроме D'. Сдвинем точки из трех соседних вершин D, A' и C' вдоль рёбер на одну и ту же величину по направлению к D' так, чтобы все расстояния между ними были больше 2001, но меньше 2001,1. Точки из вершин A, C и B' сдвинем по диагоналям граней к D', чтобы расстояния между ними и точками D, A' и C' были больше 2001, но меньше 2001,1. Осталось убедиться, что точка A также отстоит от всех остальных точек на расстояние, большее 2001.

286. 49.

287. Поскольку $2 \cdot \left[\frac{p}{9}\right] + 1 < \frac{2p}{9} + \frac{p}{150} < 0{,}23p$, достаточно доказатать существование палиндрома, состоящего не более чем из $2[p/9] + 1$ цифр.

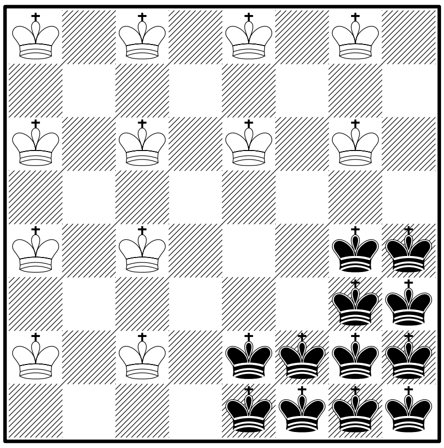
Рассмотрим $(2[p/9]+1)$-значное число, у которого первая и последняя цифры — единицы, а все остальные («внутренние») — нули (рис. 131). Под ним запишем второе число, у которого первая и последняя цифры двойки. Затем — тройки, и так вплоть до девяток.

Затем будем увеличивать от 0 до 9 вторую и предпоследнюю цифры, не трогая остальных. Затем — третью слева и третью справа и так далее. Последнее число этой конструкции состоит только из девяток, за исключением средней цифры, равной 0. Наконец, постепенно увеличиваем от 0 до 9 эту среднюю цифру, пока все цифры числа не станут равными 9.

Всего выписано $9 \cdot [p/9] + 1 > p$ чисел. Если хотя бы одно делится на p, то искомый палиндром уже найден. Если нет, то какие-то два из них дают одинаковые остатки при делении на p. Их разность делится на p и является палиндромом (возможно, с несколькими нулями, которые можно отбросить, ибо p взаимно просто с 10).

288. 9.

289. 24 короля расставлены на рисунке 132. Будем называть белыми королей, которые никому не угрожают, а чёрными — остальных. Пусть белых королей больше 12. Разобьём доску на 16 квадратов размером 2×2. Не менее чем 13 из них заняты белыми королями (не терпящими никакого соседства!). Но в $16 - 13 = 3$ квадратах разместить 13 чёрных королей невозможно.



291. $10 + 20\sqrt{2}$ секунд.

292. Обозначив середины отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 через A_3, B_3 и C_3 соответственно, сведите дело к проверке равенства $(AB_3 - B_3C) + (CA_3 - A_3B) + (BC_3 - C_3A) = 0$. Пусть l — длина стороны треугольника ABC. Домножив первую скобку на $AB_3 + B_3C = l$, вторую на $CA_3 + A_3B = l$, а третью на $BC_3 + C_3A = l$, воспользуйтесь теоремой Пифагора:

$$(AB_3^2 - B_3C^2) + (CA_3^2 - A_3B^2) + (BC_3^3 - C_3A^2) = AO^2 - OC^2 + CO^2 - OB^2 + BO^3 - OA^2 = 0.$$

293. Пусть $ABCD$ — квадрат со стороной длины $\sqrt{6}$, $EFGH$ — квадрат со стороной длины 2, точки P, Q и R — середины отрезков EF, FG и EP соответственно (рис. 133). Поскольку в треугольниках BEF, CFG, DGH и AHE расстояние от вершины прямого угла до гипотенузы равно $1/2$, можно сложить развёртку, изображённую на рисунке 134.

Рисунки 24 и 25 страницы 33 брошюры за 2001 год.

294. 16-значные числа, первые 10 цифр которых — единицы, удобны.

296. Можно. В прямоугольнике, длина которого чуть меьше 3 м, а ширина — чуть меньше 2 м, сделаем треугольные вырезы (рис. 135). Наклон такого прямоугольника относительно стен комнаты, сколь бы мал он ни был, при достаточно большом числе числе треугольных вырезов позволяет затащить стол в комнату (рис. 136). Сумма площадей треугольников равна четверти площади прямоугольника. Поэтому в комнату можно внести стол, площадь которого сколь угодно близка не только к 4, но даже к 4,5 м^2.

Рисунки 29 и 36 страницы 36 брошюры за 2001 год.

297. Нет. Для определённости, пусть $x \leqslant y \leqslant z$. Если $\text{НОК}[x, y, z] = \text{НОК}[x+1, y+1, z$ $= \text{НОК}[x+2, y+2, z+2] = n$, то каждое из чисел xyz, $(x+1)(y+1)(z+1)$ и $(x+2)(y+2)(z+2)$ делится на n. В таком случае делится на n и число

$$xyz - 2(x+1)(y+1)(z+1) + (x+2)(y+2)(z+2) = 2x + 2y + 2z + 6 \leqslant 6z + 6.$$

Поскольку числа $z+1$ и $z+2$ взаимно просты, то

$$6z + 6 \geqslant n \geqslant (z+1)(z+2),$$

откуда $6 \geqslant z^2 - 3z$. Следовательно, $z < 5$. Осталось перебором убедиться, что искомых чисел не существует.

298. а) Пусть x — наименьшее, а y — наибольшее из десяти чисел. Числа x и y при преобразовании переходят либо сами в себя, то есть $x = ax + b$ и $y = ay + b$, откуда $a = 1$ и $b = 0$; либо меняются местами: $y = ax + b$ и $x = ay + b$, откуда $a = -1$.

б) Рассмотрите первые 10 натуральных чисел и отображение, заданное формулой $t \mapsto 11 - t$.

299. Нельзя. Если бы было можно, то сумма количеств фишек на соседних вертикалях вследствие формулы $x + 2x = 3x$ делилось бы на 3. С другой стороны, для количества фишек на горизонталях, снизу вверх, есть лишь четыре варианта: либо 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3; либо 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1; либо 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2, 6; либо, наконец, 6, 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2. Количества фишек на доске в первых двух случаях равны 16, а в третьем и четвёртом — 32. Но ни 16, ни 32 не делится на 3.

300. Раскрыв скобки в правой части равенства, приводим равенство к виду $3(ab^2 + ac^2 + a^2b + a^2c + bc^2 + b^2c - 6abc) = 0$. Сократив обе части на 3, получаем равенство

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-c)^2 = 0.$$

Поскольку числа a, b и c положительные, равенство выполнено лишь при $a = b = c$.

301. а) Спроецируем червяков на две перпендикулярные стороны рассматриваемого квадрата 16×16. Каждый из червяков даст в эту сумму вклад, не меньший $2 + 3 = 5$. Но $13 \cdot 5 = 65 > 2 \cdot (16 + 16)$.

б) Нет. Четыре червя можно разместить в квадрате размером 5×5 так, что никакая вертикаль или горизонталь не пересекает более чем двух червей (рис. 137). Можно разместить три таких квадрата «по диагонали» в квадрате размера 16×16.

Рисунок 3 страницы 50 «Кванта» номера 1 за 2002

302. Нельзя. Карточка с цифрой 0 может участвовать в образовании следующих отличных от 1 чисел: 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2. Искомый отличный от 1 общий делитель является делителем одного из перечисленных чисел. Поэтому достаточно заметить, что хотя бы одно из десяти чисел, которые образуются при выкладывании карточек, нечётно, хотя бы одно не делится на 5, хотя бы одно не делится на 3 и хотя бы одно не делится на 7.

303. Поскольку треугольник AMN подобен треугольнику BMC (рис. 138), то $\frac{AN}{BC} = \frac{AM}{BM}$. Поэтому $\frac{DN}{BC} = \frac{DA+AN}{BC} = 1 + \frac{AN}{BC} = 1 + \frac{AM}{BM} = \frac{BM+MA}{BM} = \frac{BA}{MB}$. Следовательно, $\frac{ND}{DB} = \frac{DN}{BC} = \frac{BA}{MB} = \frac{DB}{BM}$. Поскольку $\angle NDB = 60^\circ = \angle DBM$, то треугольник NDB подобен треугольнику DBM, так что существует поворотная гомотетия, переводящая $\triangle NDB$ в $\triangle DBM$. Величина угла между прямой DB и её образом при поворотной гомотетии — прямой BM — равна 60°. Поэтому и величина угла между прямой NB и её образом — прямой DM — тоже равна 60°.

Рисунок 7 страницы 56 «Кванта» номера 2 за 2002

304. 26. Число 40 в виде произведения двух натуральных множителей, первый из которых больше второго, можно представить четырьмя способами: $40 \cdot 1 = 10 \cdot 4 = 8 \cdot 5 = 20 \cdot 2$. Рассмотрим эти случаи.

1) Таблицу из 40 строк и 1 столбца можно разбить на 10 «кусочков» по 4 клетки в каждом. В каждом «кусочке» должна содержаться хотя бы одна буква У; но $10 > 7$.

2) На рисунке 139 таблица размером 10×4 разбита на 8 кусочков, в каждом из которых должна присутствовать хотя бы одна буква У — в противном случае в помеченной звёздочке клетке и в соседних с ней клетках написана буква А; но $8 > 7$.

Рисунок 9 страницы 56 «Кванта» 2 за 2002

Только вместо крестиков — звёздочки. И красить не надо.

3) На рисунке 140 таблица размером 8×5 разбита на 6 кусочков, ни в одном из которых не может быть больше одной буквы У; но $6 < 7$.

Рисунок 9 страницы 56 «Кванта» 2 за 2002

4) Таблицу размером 20×2 можно заполнить буквами А и У, как показано на рисунке 141. Есть и другие способы. Но в любом случае все буквы У расположены в разных строках. После вычёркивания 7 строк с буквами У останется 13 строк с двумя буквами А в каждой.

Рисунок 10 страницы 56 «Кванта» 2 за 2002

305. Малыш.

Лемма 1. Если Карлсон получает от Малыша кусок сыра размером $1 \times n \times n$, где $n > 1$, то Малыш может выиграть, как бы ни играл Карлсон.

Доказательство — индукция. Предположим, что для всех натуральных чисел n, где $1 < n < N$, утверждение леммы верно. Если Карлсон оставит Малышу кусок размером $1 \times 1 \times N$, то Малыш сразу выиграет. Если же Карлсон оставит кусок размером $1 \times n \times N$, где $1 < n < N$, то Малыш может своим ходом оставить Карлсону кусок размером $1 \times n \times n$, после чего, по нашему предположению, Малыш может выиграть, как бы ни играл Карлсон.

Лемма 2. Если Малыш оставит Карлсону кусок сыр размером $2\times(2n-1)\times 2n$, где $n>1$, то Малыш может выиграть, как бы ни играл Карлсон.

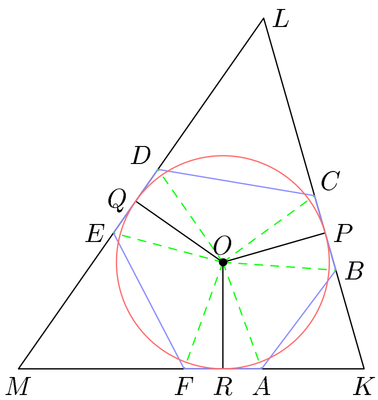
Доказательство — индукция. База — случай куска размером $2\times 3\times 4$ — проверяется непосредственно.

Переход. Предположим, что утверждение леммы 2 верно для любого n, где $2\leqslant n<N$. Рассмотрим кусок размером $2\times(2N-1)\times 2N$, где $N\geqslant 3$. Карлсон может, разрезая перпендикулярно оси абсцисс, превратить его в кусок размером а) $1\times(2N-1)\times 2N$; перпендикулярно оси ординат — в кусок размером б) $2\times 1\times 2N$, в) $2\times 2\times 2N$ или г) $2\times k\times 2N$, где $3\leqslant k<2N$; перпендикулярно оси аппликат — в кусок размером д) $2\times(2N-1)\times 1$, е) $2\times(2N-1)\times 2$ или ж) $2\times(2N-1)\times k$, где $3\leqslant k<2N$.

Малыш может превратить эти куски в куски размером а) $1\times(2N-1)\times(2N-1)$; б) $2\times 1\times 2$; в) $2\times 2\times 1$; г) $2\times k\times(k+1)$, если k нечётно, и $2\times k\times(k-1)$, если k чётно; д) $2\times 2\times 1$; е) $2\times 1\times 2$; ж) $2\times 2\times 1$, если $k=1$, $2\times(k+1)\times k$, если k нечётно и $1<k<2N-1$, $2\times 1\times 2$, если $k=2N$, наконец, $2\times(k-1)\times k$, если k чётно и $2<k<2N$. Лемма 2 доказана.

Для решения задачи осталось заметить, что первым своим ходом Малыш может оставить Карлсону кусок размером $2\times 2001\times 2002$, и применить лемму 2 при $n=1001$.

306. Продлим отрезки BC, DE и FA до появления треугольника KLM (рис. 142), впишем в него окружность и соединим её центр O с точками P, Q и R её касания со сторонами треугольника. Поскольку $\angle A=\angle B$, то $AK=KB$. Далее, $RK=KP$. Следовательно, $RA=RK-AK=KP-KB=PB$. Обозначим $RA=PB=x$; аналогично, $PC=QD=y$ и $QE=RF=z$.



Равенства $BC=DE=FA$ приводят к системе уравнений $x+y=y+z=z+x$, откуда $x=y=z$. Осталось вспомнить, что $OP=OQ=OR$, и вывести из теоремы Пифагора равенства $OA=OB=OC=OD=OE=OF$.

307. Если $ab^2+ba^2=0$, то $ab(b+a)=0$, то есть $a=0$, $b=0$ или $a=-b$. В любом из этих трёх случаев $a^5+b^5=(a+b)^5$.

Обратно, пусть $(a+b)^5=a^5+b^5$. Раскроем скобки:

$$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5=a^5+b^5,$$

откуда $5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4=0$. Как легко проверить,

$$a^4b+2a^3b^2+2a^2b^3+ab^4=\frac{1}{2}ab(a+b)((a+b)^2+a^2+b^2).$$

Последнее произведение равно нулю тогда и только тогда, когда $a = 0$, $b = 0$ или $a + b = 0$. В любом из этих случаев $ab(a + b) = 0$.

Равенство $ab^2 + ba^2 = 0$ можно вывести из равенства $a^5 + b^5 = (a + b)^5$ и по-другому. Предположим, ни одно из равенств $a = 0$, $b = 0$ и $a + b = 0$ не выполнено. Если числа a и b одного знака (оба положительные или оба отрицательные), то величина $(a + b)^5$ по модулю больше суммы суммы модулей величин a^5 и b^5. Если числа a и b разных знаков, то знак одного из чисел $-a$ и $-b$ совпадает со знаком суммы $a + b$, а знак другого числа противоположен ему. Пусть, для определённости, совпадают знаки чисел $a + b$ и $-a$. Преобразовав исходное равенство к виду

$$(a + b)^5 + (-a)^5 = ((a + b) + (-a))^5,$$

получаем противоречие!

308. По условию,

$$\overline{ab} = 10^5 \cdot a + b = abm, \tag{$*$}$$

где $m \in \mathbb{N}$ и $m > 1$. Следовательно, b делится на a, то есть $b = ka$, где k — однозначное число. Равенство ($*$) запишем в виде $10^5 + k = kam$. Очевидно, 10^5 делится на k; значит, $k = 1$, 2, 4, 5 или 8. Поскольку число $km = (10^5 + k)/a$ однозначное, $k \neq 8$ и $k \neq 5$.

Число 100 001 не имеет отличных от 1 однозначных делителей. Число 100 002 имеет однозначный делитель, кратный 2 и больший 2: число 6. При этом $a = 10\,002/6 = 16\,667$ и $b = 2a = 33\,334$. Других примеров нет: при $k = 4$ должно быть $m = 2$, но 10 004 не делится на 8.

309. Дословно из «Кванта» №4, 2002 г., задача номер 16, страница 60

310. **Лемма.** $MA = MI = MC$.

Доказательство. $\angle IAM = \angle IAC + \angle CAM = \angle IAB + \angle CBM = \angle IAB + \angle IBA = \angle AIM$ по теореме о внешнем угле треугольника ABI. Следовательно, $MA = MI$. Осталось заметить, что $MA = MC$, ибо M — середина дуги AC.

Если $\angle ABC = 60^\circ$, то по теореме о вписанном угле $\angle AOC = 120^\circ$; поэтому $\angle AOM = \frac{1}{2}\angle AOC = 60^\circ$ и, следовательно, ΔAOM равносторонний, $MI = MA = MO$.

Обратно, если $MI = MO$, то в силу леммы $MA = MO$ и поэтому треугольник AMO равносторонний, $\angle AOM = 60^\circ$, по теореме о вписанном угле $\angle ABM = 30^\circ$ и $\angle ABC = 2\angle ABM = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$.

311. Пытаясь справиться со своей задачей за один день, следователь обязан пригласить всех островитян. Если 600 из них скажут, что лжецов 400, а остальные 400 скажут, что лжецов 600, то следователь не будет знать, кто прав.

За два дня узнать, кто есть кто, легко. В первый день он пригласит всех островитян. Получив ответы, разобьёт островитян на группы, объединяя в одну группу островитян, давших один и тот же ответ. Пусть оказалось n разных ответов.

Если $n = 1$, то все островитяне правдивые. Пусть $n > 1$. Все правдивые островитяне дали правильные ответы и поэтому оказались в одной группе. Лжецы — в остальных $n - 1$ группах. На второй день следователь приглашает по одному островитянину из каждой группы. Среди приглашённых n островитян один —

правдивый — даст ответ «$n-1$». Островитяне его группы правдивые. Остальные — лжецы.

312. Раскрасим комнаты в шахматном порядке, чтобы угловые комнаты были чёрными. Белых комнат 40, а чёрных — 41. Каждая открытая дверь «принадлежит» двум соседним комнатам разного цвета. Поэтому количество открытых дверей равно количеству открытых дверей белых комнат; оно равно и количеству открытых дверей чёрных комнат.

Поскольку в каждой белой комнате открыто в пункте а) не более 1 двери, а в пункте б) — не более двух, то всего открыто, соответственно, не более 40 и 80 дверей. Рисунки 143 и 144 подтверждают, что эти значения достижимы.

в) Поскольку в каждой из 4 угловых комнат не более 2 дверей, а в каждой из 37 остальных чёрных комнат — не более чем по 3 двери, то число открытых дверей не превосходит $4+3\cdot 37=119$. Это значение достижимо (рис. 145).

313. Посмотрите на рисунок 146.

Дальше — для рисунка!!!

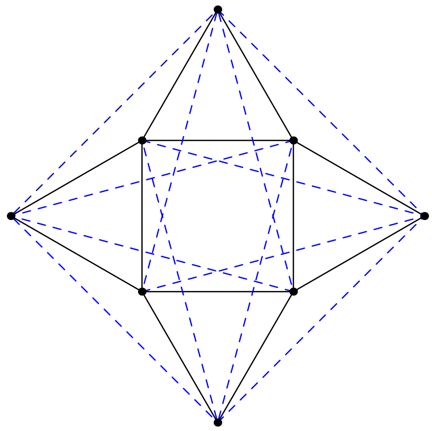
×	×	○	○	×	×	○	○	×	×
○	○	×	×	○	○	×	×	×	×
×	×	○	○	×	×	○	○	×	×
○	○	×	×	○	○	×	×	×	×
×	×	○	○	×	×	○	○	×	×
○	○	×	×	○	○	×	×	×	×
×	×	○	○	×	×	○	○	×	×
○	○	×	×	○	○	×	×	×	×
×	×	○	○	×	×	○	○	×	×
○	○	×	×	○	○	×	×	×	×

Внимание! Это квадрат!!!

Этот рисунок есть на рисунке с. 56, «Квант» №3, 2003 г.

314. Если в выражении чётное число минусов, его можно привести к виду $1+2+3+4+5+6=21$, а если число минусов нечётное, то к виду $1+2+3+4+5-6$, что двумя заменой знаков (рядом с четвёркой и тройкой) можно привести к виду $1+2-3+4-5-6=-7$.

315. Рассмотрите вершины квадрата и вершины равносторонних треугольников, построенных на его сторонах вне него (рис. 147). Ту же конфигурацию получим, если равносторонние треугольники построим не во внешнюю, а во внутреннюю сторону (пунктирные линии того же рисунка).



316. Они лежат на окружности того же радиуса с центром в точке A.

317. *Первый способ.* Треугольники $A_2B_1C_2$, $C_2A_1B_2$ и $B_2C_1A_2$ (рис. 148) обладают следующими свойствами: $C_2B_1 = C_2A_1$, $B_2A_1 = B_2C_1$ и $A_2C_1 = A_2B_1$, а также $\angle A_2B_1C_2 + \angle C_2A_1B_2 + \angle B_2C_1A_2 = 360^\circ$. (Последнее равенство легко получить при помощи теоремы о вписанном угле. Можно рассуждать и иначе: проведя отрезки IA_1, IB_1 и IC_1, воспользовавшись равнобедренностью треугольников B_1IC_2, C_2IA_1, ..., A_2IB_1, получить равенство $\angle A_2B_1C_2 + \angle C_2A_1B_2 + \angle B_2C_1A_2 = \angle B_1C_2A_1 + \angle A_1B_2C_1 + \angle C_1A_2B_1$. Из него, поскольку сумма величин углов шестиугольника равна 720°, следует обсуждаемое равенство.) Следовательно, из этих трёх треугольников можно сложить треугольник. По трём сторонам он конгруэнтен треугольнику $A_2B_2C_2$.

Рисунок 5 стр. 56 «Кванта» №3 за 2003 г.

Второй способ. Обозначив $\angle BAC = \alpha$ и $IA_1 = IB_1 = IC_1 = r$, докажите равенства $\angle BIC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ и $S_{B_2IC_2} = \frac{r^2\sin\left(90^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}{2} = \frac{r^2\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{2} = S_{A_2IB_1} = \frac{1}{2}S_{A_2B_1IC_1}$.

318. Проведём средние линии прямоугольника $ABCD$. Пусть точка M принадлежит той же части прямоугольника, что и A (рис. 149). Тогда $MC \geqslant MB$, $MC \geqslant MD$ и $BM + MD \geqslant BD \geqslant AC$, причём два последних неравенства не могут одновременно обращаться в равенства.

Рисунок брошюры страница 36, 2002 год

Или «Квант», стр. 56, рисунок 6, журнал 2 за 2003 год. Только $A \to D \to \ldots$

319. Сделаем разрез по жирной линии (рис. 150) и затем согнём по пунктирным линиям, чтобы получилась двуслойная фигура рисунка 151. Нижний квадрат — дно коробки, верхние четыре — бока.

Рисунки 7 и 8 стр 57, «Квант» №3, 2003 год

320. 2, 3 и 5. Если p, q и r — искомые числа, то $pq + qr + rp \equiv 1 \pmod{pqr}$.

321. Если $n = 2m$, то произведение чисел 1, $m - 1$ и $2m$ равно сумме остальных чисел. Если $n = 2m + 1$, перемножайте числа 1, m и $2m$.

322. За 360 ходов. Каждая фишка, кроме возможно какой-то одной, должна сделать ход по вертикали (а значит, не менее двух ходов). Поэтому вертикальных ходов не менее $2 \cdot 24 = 48$.

Фишка номер 1, как и фишка номер 25, должна сделать не менее 24 ходов по горизонтали. Фишка номер 2, как и фишка номер 24,— не менее 22 ходов, и так далее. Таким образом, горизонтальных ходов не менее $2(24 + 22 + 20 + \ldots + 4 + 2) = 312$.

Чтобы переставить фишки за 360 ходов, достаточно сначала по очереди поставить каждую из первых 24 фишек над теми полями, куда им надо встать. Затем 25-ю фишку сдвигаем до упора влево и каждую из первых 24 фишек сдвигаем вниз.

323. Напишите десятичную запись числа 2^n, припишите, если нужно, слева несколько нулей, чтобы количество цифр стало равно n, и затем допишите слева к полученному числу цифры, чтобы число стало палиндромом. Результат делится на 2^n, ибо как 2^n, так и любое число, оканчивающееся на n нулей, делится на 2^n.

324. Число 1929 не представимо в виде разности двух палиндромов.

325. При $n = 3$ воспользуйтесь равенством $(a! - 1)! \cdot a! \cdot (b!)! = (a!)! \cdot (b! - 1)! \cdot b!$. При $n = 2$ и для индукционного перехода — равенствами $a! \cdot (a^2 + 3a + 2)! = (a + 2)! \cdot (a^2 + 3a + 1)!$.

326. Докажем индукцией по k, что можно поменять местами любые два соседних числа, наибольший общий делитель которых равен k. При $k = 1$ — можно. Пусть любую пару чисел, наибольший общий делитель которых меньше некоторого числа k, можно переставить, причём в процессе перестановки остальные числа могут передвигаться, но в конце концов возвращаются на свои места. Рассмотрим числа a и b, наибольший общий делитель которых равен k. Первые $k - 1$ натуральных чисел передвинем, чтобы они встали между a и b. Поменяем местами числа a и b, после чего вернём числа от 1 до $k - 1$ на исходные места.

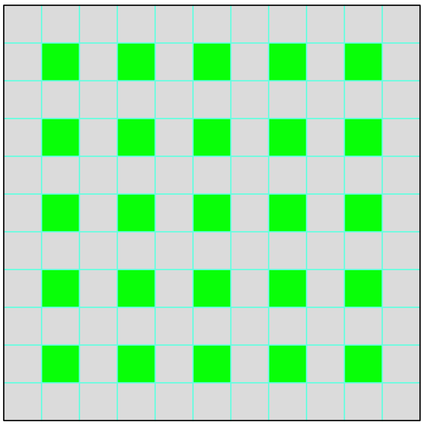
327. Раскроем все знаки модуля. Каждое из чисел a_1, a_2, ..., a_{22} войдёт либо оба раза со знаком плюс, либо один раз со знаком плюс и один раз со знаком минус, либо оба раза — со знаком минус. Наибольшего возможного значения сумма модулей достигает, когда числа от 12 до 22 оба раза входят с «плюсом», а числа от 1 до 11 — со знаком минус. Следовательно, искомая величина равна разности

$$22 + 21 + 20 + \ldots + 11 + 12 - 11 - 10 - 9 - \ldots - 2 - 1 = 121.$$

328. $[(n^2 + 4n + 3)/4]$. Пусть n нечётно, $n = 2k + 1$. Расстановка по кругу, при которой на нечётных местах стоят по возрастанию числа от 1 до $k + 1$, а на чётных — по убыванию числа от $2k + 1$ до $k + 2$, даёт произведение $(k + 1)(k + 2) = \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+3}{2} = \frac{n^2+4n+3}{4}$. Меньшая величина невозможна, поскольку хотя бы два из чисел от $k + 1$ до $2k + 1$ должны стоять рядом.

Если же n чётно, $n=2k$, на нечётных местах расставим по возрастанию числа от 1 до k, а на чётных — по убыванию числа от $2k$ до $k+1$, даёт произведение $k(k+2)$. Если в некоторой расстановке произведение меньше $k(k+2)$, то никакие два из чисел $k+1$, $k+2$, ..., $2k$ не стоят рядом; при этом по обе стороны от числа k стоят числа, большие k. Хотя бы одно из произведений при этом не меньше $k(k+2)=\frac{n^2+4n}{4}=\left[\frac{n^2+4n+3}{4}\right]$.

329. 50. Отметим 25 клеток, как показано на рисунке 152. Любой квадрат накрывает одну такую клетку, причём ни одна клетка не может принадлежать более чем двум квадратам. Значит, квадратов не более 50 штук.



Чтобы расположить 50 квадратов, составим из 25 квадратов размера 2×2 квадрат размером 10×10. Один такой квадрат положим в левый верхний угол доски 11×11, а другой — в её правый нижний угол.

331. 8. Пусть в точке A касания двух окружностей стартовали четыре бегуна, по два на каждой окружности, в противоположных направлениях. Каждые два из этих четырёх бегунов периодически встречаются.

Из точек, диаметрально противоположных точке A на этих окружностях, в тот же момент пусть стартуют, тоже в противоположных направлениях, по два бегуна (рис. 153). Каждые два из них тоже периодически встречаются.

Среди любых трёх из восьми указанных бегунов есть хотя бы двое из одной четвёрки.

Если же бегунов не менее 9, то найдётся пара противоположных окружностей, по которым бегут не менее 5 спортсменов. Если на некоторой окружности не менее 5 бегунов, то среди них есть трое, которые бегут в одном направлении и поэтому никогда не встречаются друг с другом. Если же 5 бегунов распределены по обеим окружностям, то хотя бы на одной из них есть двое, бегущие в одном направлении; добавив к ним любого бегуна с противоположной окружности, получим трёх бегунов, никогда не встречающихся друг с другом.

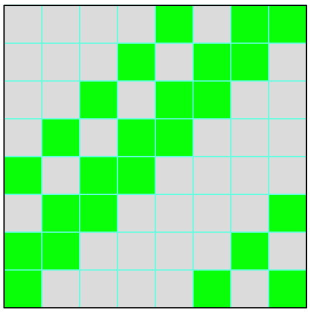
332. Неравенство $(a-1)(b^5-1)<0$ равносильно неравенству $(a^7-1)(b-1)<0$.

333. $x=y=z=1/2$ или $-1/2$. Очевидно, числа x, y и z одного знака. Если $(x;y;z)$ — решение, то $(-x;-y;-z)$ — тоже. Пусть числа x, y и z неотрицательны. Поскольку для любых неотрицательных чисел a и b верно неравенство $\sqrt{ab}\leqslant(a+b)/2$, то числа x, y и z не превосходят числа $1/2$; поэтому

числа $x+y$, $y+z$ и $z+x$ не больше 1. Перемножив уравнения системы, получаем равенство $(x+y)(y+z)(z+x)=1$; следовательно, $x=y=z=1/2$.

334. Саша может начать с числа 100. Если не угадал, вычислит, какие числа могли после этого оказаться у Тани, и назовёт наибольшее из них. Если угадал, то Саша знает, из какого числа оно получилось. Если не угадал, он вычислит, какие числа могут оказаться у Тани к этому моменту, и назовёт наибольшее из них. И так далее, пока не угадает.

335. 24. На рисунке 154 показано, как можно отметить 24 клетки. Предположим, удалось отметить 25 клеток.



Каждой паре клеток, лежащих на одной горизонтали, сопоставим пару вертикалей, которым эти клетки принадлежат. Прямоугольник возникает, если некоторая пара вертикалей сопоставлена двум парам отмеченных клеток. Расположенным на одной горизонтали n отмеченным клеткам при этом сопоставлены $C_n^2=n(n-1)/2$ пар вертикалей.

При $n=2$, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 имеем: $C_n^2=1$, 3, 6, 10, 15, 21 и 28 соответственно. Очевидно, $25=4+3+3+3+3+3+3+3$ — единственный способ так разбить число 25 на восемь слагаемых, чтобы сумма соответствующих чисел сочетаний не превосходила величины $C_8^2=8\cdot 7/2=28$. Сумма чисел сочетаний при этом равна $6+3+3+3+3+3+3+3=27$.

Поскольку $28-27=1$, только одна пара вертикалей не отмечена. Рассмотрим некоторую вертикаль v, не входящую ни в эту пару, ни в четвёрку вертикалей, каждая пара которых отмечена благодаря одной и той же горизонтали. Вертикаль v входит в некоторые «тройки». Каждая такая «тройка» даёт две (чётное число!) отмеченные пары, в которых участвует v. Но пар вертикалей, в которых участвует v, нечётное число — 7 штук.

336. Первая и последняя встречи — ничьи. Для любого $n>2$ построим по индукции турнир n команд, в котором лишь две ничьи. База — случай $n=3$ — тривиальна. Предположим, расписание такого турнира для n команд составлено. Составим расписание турнира с $n+1$ участницами. Сначала первые n сыграют все свои игры, кроме последней. Для определённости, пусть останется несыгранной игра между первой и n-й командами. Пусть первая команда сыграет сначала с $(n+1)$-й, а затем — с n-й. После этого $(n+1)$-я команда — все оставшиеся ей игры.

337. Отразим треугольники ABM и ADN относительно прямых AM и AN соответственно. Поскольку $\angle MAN=45^\circ=90^\circ-45^\circ=\angle BAM+\angle NAD$ и $AB=AD$, то

образы точек B и D совпадут. Обозначим эту точку буквой F (рис. 155). Точка F лежит на отрезке MN, ибо $\angle AFM = \angle ABM = 90^\circ = \angle ADN = \angle AFN$.

Рисунок 2 стр. 51 №1 за 2003 г.

Осталось заметить, что $\angle APQ = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DQ}) = 45^\circ + \angle DAQ = 45^\circ + (45^\circ - \angle BAM) = 90^\circ - \angle BAM = \angle BMA = \angle AMN$.

338. 4. Рассмотрим произвольное натуральное число m. Его наибольший делитель равен m, а все остальные не превосходят $m/2$. Следовательно, $\tau(m) \leqslant 1 + \frac{m}{2}$. Таким образом, $a = 2\tau(b) \leqslant 2\left(1 + \frac{b}{2}\right) = 2 + \tau(a) \leqslant 2 + 1 + \frac{a}{2}$. Неравенство $a \leqslant 3 + \frac{a}{2}$ означает, что $a \leqslant 6$. Поскольку число a чётно, то $a = 2$, 4 или 6. Разобрав все эти случаи, получаем: $(a; b) = (4; 3)$ или $(6; 4)$. Следовательно, $a + 2b = 10$ или 14. Очевидно, $\tau(10) = \tau(14) = 4$.

339. Любой вырезанный из квадрата 5×5 круг диаметра 1 содержится в некотором состоящем из 4 клеток квадрате. Докажем, что если из квадрата 5×5 вырезаны не только 5 кругов, но даже 5 четырёхклеточных квадратиков, то из оставшейся фигуры можно будет вырезать две «доминошки» — два прямоугольника размером 1×2.

На рисунке 156 изображены 6 горизонтальных доминошек, ни с какими двумя из которых не может одновременно иметь по общей клетке один четырёхклеточный квадрат. Поэтому хотя бы одну из этих доминошек можно вырезать.

Повернув рисунок 156 на 90°, получаем, что можно вырезать и хотя бы одну вертикальную доминошку. Если она не пересекается с горизонтальной, то искомые две доминошки найдены.

Если же пересекается, то это две доминошки, расположенные в углу доски. Пусть для определённости это доминошки, содержащие поле a1 (рис. 157). Чтобы нельзя было вырезать две доминошки, каждое из помеченных крестиками полей a3, b2 и c1 должно быть покрыто своим четырёхклеточным квадратом. Осталось обратить внимание на три отмеченные на рисунке 158 доминошек.

340. а) Из 14 красных, 4 жёлтых и 4 зелёных леденцов нельзя выбрать три пятёрки одноцветных леденцов. Среди любых 23 леденцов можно выбрать 5 леденцов одного цвета. Отдадим их Ниф-Нифу. Среди оставшихся 18 леденцов опять можно выбрать 5 одноцветных. Отдадим их Нуф-Нуфу. Среди оставшихся 13 леденцов опять (поскольку $13 > 3 \cdot 4$) можно выбрать 5 одноцветных леденцов для Наф-Нафа.

б) 9. Читайте статью А. Малеева «О колпаках, хранящихся в тёмном чулане» в «Кванте» №2 за 2003 год.

342.

Дословно — решение задачи 9, стр. 58, «Квант» №2 за 2003 г.

343. $11^2 = (-4)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$. Докажем, что $n = 11$ — единственное значение, удовлетворяющее условию задачи. Уравнение

$$(x+1)^2 + (x+1)^2 + \ldots + (x+n)^2 = n^2,$$

раскрывая скобки, преобразуем к виду $nx^2 + 2x(1 + 2 + \ldots + n) + 1^1 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = 0$, то есть $nx^2 + xn(n+1) + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = 0$. Разделив обе части на n и умножив на 6, получаем

$$6x^2 + 6(n+1)x + (2n^2 - 3n + 1) = 0,$$

откуда $x = \frac{-6n-6\pm\sqrt{36(n+1)^2-24(2n^2-3n+1)}}{12} = \frac{-6n-6\pm\sqrt{-12n^2+144n+12}}{12}$. Следовательно, число $12(12n - n^2 + 1)$ должно быть квадратом. При $n > 12$, очевидно, $n(12-n) + 1 < 0$. Перебрав значения $n = 2, 3, \ldots, 12$, находим $n = 11$.

344.

Дословно — решение задачи 11, стр. 55, «Квант» №3 за 2003 г.

345.

Дословно — решение задачи 12, стр. 55, «Квант» №3 за 2003 г.

346. *Первый способ.* Обозначим точку пересечения диагоналей буквой O, а площади треугольников AOB, BOC, COD и DOA — буквами a, b, c и d соответственно. Равенство $S_{ABD}S_{BCD} = S_{ABC}S_{ACD}$ приобретает вид $(x+t)(y+z) = (x+y)(z+t)$, которое равносильно равенству $(x-z)(y-t) = 0$. Если, для определённости, $x = z$, то $S_{ABC} = x + y = z + y = S_{DBC}$, так что точки A и D равноудалены от прямой BC, то есть $AD \parallel BC$.

Второй способ. Обозначим величины углов A, B, C и D четырёхугольника буквами α, β, γ и δ соответственно. Равенство произведений площадей можно записать в виде

$$\frac{AB \cdot DA \sin\alpha}{2} \cdot \frac{BC \cdot CD \sin\gamma}{2} = \frac{AB \cdot BC \sin\beta}{2} \cdot \frac{CD \cdot DA \sin\delta}{2},$$

то есть $\sin\alpha \sin\gamma = \sin\beta \sin\delta$, откуда

$$\cos(\alpha-\gamma) - \cos(\alpha+\gamma) = \cos(\beta-\delta) - \cos(\beta+\delta). \qquad (*)$$

Поскольку сумма углов четырёхугольника равна 360°, то $\cos(\alpha+\gamma) = \cos(\beta+\delta)$. Поэтому равенство (*) равносильно равенству $\cos(\alpha-\gamma) = \cos(\beta-\delta)$.

Равенство $\alpha-\gamma = \beta-\delta$ равносильно равенству $\alpha+\delta = \beta+\gamma$, которое благодаря равенству $\alpha+\delta+\beta+\gamma = 360^\circ$ означает, что $\alpha+\delta = \beta+\gamma = 180^\circ$, то есть $AB \parallel CD$.

Аналогично, из равенства $\alpha - \gamma = -(\beta - \delta)$ получаем $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180^\circ$, то есть $BC \parallel AD$.

347.

Дословно — решение задачи 14, стр. 56, «Квант» №3 за 2003 г.

348.

Дословно — решение задачи 15, стр. 56, «Квант» №3 за 2003 г.

349. Равенство $\frac{n(n+1)}{2} = k(k+1)$ равносильно равенству $n^2 + (n+1)^2 = (2k+1)^2$.

350.

Дословно — решение задачи 17, стр. 58–59, «Квант» №4 за 2003 г.

351.

Дословно — решение задачи 18, стр. 58–59, «Квант» №4 за 2003 г.

Ссылка — не на рисунок 2, а на рисунок 159.

Рисунок 2 стр. 59 «Кванта» №4 за 2003 г.

352.

Дословно — решение задачи 19, стр. 59, «Квант» №4 за 2003 г.

370. Можно: $110 = 2 + 6 + 6 + 24 + 24 + 24 + 24$.

377. Если на доске больше лягушек, чем свободных полей, то хотя бы одна лягушка A прыгнула на поле, которое было занято некоторой лягушкой B. При этом B прыгнула на одно из своих соседних полей — и соседствовавшие до прыжков лягушки A и B остались соседями после прыжков. Поэтому на доске размером $n \times n$ лягушек не больше, чем $n^2/2$.

Эта оценка точная. Рисунок 160 даёт пример для $n = 4$. «Тиражируя» такие квадраты нужное число раз по горизонтали и вертикали, получаем пример для любого, делящегося на 4. Рисунок 161 показывает, как действовать для любого нечётного числа n. Самый трудный случай $n \equiv 2 \pmod 4$ проиллюстрирован рисунками 162 и 163.

Рисунок 3 стр. 24, «Квант» №1 за 2004 г.

Хорошо бы квадратики косые заменить на лягушек!

Рисунок 2 стр. 24, «Квант» №1 за 2004 г.

И здесь хорошо бы квадратики косые заменить на лягушек.

378.

Дословно — решение задачи 3 стр. 52 «Кванта» №1 за 2004

380.

Дословно — решение задачи 4 стр. 52 «Кванта» №1 за 2004

Два рисунка! Их номера — 164 и 165.

381.

Дословно — решение задачи 5, стр. 52–53, «Квант» №1 за 2004 г.

Нумерацию рисунков — сдвинуть не забыть: 166, 167, 168, 169.

Рисунки 3, 4, 5, 6 нужны стр. 53 «Кванта» №1 за 2004

382. Пусть каждый из n рабочих изготавливает в день по m сувениров, а шеф — s сувениров. По условию, $s = \frac{mn+s}{n+1} + 13$, то есть $s = m + 13 + \frac{13}{n}$. Поскольку $n > 1$, то $n = 13$.

383. 0 или 1/2. Сложив равенства $x+y=[x+y]+\frac{1}{3}$, $y+z=[y+z]+\frac{1}{3}$ и $z+x=[z+x]+\frac{1}{3}$, видим:

$$2(x+y+z)=[x+y]+[y+z]+[z+x]+1.$$

Значит, число $x+y+z$ либо целое, либо отличается от целого числа на 1/2. Оба случая возможны: при $x=y=z=2/3$ имеем $x+y+z=2$, а при $x=y=z==1/6$ дробная часть суммы $x+y+z$ равна 1/2.

384. *Первый способ.* При помощи компьютера можно проверить, что 1437-значное число 123 ... 514515 удовлетворяет условиям задачи.

Второй способ. Рассмотрим последовательность чисел, первый член которой равен 1234567891, а каждый следующий получается выписыванием подряд десятичных записей чисел, начиная с 1 и вплоть до последнего только что выписанного члена последовательности. Среди первых 2004 членов построенной последовательности найдутся числа a и b, дающие одинаковые остатки от деления на 2003. Пусть $a<b$. Обозначим буквой n количество цифр числа a. Разность $b-a$ кратна 2003; последние n её цифр — нули. Отбросив их, получаем делящееся на 2003 число интересующего нас вида.

Здесь в роли числа 2003 могло выступить любое натуральное число n, не делящееся ни на 2, ни на 5. Если же $\text{НОД}(n;10)>1$, достаточно начать построение не с числа 1, а с выписанных одна за другой десятичных записей чисел от 1 до произведения достаточно высоких степеней двойки и пятёрки (например, до 10^n).

385. Годится $k=n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+m)+n$.

386. $\boxed{\text{Дословно — решение задачи 15 страницы 60. И рисунок 6!}}$

$\boxed{\text{«Квант», номер 3 за 2004 год. Ссылка — на рисунок 170, а не 6.}}$

387. Назовём n-цепочкой, где $2\leqslant n\leqslant 9$, цепочку цифр, стоящих между двумя крайними цифрами n, включая сами цифры n.

8-цепочка состоит из $8+7\cdot2=22$ цифр, 7-цепочка — из $7+6\cdot3=25$ цифр, а 6-цепочка — из $6+5\cdot4=26$ цифр. Нетрудно убедиться, что 6-цепочка пересекается с 7-цепочкой не более чем по 12 позициям, а с 8-цепочкой — не более чем по 8 позициям. 7-цепочка пересекается с 8-цепочкой не более чем по 6 позициям. Искомая последовательность состоит из $1+2+3+\ldots+9=45$ цифр. Но $22++25+26-12-8-6=47>45$.

388. $\boxed{\text{Дословно — решение задачи 17 стр. 60 «Кванта» №4 за 2004 г.}}$

389. $\boxed{\text{Дословно — решение задачи 18 стр. 58–59 «Кванта» №4 за 2004 г.}}$

390. a существует и единственно. Для делимости числа $\overline{aa}=1\underbrace{00\ldots0}_{98\text{ нулей}}1a$ на a^2 необходима и достаточна делимость 100-значного числа $1\underbrace{00\ldots0}_{98\text{ нулей}}1$ на 99-значное число a. Частное от такого деления может равняться только числу 7. Поэтому $a=1\underbrace{00\ldots0}_{98\text{ нулей}}1:7=\underbrace{142857\,142857\ldots142857\,143}_{99\text{ цифр}}$.

391. 13. Расставив числа 1, 2, 4, 8, ... , 2048, $4096 = 2^{12}$ в произвольном порядке в закрашенные на рисунке 171 клетки, мы получим таблицу, удовлетворяющую условию задачи.

a	f	k	a	f
b	g	l	b	g
c	h		c	h
d	i	k	d	i
e	j	l	e	j

С другой стороны, если для удовлетворяющей условию задачи таблицы в обеих клетках, помеченных на рисунке 171 буквой a, стоят нули, то сумма чисел прямоугольника, клетки которого помечены, слева направо, буквами a, f, k, равна сумме чисел прямоугольника, клетки которого помечены буквами f, k, a. Поэтому хотя бы на одной из двух клеток, помеченных буквой a, не ноль. То же самое можно сказать про любую другую пару клеток, помеченных на рисунке 171 одной буквой.

Таким образом, ненулей в таблице не менее 12. Предположим, что их ровно 12. Тогда в центральной клетке — число 0 и из любых двух клеток, помеченных на рисунке 171 одинаковыми буквами, в одной стоит ноль, а в другой — неноль. Если и в центральной строке, и в центральном столбце нули и ненули не чередуются, то сумма чисел в клетках b3, c3 и d3 равна нулю и она же равна сумме чисел в клетках c2, c3 и c4.

Если это не так, достаточно разобрать случай, когда в центральной строке нули и ненули чередуются. Если во всех угловых клетках стоят ненули (рис. 172, где ненули отмечены звёздочками), то нули стоят как в клетках a2, a3 и a4, так и в клетках e2, e3 и e4; суммы чисел в соответствующих прямоугольниках равны 0 и поэтому равны между собой.

Остался случай, когда хотя бы в одной угловой клетке стоит ноль. Предположим, это клетка a1. Тогда ненули в клетках a2 и d5 и поэтому нуль — в клетке d2 (рис. 173). Если в клетке d1 нуль, то сумма чисел полей c3, d3 и e3 равна сумме чисел полей d1, d2 и d3. Если же в клетке d1 не нуль, то нуль в клетке d4 и сумма чисел полей d2, d3 и d4 равна сумме чисел полей c3, c4 и c5.

392. а) Нет, рядом с числом 18 может стоять только 7.

б) Да, вот расстановка первых 15 чисел: 8, 1, 15, 10, 6, 3, 13, 12, 4, 5, 1, 14, 2, 7, 9.

393. Обозначим центры окружностей буквами O и Q (рис. 174). Поскольку DO и OC — радиусы, то $\angle ODC = \angle OCD$. Углы OCD и ACQ равны как вертикальные. Поскольку CQ и QA — радиусы, то $\angle ACQ = \angle CAQ$. Следовательно, $\angle ODC = \angle CAQ$; прямые OD и AQ параллельны. Поскольку $AQ \perp l$, то и $OD \perp l$.

394. Проверьте, что если заменить каждое из чисел x и y на их среднее арифметическое $(x+y)/2$, то величина $(1-x)(1-y)(1-z)(1-t)-xyzt$ не уменьшится. Затем заменим на их среднее арифметическое числа z и t. Заменой на среднее арифметическое первого и третьего чисел и, наконец, второго и четвёртого мы уравняем все числа. Неравенство обратится в равенство.

395. Рассуждаем по индукции. Для $n = 1$ или 2 утверждение верно. Пусть n колец можно расположить в любом порядке. Рассмотрим $n + 1$ кольцо. Расположим все кольца, кроме самого большого, в нужном порядке, не обращая пока внимание на положение самого большого. После этого самое большое кольцо можно поставить на нужное место, поскольку сквозь него продеваются все кольца, кроме второго.

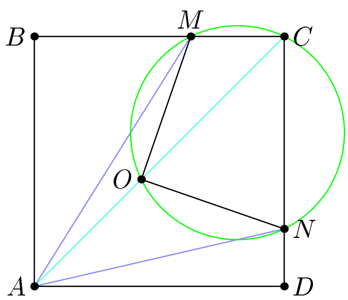
397. Рассмотрим момент, когда после нескольких (может быть нуля) операций окрашивания впервые оказались полностью окрашены пять вертикалей или пять горизонталей. После этого можно окрасить все, соответственно, горизонтали или вертикали. Таким образом, если всю доску удаётся окрасить, то можно обойтись не более чем $5 + 8 = 13$ операциями. Каждый раз добавляется не более 3 окрашенных клеток и поэтому вначале было не менее $64 - 13 \cdot 3 = 25$ окрашенных клеток.

С другой стороны, если вначале окрашены 25 клеток рисунка 175, то можно закрасить всю доску.

Рисунок 10 стр. 57 «Кванта» №3 за 2005 год.

398. а) $(a + b)^2 + (a + b)(a - b) + (a - b)^2 = 3a^2 + b^2$; б) $(a + b)^2 - (a + b)b + b^2 = a^2 + ab + b^2$.

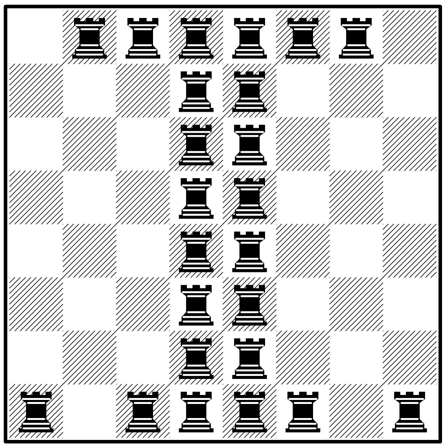
402. Рассмотрим точку O пересечения описанной окружности треугольника MNC с биссектрисой угла BCD (рис. 176). В силу равенства дуг OM и ON имеем $OM = ON$. Поскольку MN — диаметр окружности, то $\angle MON = 90^\circ$ и вследствие равенства $\angle MAN = 45^\circ$ точка A лежит на окружности с центром O и радиусом OM. Таким образом, точка O отрезка AC является центром описанной окружности треугольника AMN.



403.

Решение задачи стр. 58 «Кванта» №3 за 2005 год.

404. На рисунке 177 расставлены 24 ладьи. Можно доказать, что это число наибольшее.



405.

Решение задачи 12, стр. 58 «Кванта» №3 за 2005 г.

Номера рисунков 178 и 179— вместо 14 и 15.

Рисунки номер 14 и 15 страницы 58 «Кванта» №3 за 2005 г.

406. Следует.

407. 32.

409. 4009.

410. 13.

411. 18. На доске 8 горизонталей и 8 вертикалей. Поскольку $8+8<3\cdot 6$, на ладей хотя бы одного из трёх цветов приходится не больше 5 полос (каждая из полос — горизонталь или вертикаль). Поэтому ладей хотя бы одного цвета не более $2\cdot 3=6$. Эта ситуация возможна (рис. 180, буквами К, С и Ж отмечены соответственно красные, синие и жёлтые).

Рисунок 16 стр. 59 «Кванта» №3 за 2005 год.

Все линии — одной ширины!

420. Нет. Перемножив неравенства $1-x>y$, $1-y>z$ и $1-z>x$, получаем неравенство $(1-x)(1-y)(1-z)>yzx$.

421. Для любого натурального числа k существует такое n, что десятичная запись числа 2^n состоит из $6k+1$ цифр. При этом

$$\overline{2^{n+1}2^n}=2^{n+1}\cdot 10^{6k+1}+2^n=2^n(20\cdot 10^{6k}+1).$$

Число $10^6=1\,000\,000$, в силу малой теоремы Ферма, при делении на 7 даёт остаток 1. (Впрочем, делимость числа 999 999 на 7 можно проверить и непосредственно.) Следовательно, $20\cdot 10^{6k}+1\equiv 20\cdot 1+1=21\equiv 0 \pmod 7$.

422. *Первый способ.* Поскольку $2cz=(c+z)^2-c^2-z^2=(a+x)^2+(b+y)^2-(a^2+b^2)-(x^2+y^2)=2ax+2by$, то

$$ax+by=cz=\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}.$$

Возводя обе части равенства в квадрат, раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем

$$2axby=a^2y^2+b^2x^2,$$

откуда $(ay-bx)^2=0$, то есть $ay=bx$, что и следовало доказать: $a/b=x/y$.

Второй способ. Совместим прямые углы и катеты третьего и первого треугольников, вершину прямого угла второго треугольника поместим в произвольной точке M гипотенузы RS первого треугольника (рис. 181).

Рисунок 3 стр. 55 «Кванта» №3 за 2005 год.

Поскольку четырёхугольники $PFMR$ и $MGQS$ — параллелограммы, то длина ломаной $PFGQ$ равна длине гипотенузы PQ; следовательно, точки F и G лежат на отрезке PQ и все три треугольники ORS, OPQ и MFG подобны.

423.

Решение задачи 14, стр. 55–56 «Кванта» №3 за 2005 г.

Номера рисунков 182 и 183— вместо 4 и 5.

Рисунки номер 4 и 5 страниц 55 и 56 «Кванта» №3 за 2005 г.

424.

Решение задачи 15, стр. 56 «Кванта» №3 за 2005 г.

Номера рисунков 184 и 185— вместо 6 и 7

Рисунки номер 6 и 7 страниц 55 и 56 «Кванта» №3 за 2005 г.

425. $(x;y)=(1;1)$, (4;2) или (9;3). Поскольку квадрат натурального числа не может оканчиваться ни на одну из цифр 2, 3, 7 и 8, то $y=1$, 4, 5 или 9.

Пусть число x^2 неоднозначное. Тогда $x^2\equiv\overline{yy}\equiv 11$, 44, 55 или 99 (mod 4) соответственно. Квадрат любого натурального числа при делении на 4 даёт 1 или 0. Поскольку числа 11, 55 и 99 дают остаток 3 при делении на 4, осталось рассмотреть случай $y=4$. Он сводится к уже рассмотренному случаю $y=1$ делением числа x на 2, а y — на 4.

426.

Решение задачи 17 стр. 59 «Кванта» №4 за 2005 г.

427.

Решение задачи 18 стр. 59 «Кванта» №4 за 2005 г.

428. Читайте статью И. Акулича «Треугольники на шахматной доске» в «Кванте» №3 за 2005 год.

429.

Решение задачи 20, стр. 59–60 «Кванта» №4 за 2005 г.

Номер рисунка 186— вместо 2.

Рисунок номер 2 страницы 59 «Кванта» №4 за 2005 г.

430. а) $(2+2)(1+0) = 2\cdot 2 + 1\cdot 0$.

431. Первым ходом Снегурочка может стереть четыре буквы «Е» и расположить остальные буквы так: БРДВЫЫ—ННПОЛЯ. Далее на каждый ход Берендея Снегурочка может отвечать, стирая буквы, симметрично расположенные только что стёртым Берендеем, и тем самым восстанавливать симметрию, нарушаемую Берендеем.

432. а) 2 ладьи.

б) Достаточно поставить 10 ладей: 4 по углам и 6 штук на одной из диагоналей. При такой расстановке можно сначала заполнить ладьями все граничные клетки доски, а потом заполнить все остальные клетки. Докажем, что меньшим количеством ладей обойтись нельзя. В самом деле, в углах доски ладьи обязаны стоять, поскольку ладья, стоящая в углу, угрожает не более чем двум ладьям. Осталось 6 пустых вертикалей и горизонталей. Если на какой-нибудь горизонтали не будет ни одной ладьи, то на эту горизонталь нельзя поставить ни одной ладьи. Значит, на каждой вертикали и горизонтали должна быть хотя бы одна ладья.

433. а) $x = 88$; б) $x = 880$.

434. Сумма чисел $(m_1 - 1)$, $(m_2 - 2)$, ..., $(m_{100} - 100)$ равна нулю. Поэтому сумма модулей положительных чисел этого набора равна сумме модулей отрицательных чисел. Положив гирьки, соответствующие этим двум наборам чисел, на разные чашки весов, получим равновесие.

436. $n - 2$.

437. Нет. Например, состоящую из полей a1, b1, c1, d1, e1, f1, b2 и e2 фигуру нельзя разрезать на доминошки.

439. 33.

440. Да.

441. С Витей.

443. 859.

447. 9 цветов.

450. Нет.